Στοχαστικές Στρατηγικές

Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ

2η ενότητα: Στοιχειώδη προβλήματα διαδρομής

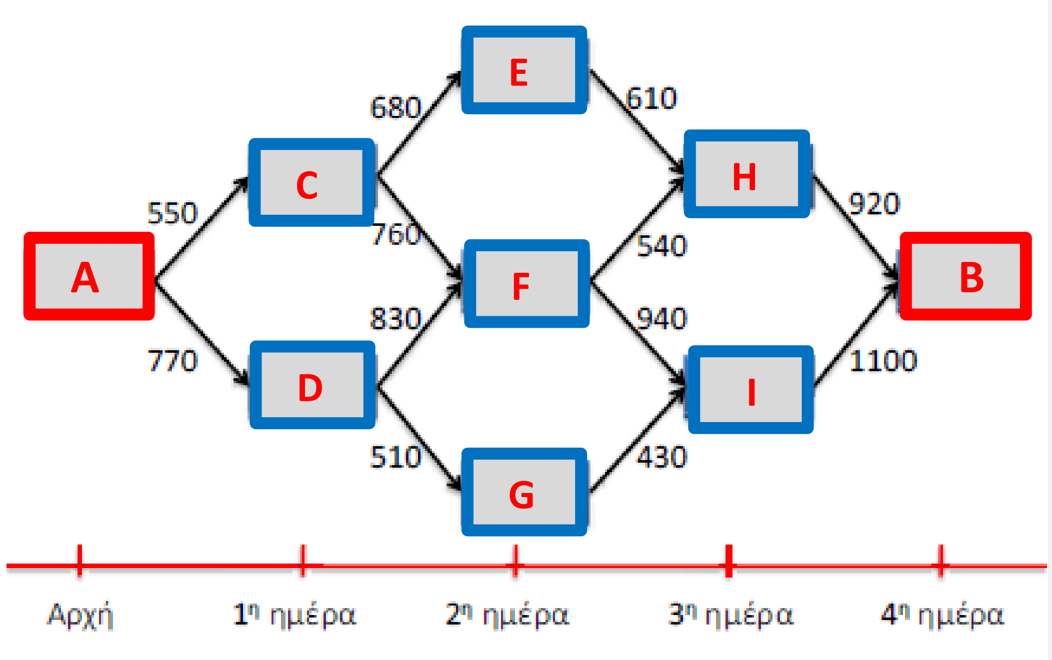
Παπάνα Αγγελική

Μεταδιδακτορική ερευνήτρια, ΑΠΘ & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας
E-mail: angeliki.papana@gmail.com, agpapana@auth.gr
Webpage: http://users.auth.gr/agpapana

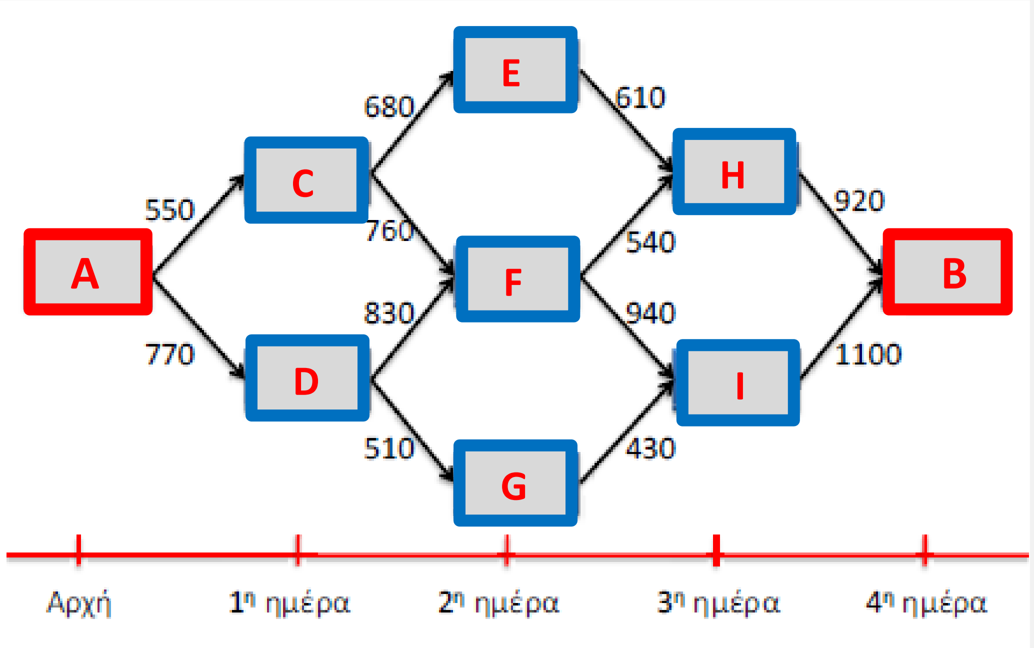
Στοιχειώδη προβλήματα διαδρομής

Τα προβλήματα διαδρομής είναι κλασσικές εφαρμογές της μεθοδολογίας του **Δυναμικού Προγραμματισμού** και προσφέρονται για να παρουσιαστούν οι αρχές του.

Παράδειγμα



Ας υποθέσουμε ότι είμαστε στην **πόλη A** και θέλουμε να πάμε στην **πόλη B**. Ο διπλανός χάρτης δείχνει όλες τις πιθανές διαδρομές ακολουθώντας τα τόξα.

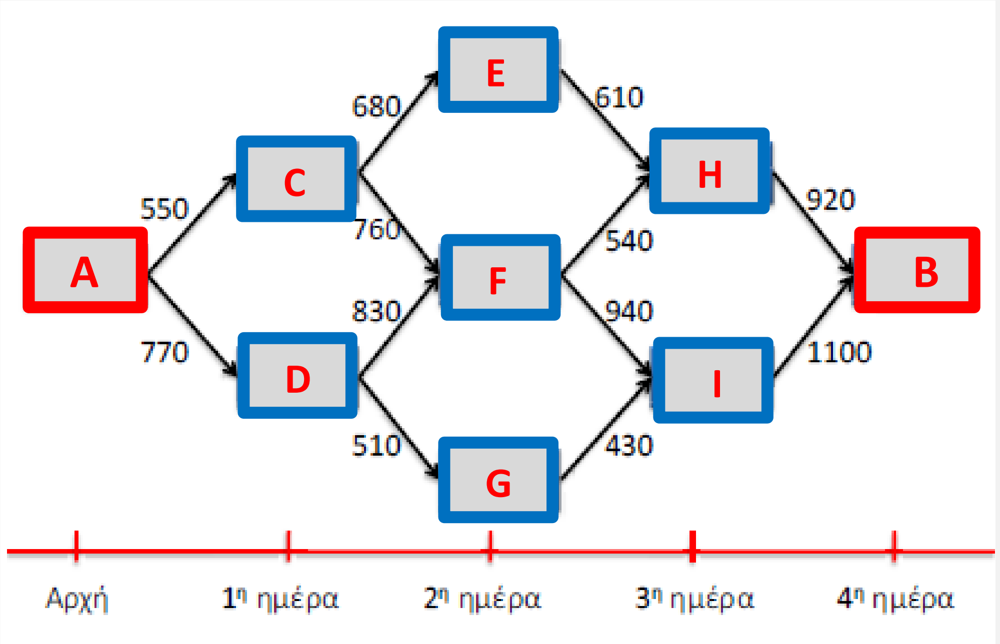


Τα νούμερα που είναι σημειωμένα στα τόξα αντιπροσωπεύουν τα <u>χιλιόμετρα</u>, αλλά θα μπορούσε να είναι κάποιο άλλο μέγεθος που μας ενδιαφέρει, π.χ. <u>χρόνος</u> ή <u>έξοδα</u>.

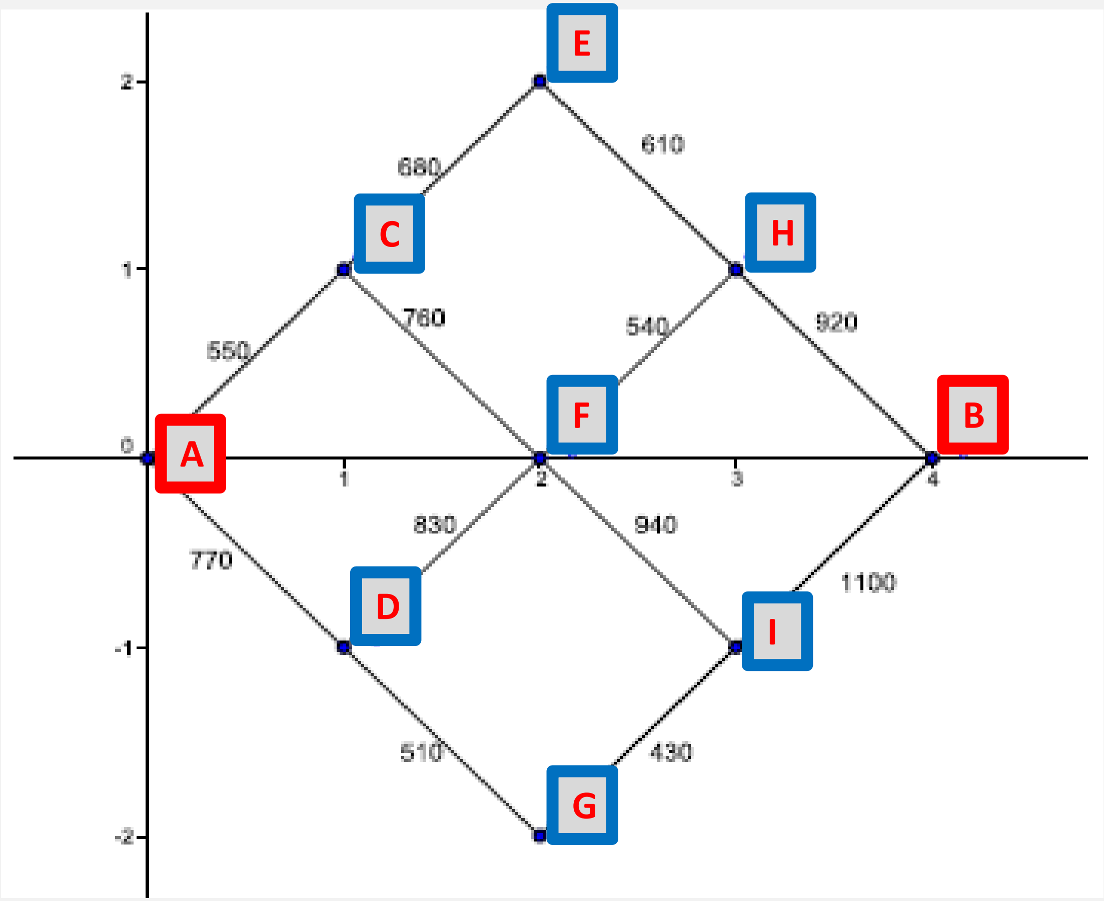
<u>**Το πρόβλημα**</u>

Πρέπει να βρούμε ποια είναι η <u>βέλτιστη διαδρομή</u>, δηλαδή θέλουμε να βρούμε ποια είναι η διαδρομή με τα <u>λιγότερα χιλιόμετρα</u>.

<u>Η προς τα πίσω μέθοδος του Δυναμικού Προγραμματισμού</u>

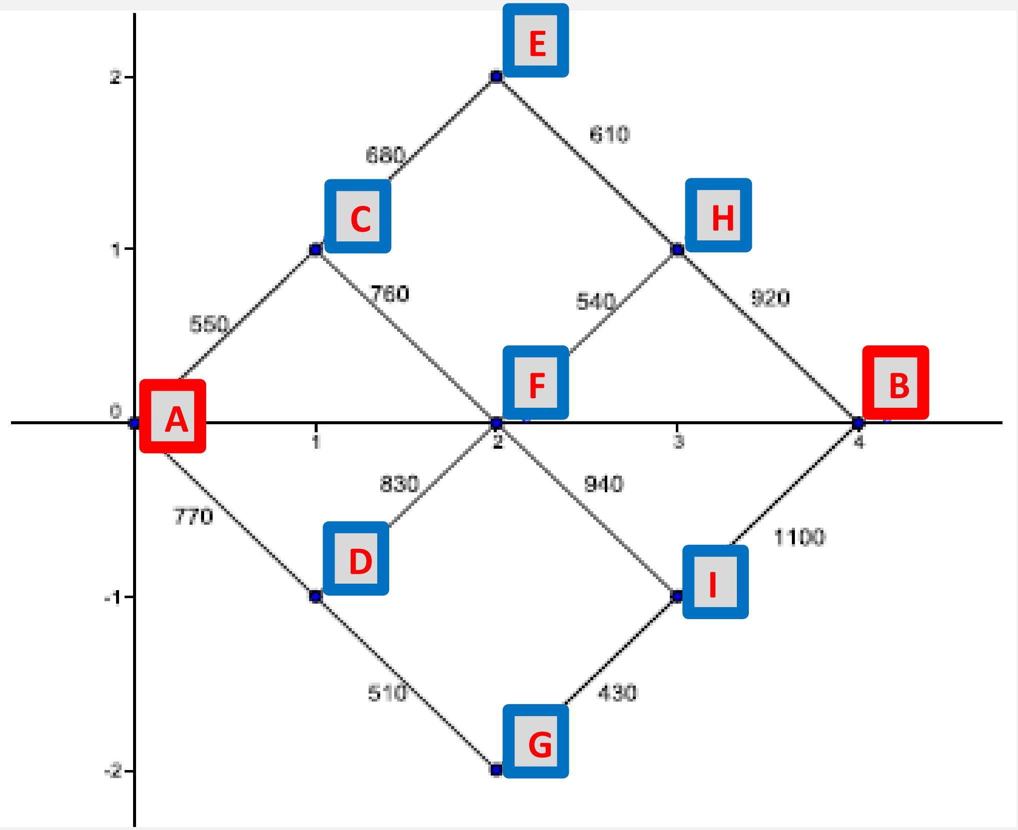


Αρχικά τοποθετούμε το σχήμα μας σε ένα <u>ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων</u>, με την πόλη Α στην αρχή των αξόνων.



Έπειτα, ορίζουμε την **βέλτιστη συνάρτηση**:

$f(x, y) \equiv \{$Η τιμή της ελάχιστης διαδρομής μεταξύ του κόμβου (x, y) και του τελικού κόμβου (4,0)$\}$



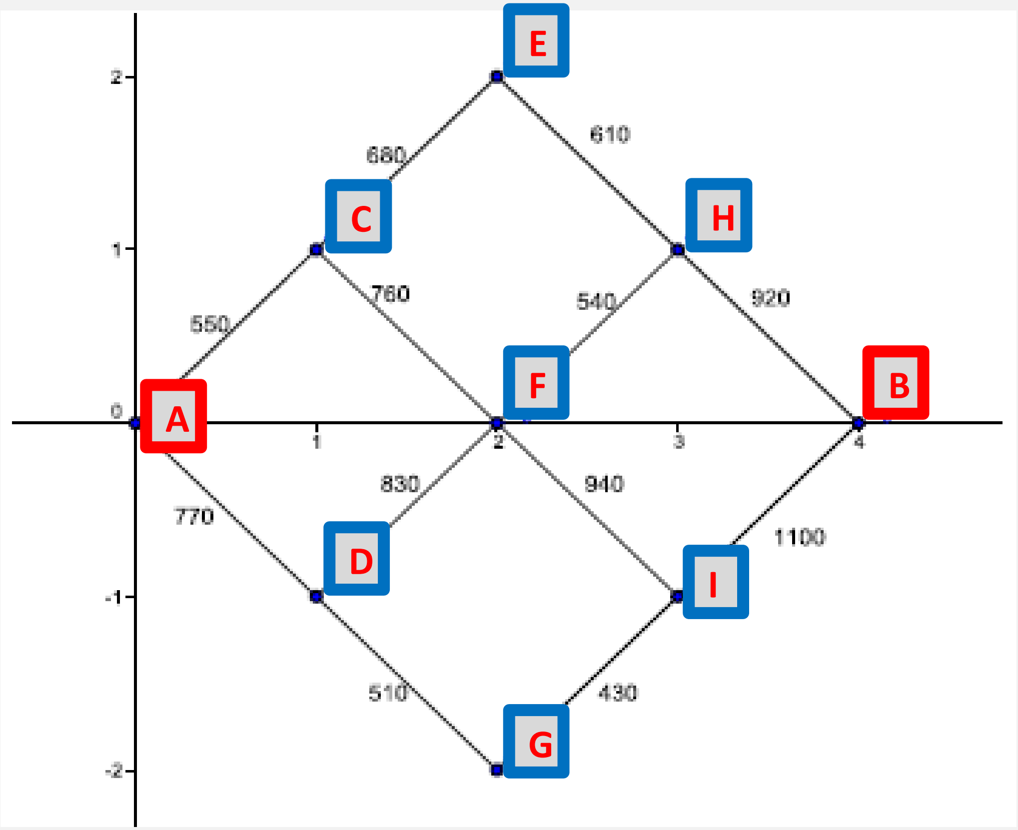
Π.χ.

Ο **κόμβος C** βρίσκεται στην θέση $(1, 1)$ άρα:

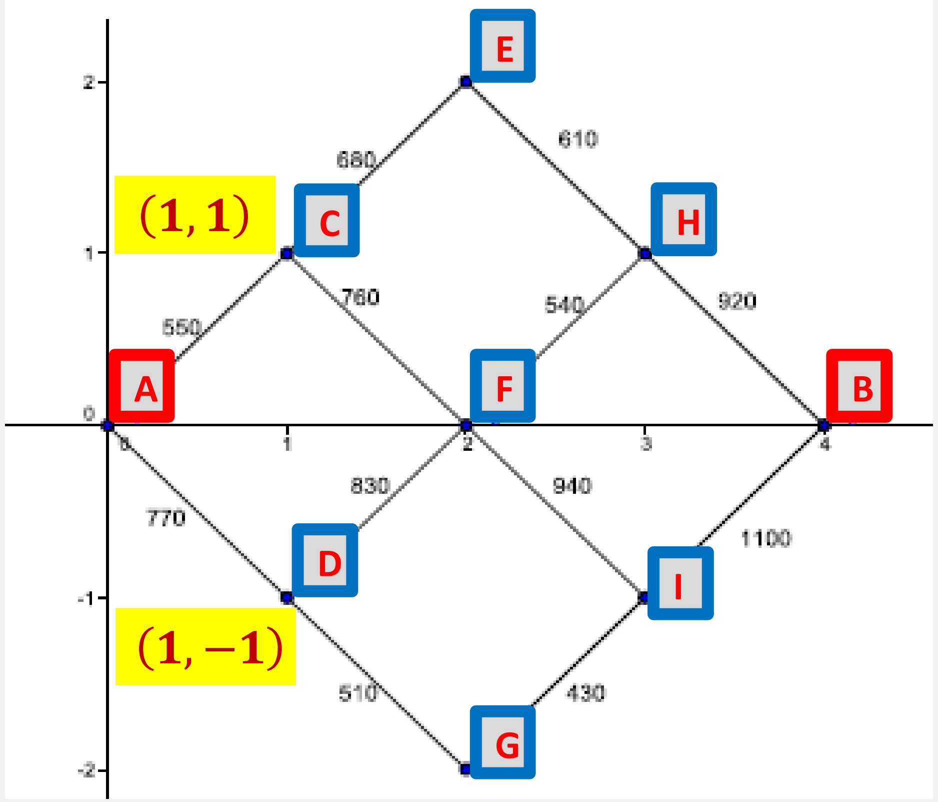
$$\boldsymbol{f(1, 1) \equiv \{}\textbf{Η τιμή της ελάχιστης διαδρομής μεταξύ του κόμβου } \boldsymbol{(1, 1)} \textbf{ και του τελικού κόμβου (4,0)}\boldsymbol{\}}$$

Σημείωση

Η μεταβλητή x ονομάζεται φάση του προβλήματος και
η μεταβλητή y κατάσταση του προβλήματος.



Η μεθοδολογία του ΔΠ βασίζεται πάνω στην **αρχή της βελτιστοποίησης**.



Δηλαδή:

Ξεκινώντας από τον **κόμβο A**, δεν γνωρίζουμε αν πρέπει να πάμε στον **κόμβο C** ή στον **κόμβο D**.

Αν όμως ξέραμε τις τιμές των ελάχιστων διαδρομών:

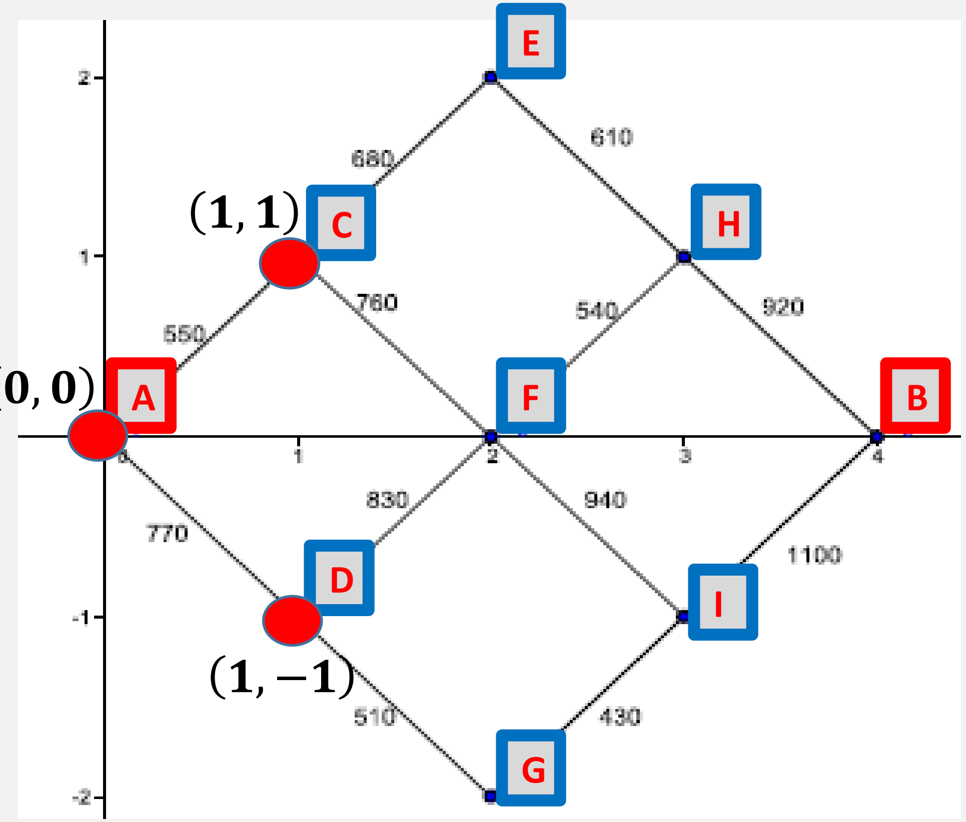
- από τον **κόμβο C** στον **κόμβο B**, δηλαδή το $f(1,1)$ ή
- από τον **κόμβο D** στον **κόμβο B**, δηλαδή το $f(1,-1)$,

τότε θα μπορούσαμε να πάρουμε εύκολα την πρώτη απόφαση.

Δηλαδή, ανεξάρτητα από το ποια είναι η **αρχική (βέλτιστη) απόφαση** μας (αν θα πάμε στον **κόμβο C** ή στον **κόμβο D**), οι υπόλοιπες αποφάσεις που μένουν, πρέπει να είναι **βέλτιστες ως προς τον κόμβο που θα βρεθούμε**, αφού μόνο οι τιμές $\boldsymbol{f(1,1)}$ και $\boldsymbol{f(1,-1)}$ μας χρειάζονται.

Επομένως:

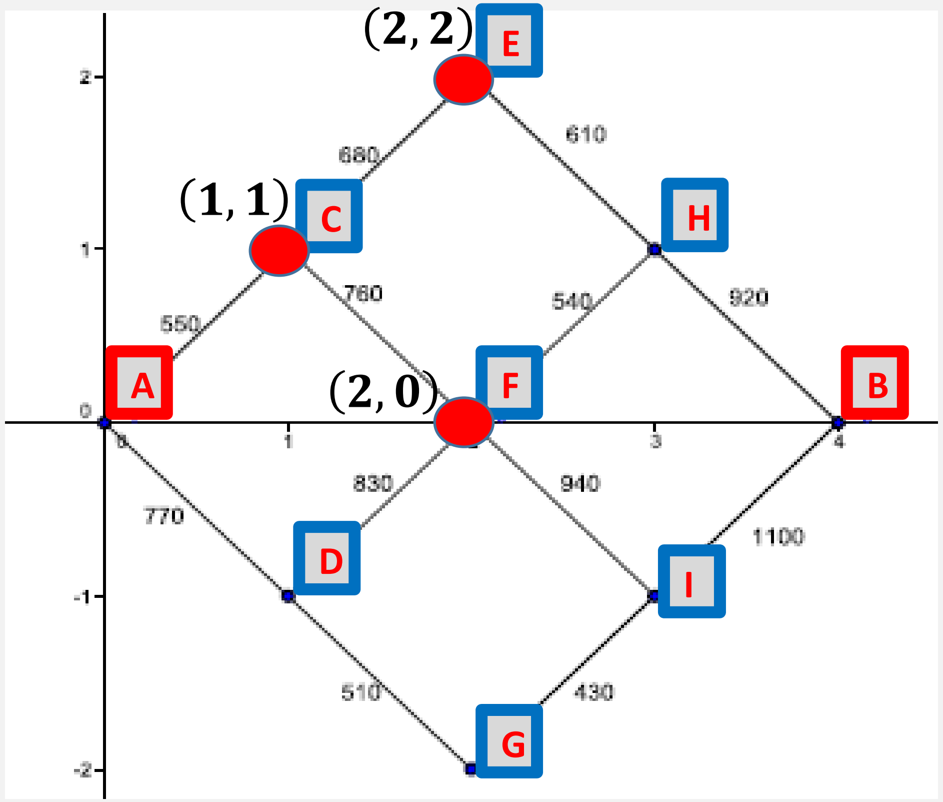
$$\boxed{f(0,0) = \min\{\underbrace{550+f(1,1)}_{A \to C \to B},\ \underbrace{770+f(1,-1)}_{A \to D \to B}\}}$$



Με το ίδιο σκεπτικό, για να πάρουμε την βέλτιστη απόφαση όταν βρισκόμαστε στον **κόμβο C** (θέση $(1,1)$), χρειαζόμαστε τις τιμές των <u>ελάχιστων διαδρομών</u> από τον **κόμβο E** και τον **κόμβο F**.

Δηλαδή:

$$\boxed{f(1,1) = \min\{\underbrace{680 + f(2,2)}_{C \rightarrow E \rightarrow B},\ \underbrace{760 + f(2,0)}_{C \rightarrow F \rightarrow B}\}}$$



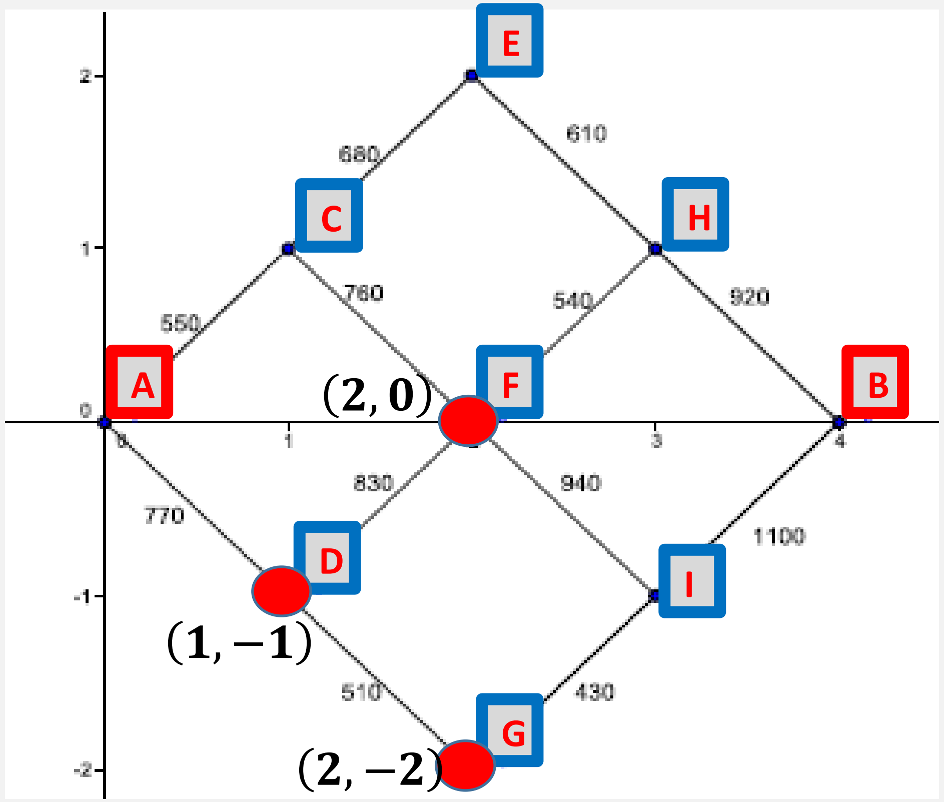
Ομοίως, έστω βρισκόμαστε στον **κόμβο D** (θέση $(1,-1)$), χρειαζόμαστε τις τιμές των <u>ελάχιστων διαδρομών</u> από τον **κόμβο F** και τον **κόμβο G**.

Δηλαδή:

$$f(1,-1) = \min\{\underbrace{830 + f(2,0)}_{D \to F \to B},\ \underbrace{510 + f(2,-2)}_{D \to G \to B}\}$$

D → F → B

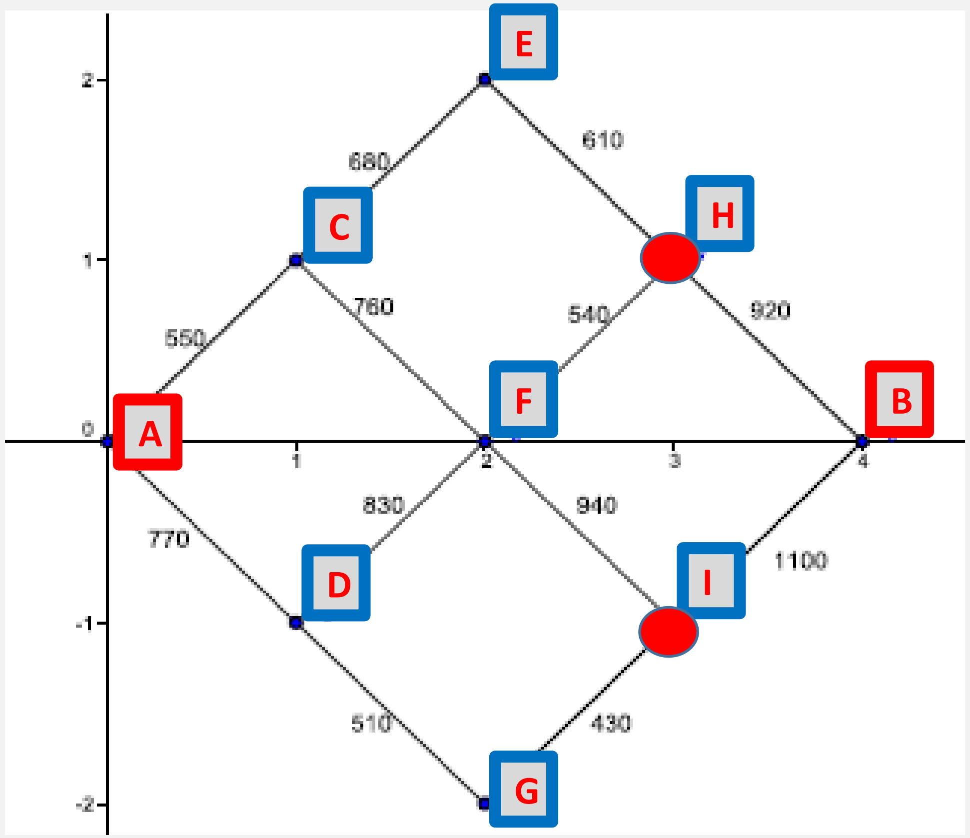
D → G → B



Με την παραπάνω διαδικασία, καταλαβαίνουμε ότι όλα καταλήγουν στον υπολογισμό των

- $f(3,1)$ (**σημείο Η**) και
- $f(3,-1)$ (**σημείο Ι**)

τα οποία είναι πολύ εύκολο να υπολογιστούν, καθώς όπως φαίνεται από το σχήμα



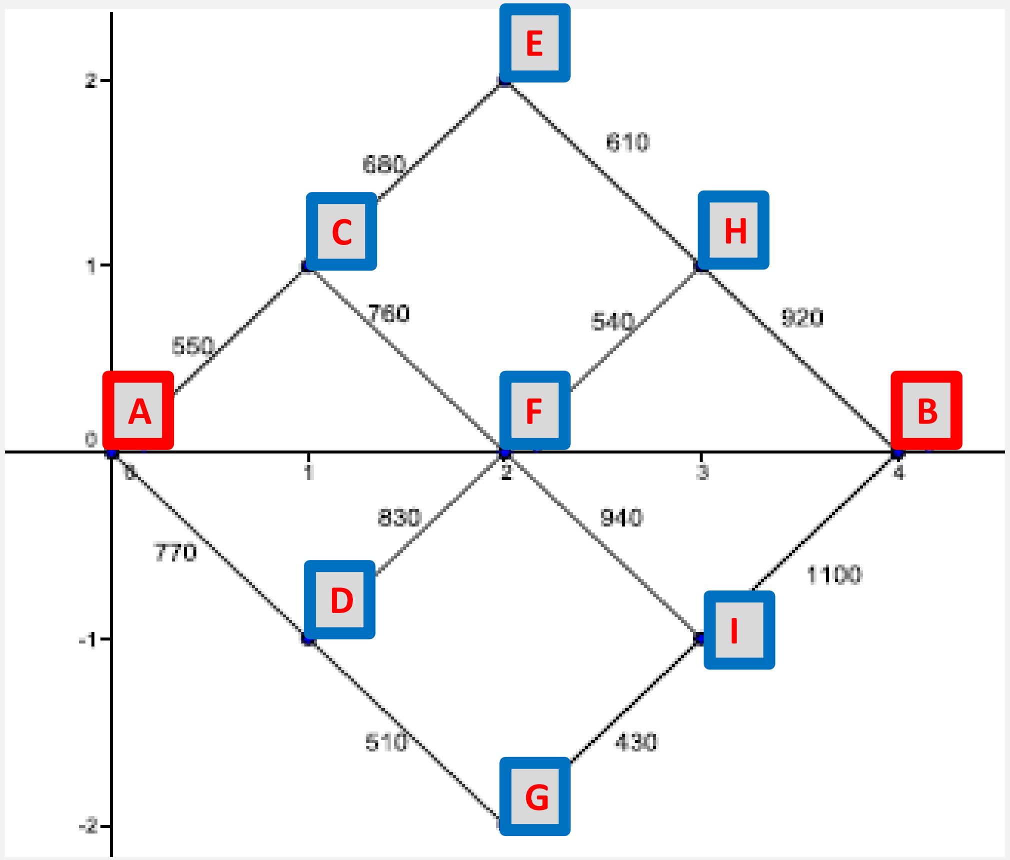
$\boxed{f(3,1) = 920 \qquad (H \to B)}$

$\boxed{f(3,-1) = 1100 \qquad (I \to B)}$

Η διαδικασία της **προς τα πίσω μεθόδου** συνοψίζεται ως εξής:

Υπολογίζουμε όλες τις τιμές της **βέλτιστης συνάρτησης** $f(x, y)$ σε όλους τους **κόμβους** του προβλήματος, αρχίζοντας από τους

- **προτελευταίους κόμβους** (δηλ. εδώ για $x = 3$) και
- πηγαίνοντας **προς τα πίσω** (δηλ. εδώ για $x = 2, 1$).



Για κάθε τιμή του x υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης f για όλες τις τιμές του y.

Οπότε:

- Για $\boldsymbol{x = 3}$:

$$f(3,1) = 920$$

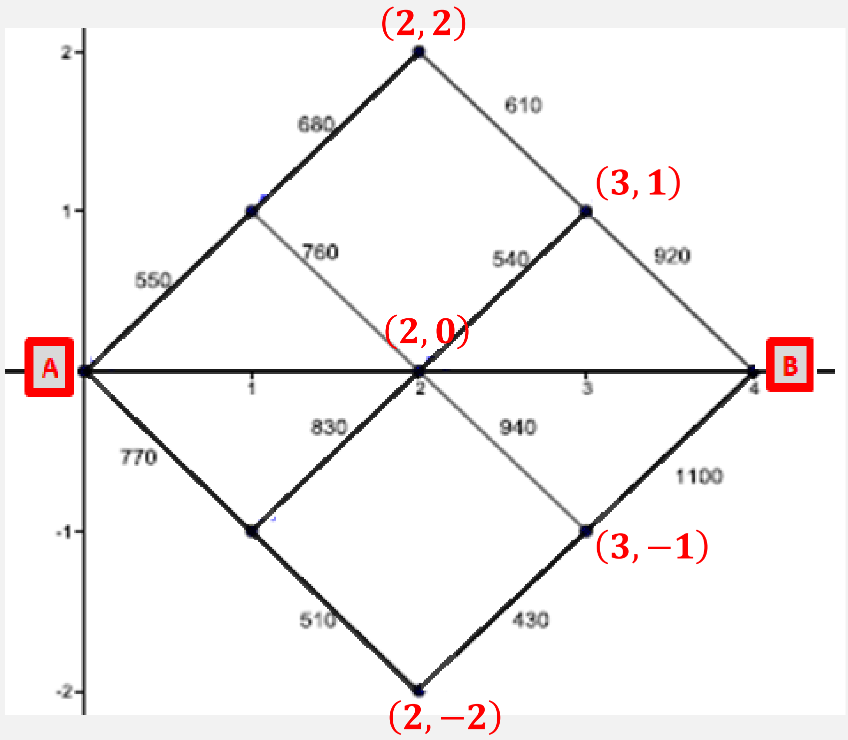
$$f(3,-1) = 1100$$

- Για $\boldsymbol{x = 2}$:

$$f(2,2) = 610 + f(3,1)$$
$$= 610 + 920 = 1530$$

$$f(2,0) = \min\{540 + f(3,1), 940 + f(3,-1)\}$$
$$= \min\{540 + 920, 940 + 1100\}$$
$$= \min\{1460, 2040\} = 1460$$

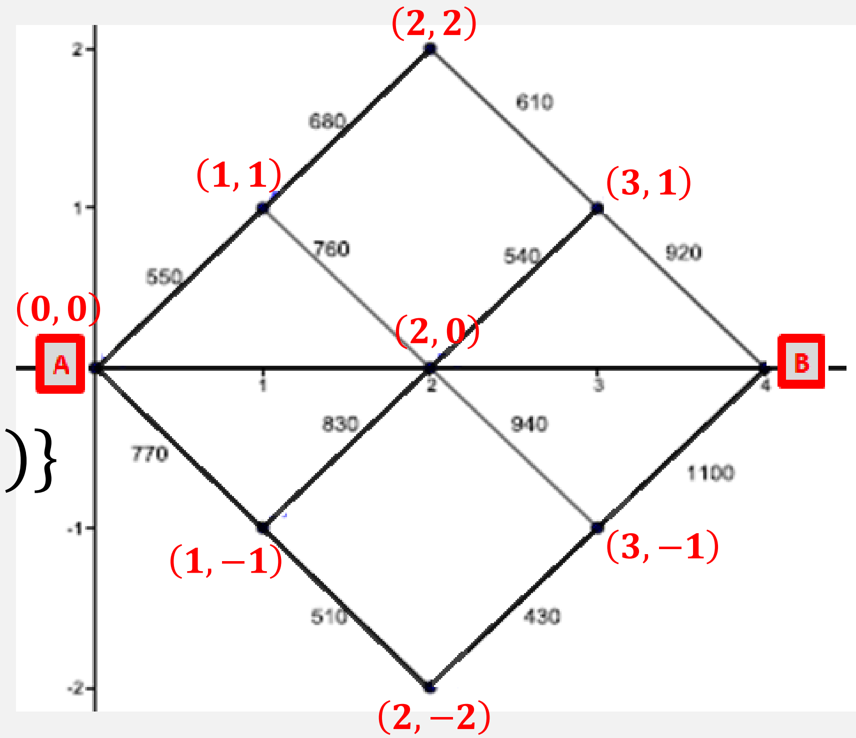
$$f(2,-2) = 430 + f(3,-1) = 430 + 1100 = 1530$$



- Για $x = 1$:

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{1},\mathbf{1}) = \min\{680 + f(2,2), 760 + f(2,0)\}$$
$$= \min\{680 + 1530\ , 760 + 1460\ \}$$
$$= \min\{2210\ , 2220\} = 2210$$

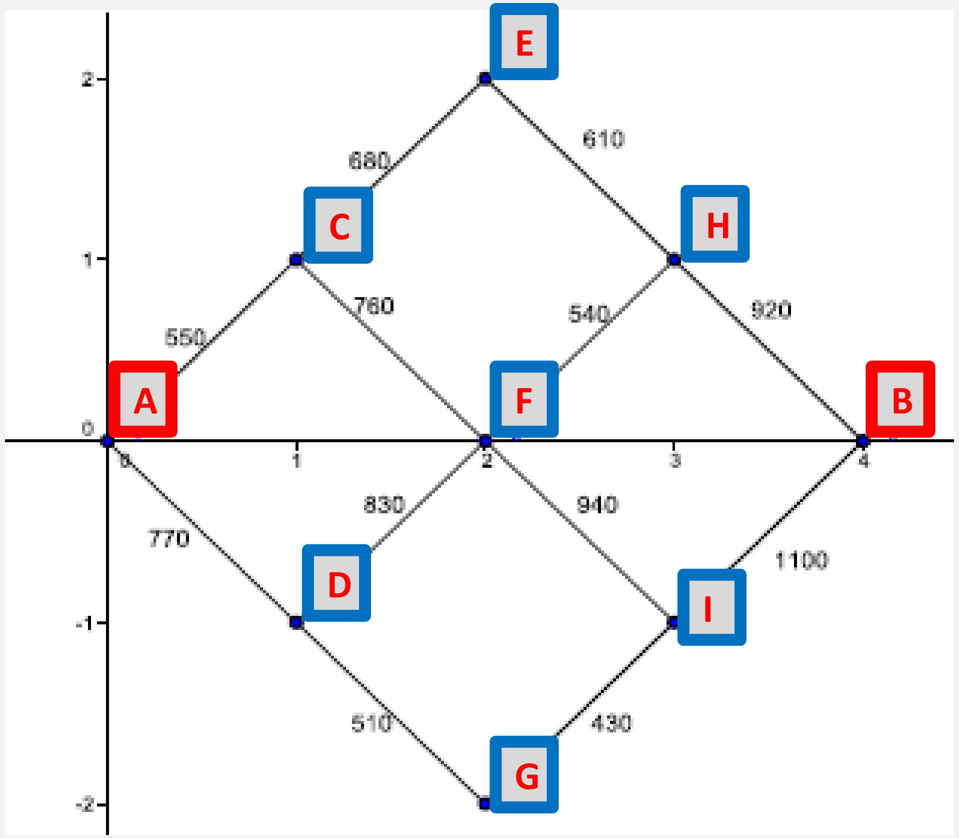
$$\boldsymbol{f}(\mathbf{1},-\mathbf{1}) = \min\{830 + f(2,0), 510 + f(2,-2)\}$$
$$= \min\{830 + 1460\ , 510\ + 1530\}$$
$$= \min\{2290\ , 2040\} = 2040$$



- Για $x = 0$:

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \min\{550 + f(1,1), 770 + f(1,-1)\}$$
$$= \min\{550 + 2210, 770 + 2040\}$$
$$= \min\{2760, 2810\} = \mathbf{2760}$$

Επομένως βρήκαμε ότι $\boldsymbol{f(0,0) = 2760}$.

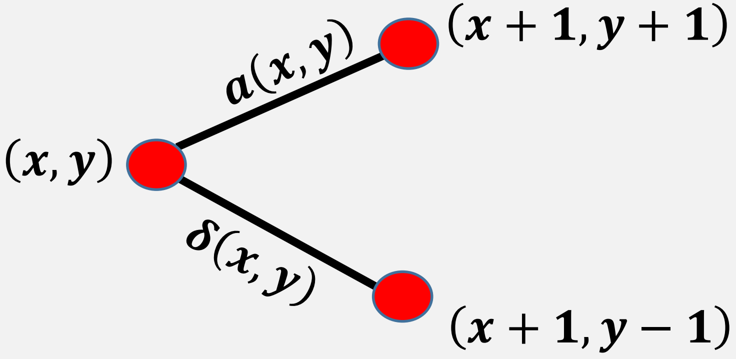


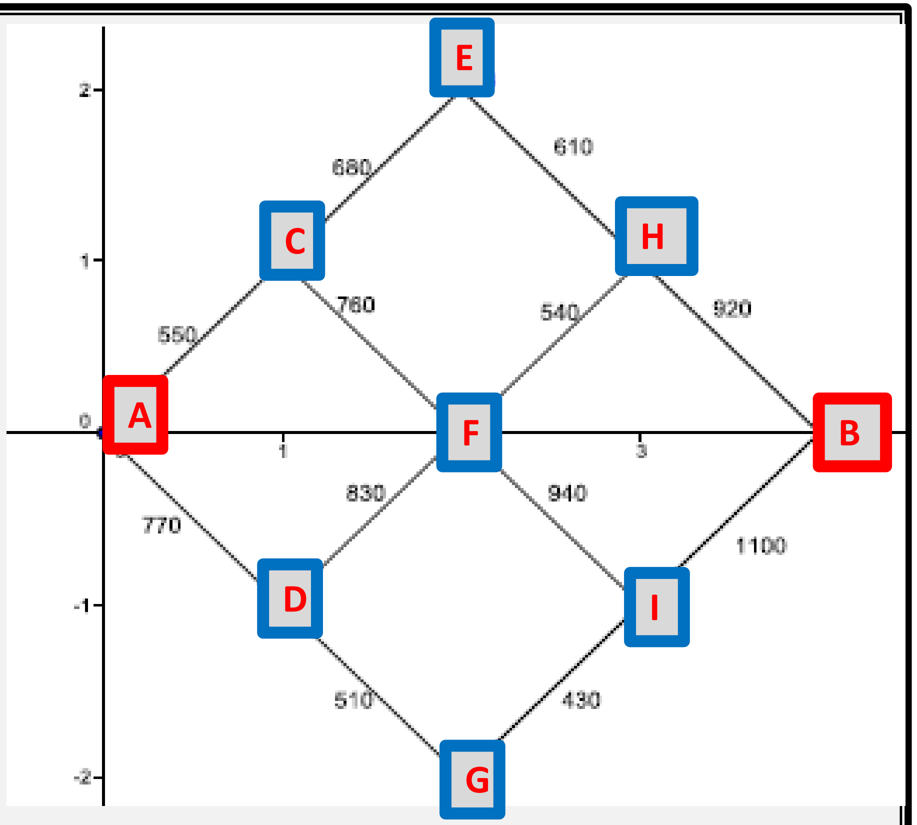
Δηλαδή το **ελάχιστο κόστος μετάβασης** από την **πόλη A** στην **πόλη B** είναι $\mathbf{2760}$.

Συμβολίζουμε με

$\boldsymbol{a(x,y)} \rightarrow$ την απόσταση μεταξύ του κόμβου $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ και του $(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}+\mathbf{1})$

$\boldsymbol{\delta(x,y)} \rightarrow$ η απόσταση μεταξύ του κόμβου $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ και του $(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}-\mathbf{1})$



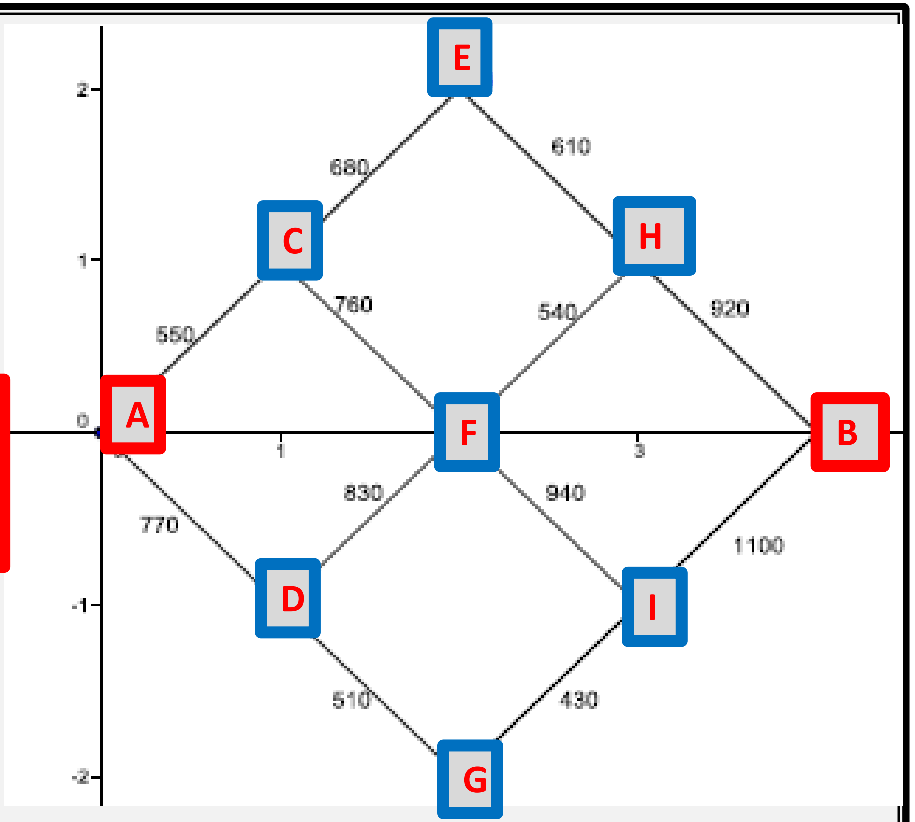


Η **επαναληπτική σχέση** που εφαρμόσαμε στα παραπάνω βήματα είναι:

$$\boldsymbol{f(x,y) = min\{a(x,y) + f(x+1, y+1),\ \delta(x,y) + f(x+1, y-1)\}}$$

και δεχόμαστε την **οριακή συνθήκη**

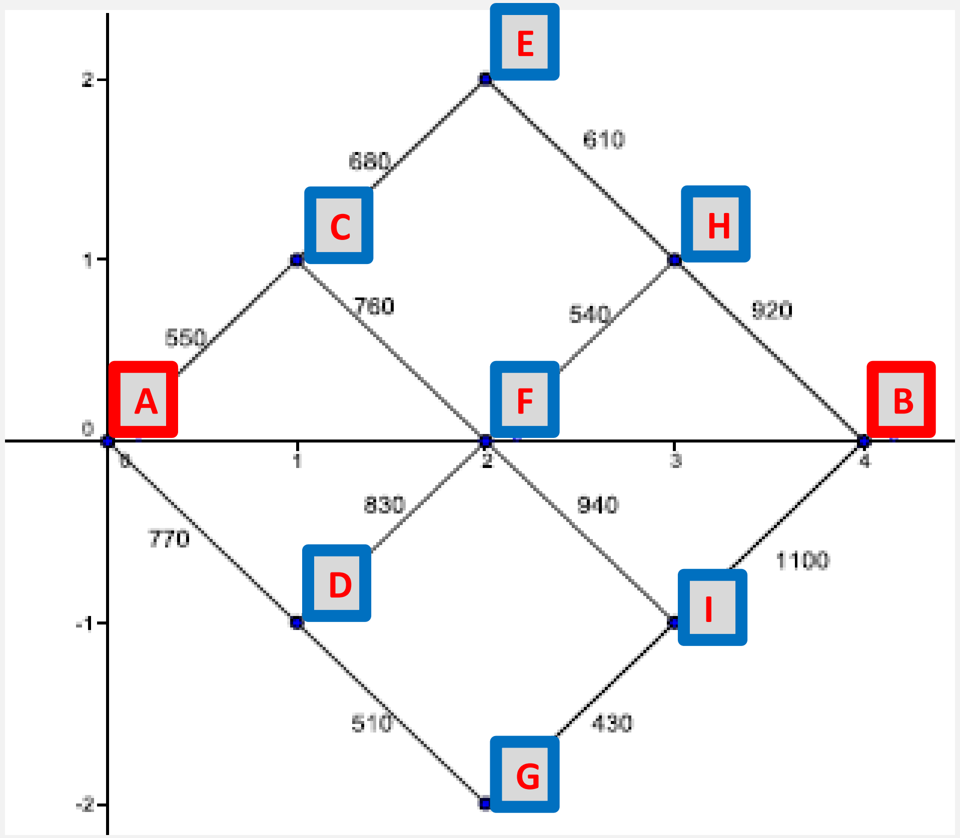
$$\boldsymbol{f(4,0) = 0}$$



Τώρα πρέπει να προσδιορίσουμε και **ποια** είναι η **διαδρομή ελάχιστης απόστασης** μεταξύ των πόλων **A** και **B**.

Αυτή η πληροφορία υπάρχει ήδη σε όσα κάναμε παραπάνω.

Έστω $\boldsymbol{\pi(x,y)}$ η συνάρτηση η οποία μας δίνει τη **βέλτιστη απόφαση** για το επόμενο βήμα από το σημείο $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.



Είναι:

- $\boldsymbol{f(0,0)} = \min\{\boldsymbol{\alpha(0,0)} + \boldsymbol{f(1,1)}, \boldsymbol{\delta(0,0)} + f(1,-1)\} = \mathbf{2760}$

  Άρα $\boxed{\boldsymbol{\pi(0,0) = (1,1)}}$

- $\boldsymbol{f(1,1)} = \min\{\boldsymbol{\alpha(1,1)} + \boldsymbol{f(2,2)}, \boldsymbol{\delta(1,1)} + f(2{,}0)\} = \mathbf{2210}$

  Άρα $\boxed{\boldsymbol{\pi(1,1) = (2,2)}}$

- $\boldsymbol{f(2,2) = \delta(2,2) + f(3,1) = 1530}$

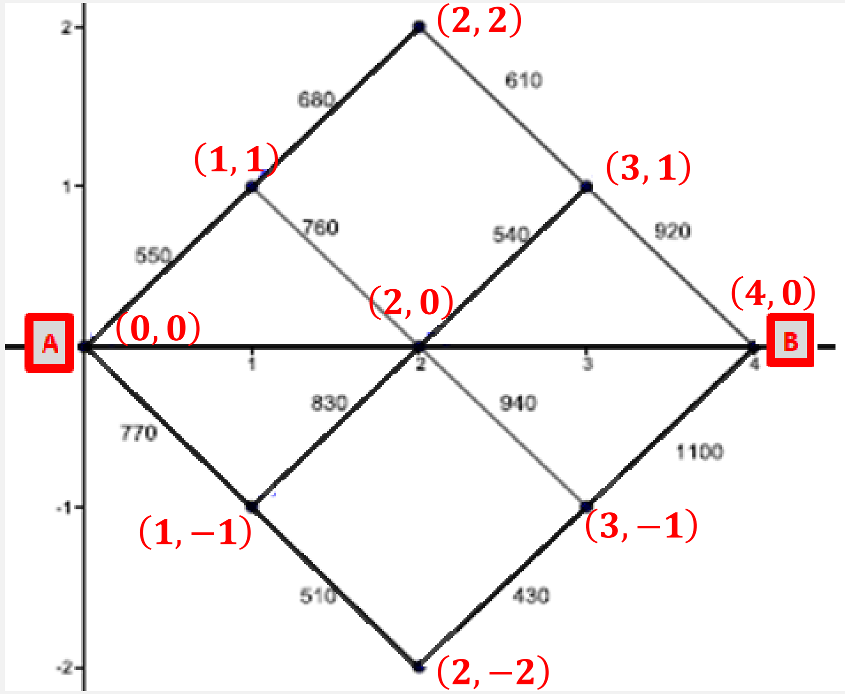
  Άρα $\boxed{\boldsymbol{\pi(2,2) = (3,1)}}$

- $\boldsymbol{f(3,1) = \delta(3,1) = 920}$.

  Άρα $\boxed{\boldsymbol{\pi(3,1) = (4,0)}}$

Οπότε:

$\boldsymbol{(0,0) \to (1,1) \to (2,2) \to (3,1) \to (4,0)}$

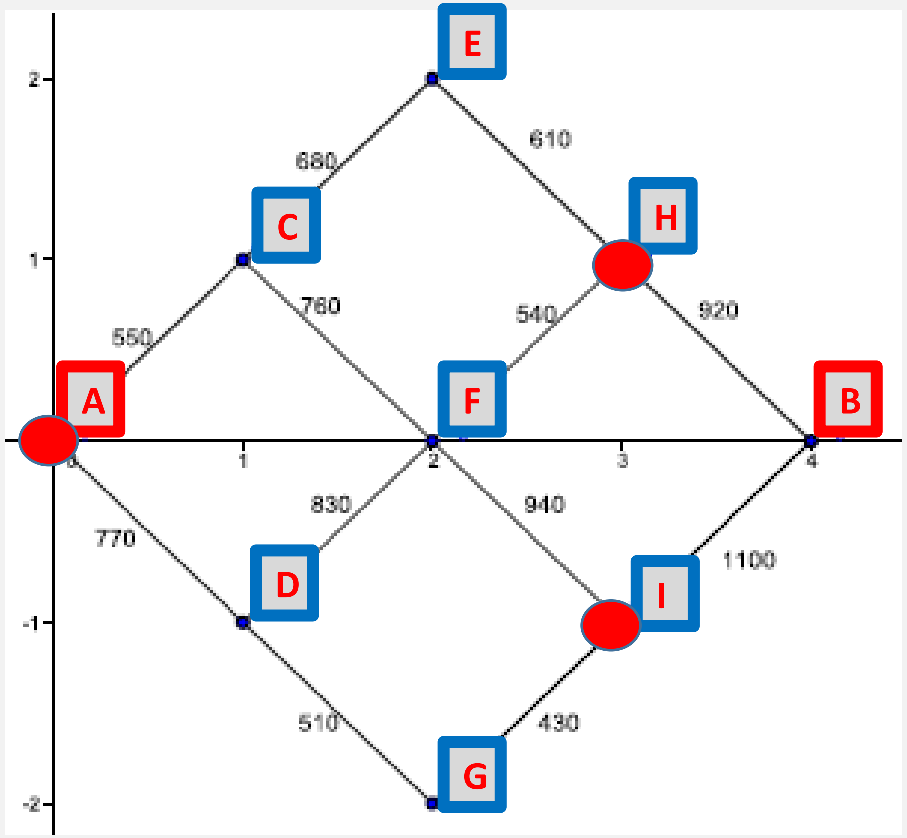


Η προς τα εμπρός μέθοδος του Δυναμικού Προγραμματισμού

Χρησιμοποιώντας το ίδιο παράδειγμα με πριν, για να αποφασίσουμε ως προς την βέλτιστη διαδρομή, μπορούμε να προχωρήσουμε με την εξής λογική:

Για να αποφασίσουμε πως θα πάμε από την **πόλη A** στην **πόλη B**, αρκεί να γνωρίζουμε ποια είναι

- **η ελάχιστη διαδρομή από το A στο H**
- **η ελάχιστη διαδρομή από το A στο I**

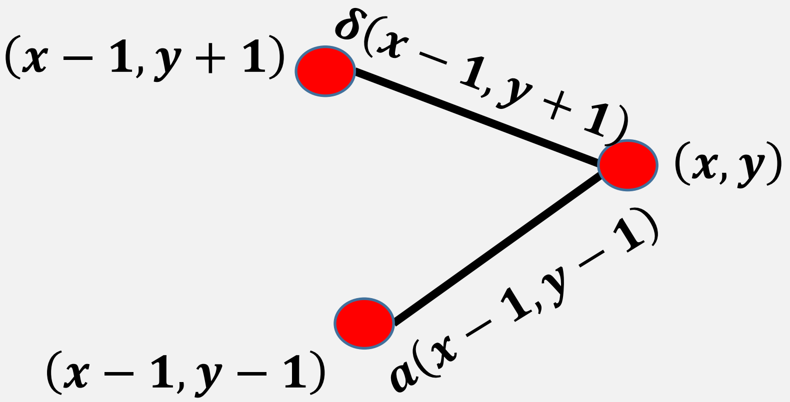


Με το σκεπτικό αυτό, ορίζουμε ως **βέλτιστη συνάρτηση** την παρακάτω:

$$f(x,y) \equiv \{\text{Η τιμή της ελάχιστης διαδρομής μεταξύ του αρχικού κόμβου και του κόμβου } (x,y)\}$$

Στην περίπτωση αυτή η **επαναληπτική σχέση** ορίζεται ως εξής:

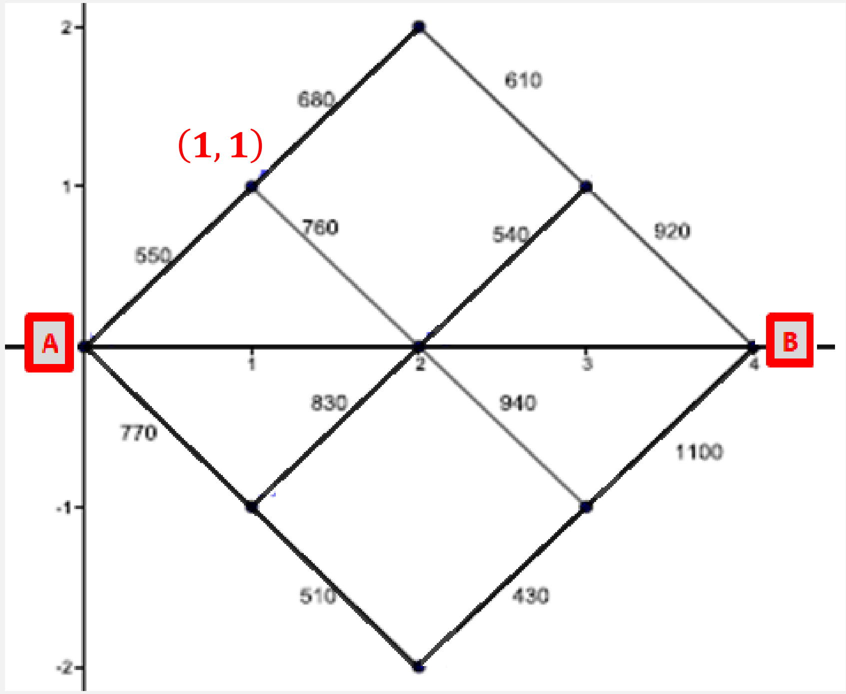
$$f(x,y) = min\{a(x-1,y-1) + f(x-1,y-1), \delta(x-1,y+1) + f(x-1,y+1)\}$$



Η **οριακή συνθήκη** είναι η

$$\boxed{f(0,0) = 0}$$

Π.χ. Ο **κόμβος C** βρίσκεται στην θέση $(1,1)$ άρα:



$\boldsymbol{f(1,1) \equiv \{}$**Η τιμή της ελάχιστης διαδρομής μεταξύ του αρχικού κόμβου** $\boldsymbol{(0,0)}$ **και του κόμβου** $\boldsymbol{(1,1)\}}$

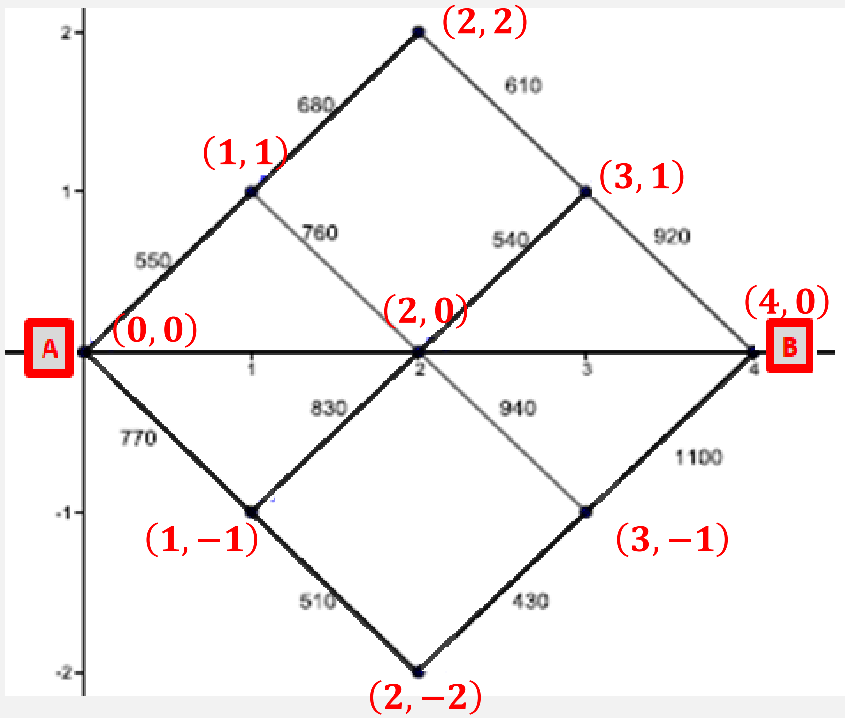
Είναι:

- Για $\boldsymbol{x = 1}$:

$$\boldsymbol{f(1,1)} = \alpha(0,0) + f(0,0) = 550 + f(0,0) = 550$$

$$\boldsymbol{f(1,-1)} = \delta(0,0) + f(0,0) = 770 + f(0,0) = 770$$

- Για $\boldsymbol{x = 2}$:



$$\boldsymbol{f(2,2)} = \alpha(1,1) + f(1,1) = 680 + 550 = 1230$$

$$\boldsymbol{f(2,0)} = \min\{\delta(1,1) + f(1,1), \alpha(1,-1) + f(1,-1)\} = \min\{760 + 550, 830 + 770\} = \min\{1310, 1600\} = 1310$$

$$\boldsymbol{f(2,-2)} = \delta(1,-1) + f(1,-1) = 510 + 770 = 1280$$

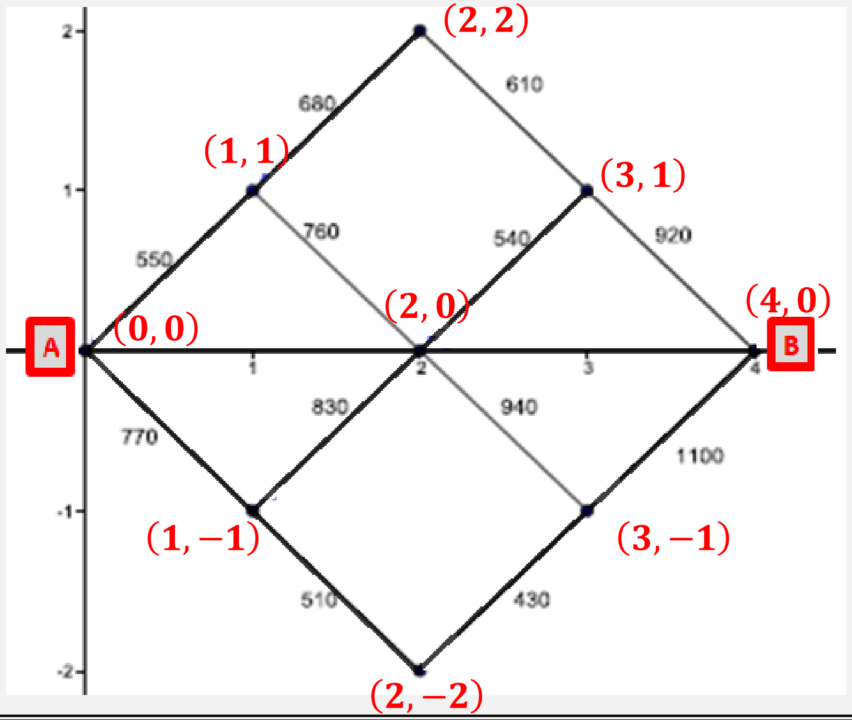
- Για $x = 3$:

$$f(3,1) = \min\{\delta(2,2) + f(2,2), \alpha(2,0) + f(2,0)\}$$
$$= \min\{610 + 1230, 540 + 1310\} = \min\{1840, 1850\} = 1840$$

$$f(3,-1) = \min\{\delta(2,0) + f(2,0), \alpha(2,-2) + f(2,-2)\}$$
$$= \min\{940 + 1310, 430 + 1280\} = \min\{2250, 1710\} = 1710$$

- Για $x = 4$:

$$f(4,0) = \min\begin{Bmatrix} \delta(3,1) + f(3,1), \\ \alpha(3,-1) + f(3,-1) \end{Bmatrix}$$
$$= \min\{920 + 1840, 1100 + 1710\}$$
$$= 2760$$



Άρα η **βέλτιστη διαδρομή** είναι:

$$(\mathbf{0},\mathbf{0})\rightarrow(\mathbf{1},\mathbf{1})\rightarrow(\mathbf{2},\mathbf{2})\rightarrow(\mathbf{3},\mathbf{1})\rightarrow(\mathbf{4},\mathbf{0})$$

διότι

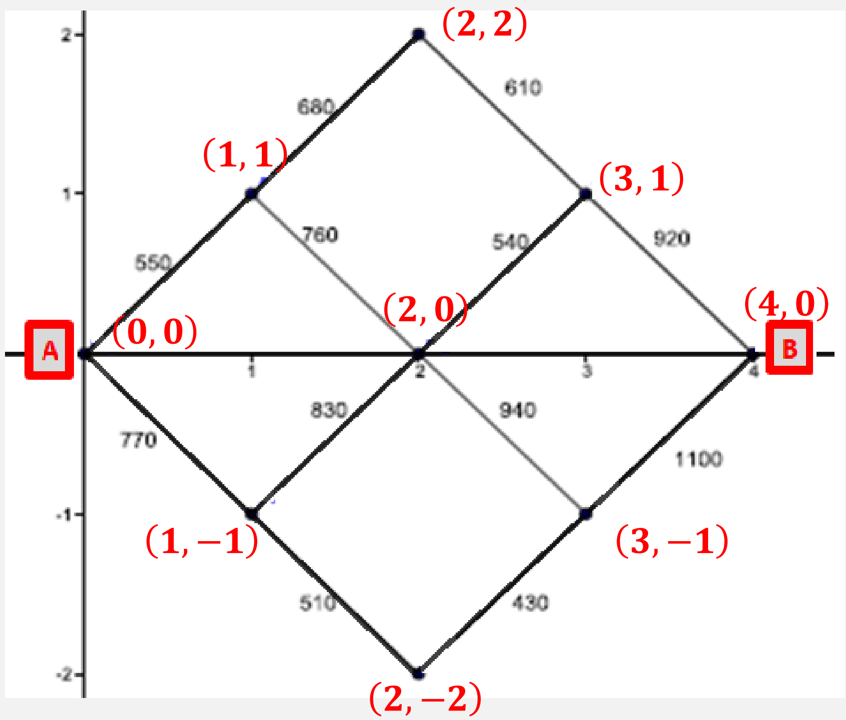
$$\boldsymbol{f}(\mathbf{4},\mathbf{0}) = \min\{920 + \boldsymbol{f}(\mathbf{3},\mathbf{1}), 1100 + f(3,-1)\}$$
$$= \min\{2760{,}2810\} = \underline{\mathbf{2760}}$$

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{3},\mathbf{1}) = \min\{610 + \boldsymbol{f}(\mathbf{2},\mathbf{2}), 540 + f(2{,}0)\}$$
$$= \min\{1840{,}1850\} = \underline{\mathbf{1840}}$$

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{2},\mathbf{2}) = 680 + \boldsymbol{f}(\mathbf{1},\mathbf{1}) = \underline{\mathbf{1230}}$$

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{1},\mathbf{1}) = 550 + \boldsymbol{f}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \underline{550}$$

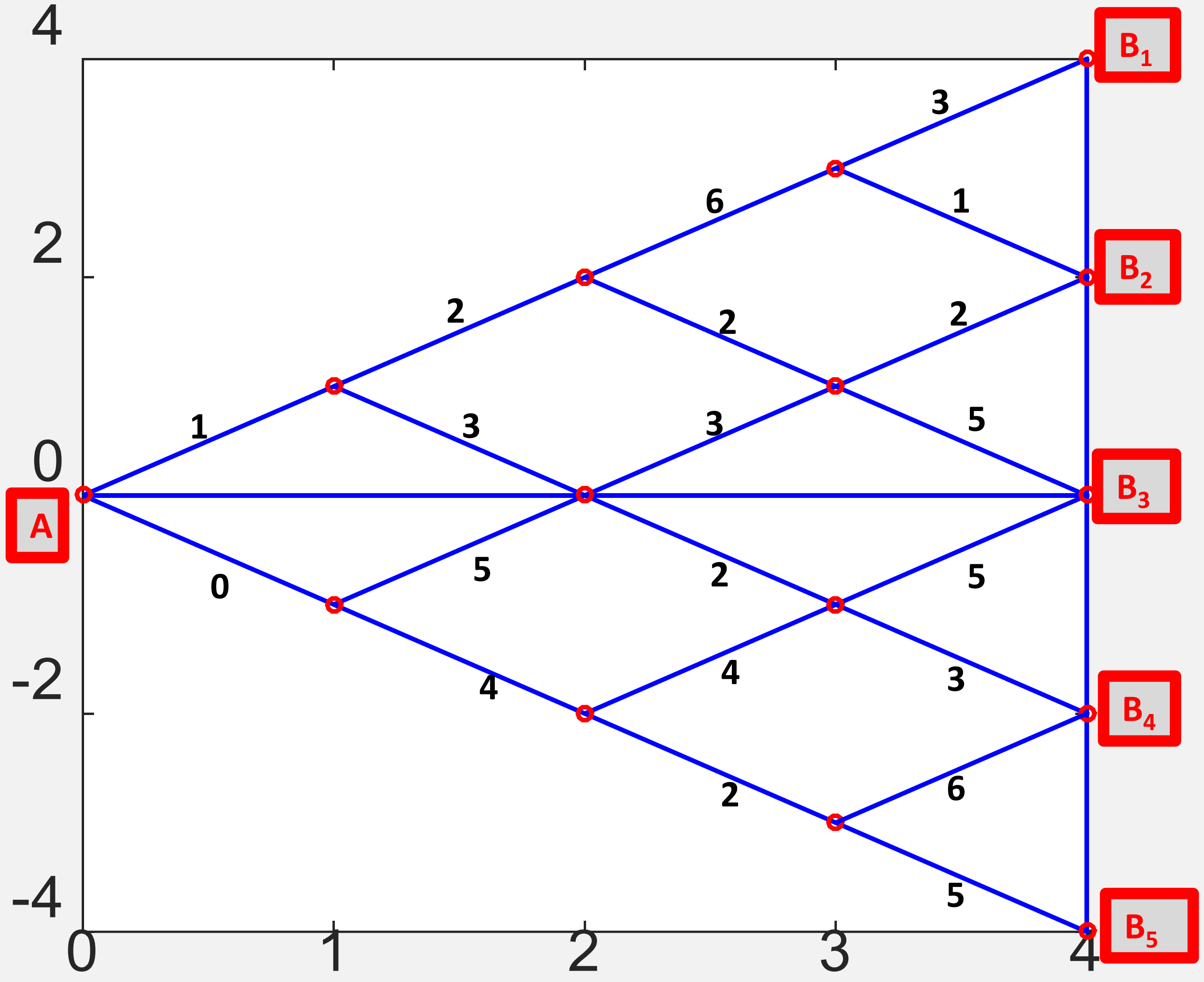
$$\boldsymbol{f}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0$$



Πολυδιάστατες βέλτιστες συναρτήσεις

Άσκηση

Να βρεθεί η ελάχιστη διαδρομή μεταξύ του σημείου Α και οποιοδήποτε σημείου πάνω στην ευθεία Β, με την **προς τα πίσω μέθοδο** του ΔΠ.
Αν δεν αλλάξουμε κατεύθυνση σε κάποιον κόμβο, προσθέτουμε κόστος 2.
(Ομοίως προστίθεται κόστος και στους τελικούς κόμβους.)

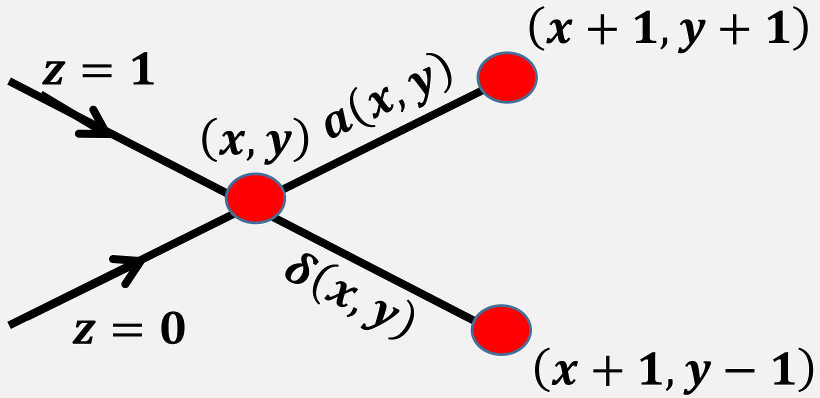


Βέλτιστη συνάρτηση

$f(x, y, z) \equiv$ {Η τιμή της ελάχιστης διαδρομής μεταξύ του κόμβου (x, y) και της ευθείας Β όπου
$z = 0$ αν το πρώτο βήμα είναι προς τα αριστερά και
$z = 1$ αν το πρώτο βήμα είναι προς τα δεξιά}

$\boldsymbol{a(x, y)}$: απόσταση μεταξύ
(x, y) και $(x + 1, y + 1)$

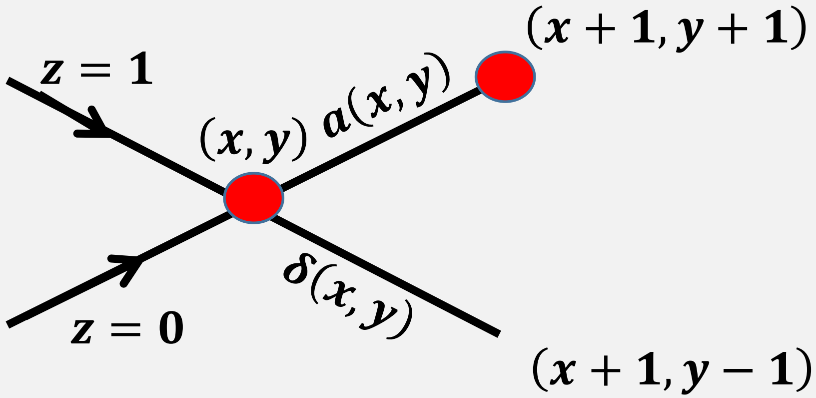
$\boldsymbol{\delta(x, y)}$: απόσταση μεταξύ
(x, y) και $(x + 1, y - 1)$



Έστω ότι είμαστε στον κόμβο $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ **και πάμε αριστερά**, που εκφράζεται από την τριάδα $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\mathbf{0})$, τότε θα πάμε στον κόμβο $(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}+\mathbf{1})$.

Στο σημείο αυτό, δηλ. από τον κόμβο $(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}+\mathbf{1})$, θα πάμε

- **προς τα αριστερά**
  με τιμή $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}+\mathbf{1},\mathbf{0})+\mathbf{2}$
  όπου προσθέτουμε κόστος 2 γιατί
  <u>δεν</u> αλλάζουμε κατεύθυνση, ή



- **προς τα δεξιά**, με τιμή $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}+\mathbf{1},\mathbf{1})$

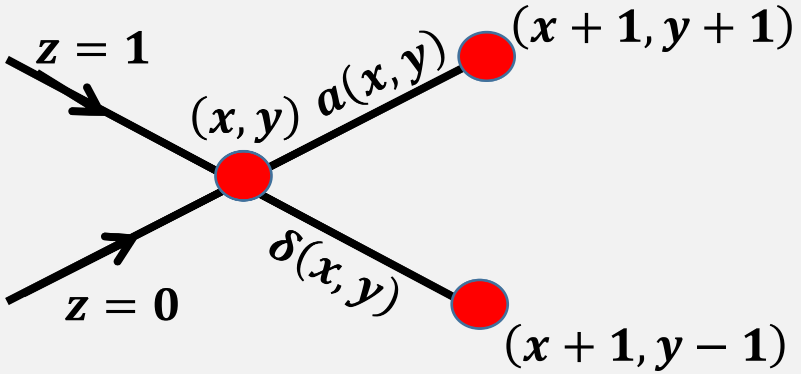
Από τις δύο δυνατές διαδρομές πρέπει να επιλέξουμε αυτήν με το ελάχιστο κόστος. Επομένως, η επαναληπτική σχέση θα είναι:

$$\boxed{f(x,y,0)=a(x,y)+min\{f(x+1,y+1,0)+2, f(x+1,y+1,1)\}}$$

Ομοίως, έστω είμαστε στον κόμβο (x, y) **και πάμε δεξιά** δηλαδή πάμε στον κόμβο $(x+1, y-1)$.

Στο σημείο αυτό, δηλ. από τον κόμβο $(x+1, y-1)$, θα πάμε

- **προς τα αριστερά**, με τιμή $f(x+1, y-1, 0)$
  ή
- **προς τα δεξιά**, με τιμή $f(x+1, y-1, 1) + 2$
  γιατί **δεν αλλάζουμε κατεύθυνση**.



Από τις δύο δυνατές διαδρομές πρέπει να επιλέξουμε αυτήν με το ελάχιστο κόστος. Άρα προκύπτει η επαναληπτική σχέση:

$$\boxed{f(x, y, 1) = \delta(x, y) + min\{f(x+1, y-1,0), f(x+1, y-1,1) + 2\}}$$

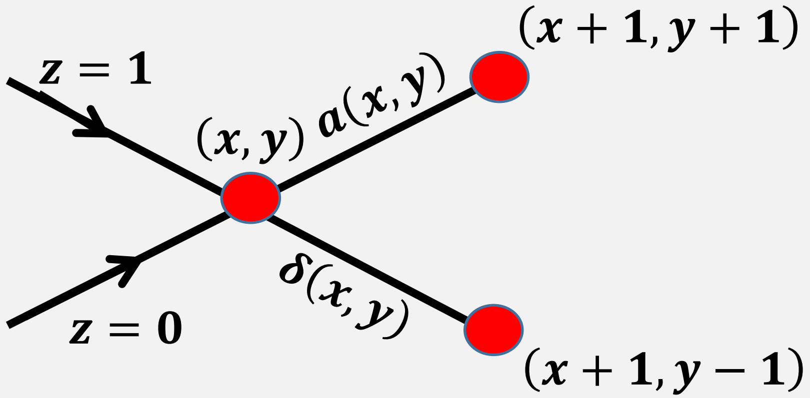
Επαναληπτικές σχέσεις

$$f(x,y,0) = a(x,y) + min\{f(x+1,y+1,0) + 2, f(x+1,y+1,1)\}$$

$$f(x,y,1) = \delta(x,y) + min\{f(x+1,y-1,0), f(x+1,y-1,1) + 2\}$$

$\boldsymbol{a(x,y)}$: απόσταση μεταξύ (x,y) και $(x+1,y+1)$

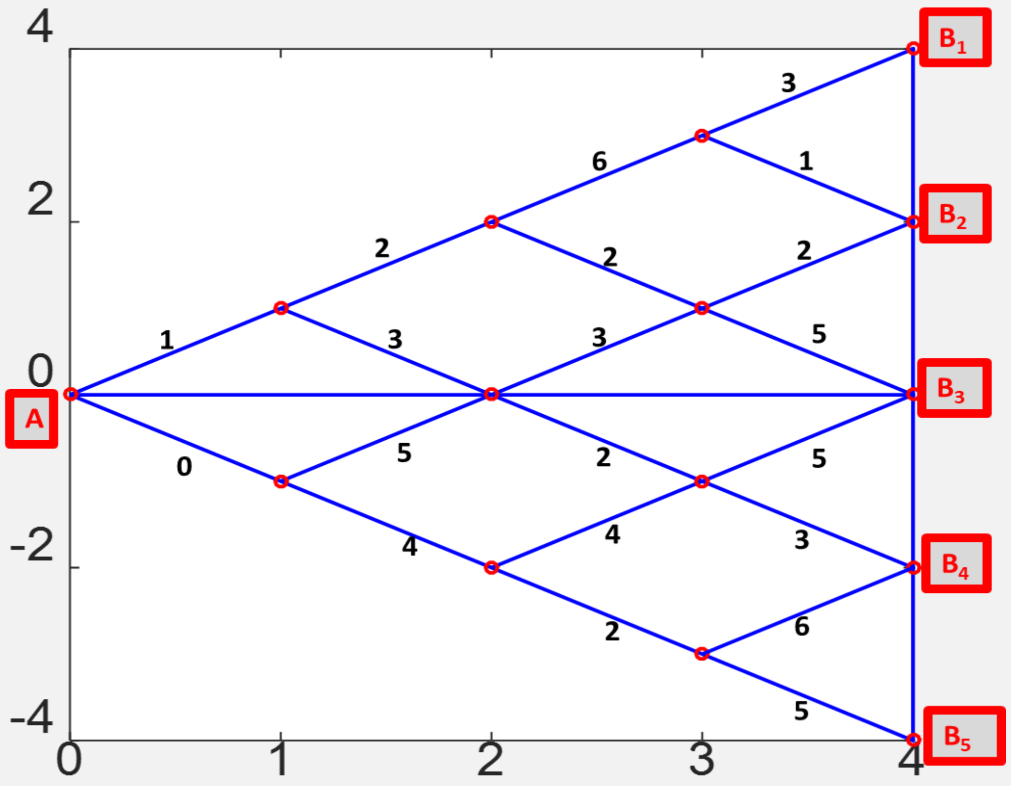
$\boldsymbol{\delta(x,y)}$: απόσταση μεταξύ (x,y) και $(x+1,y-1)$



Οριακές συνθήκες

- Για $\boldsymbol{x = 4}$:

$$f(4,4,0) = 0$$
$$f(4,4,1) = 0$$
$$f(4,2,0) = 0$$
$$f(4,2,1) = 0$$
$$f(4,0,0) = 0$$
$$f(4,0,1) = 0$$
$$f(4,-2,0) = 0$$
$$f(4,-2,1) = 0$$
$$f(4,-4,0) = 0$$
$$f(4,-4,1) = 0$$



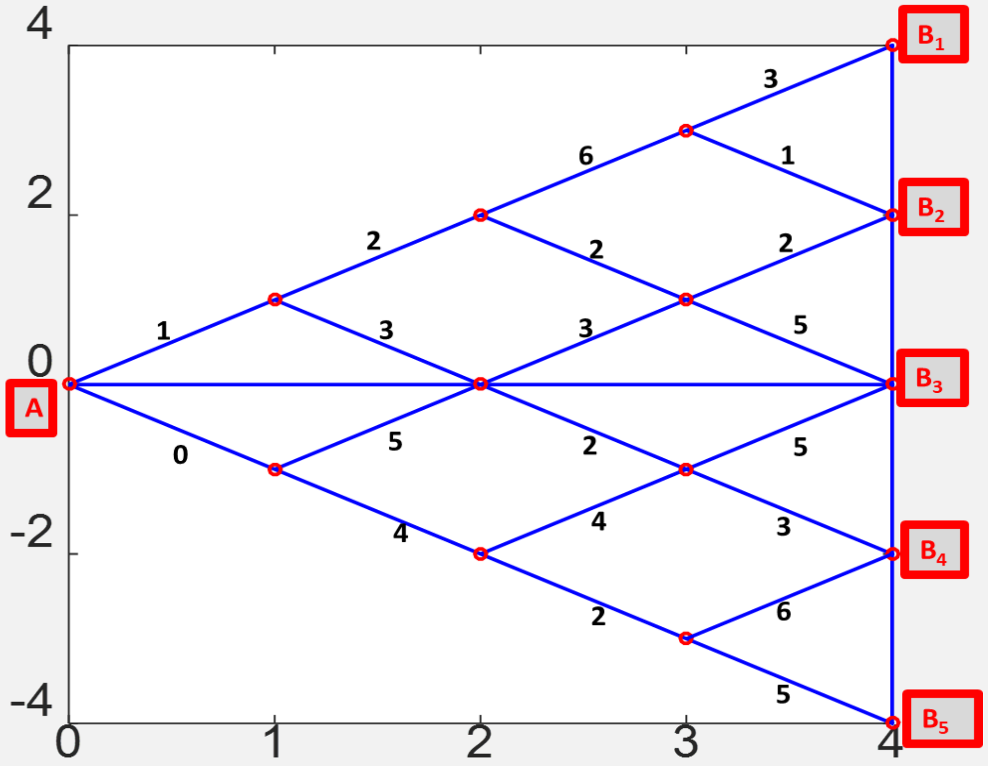
- Για $\boldsymbol{x = 3}$:

$$f(3,3,0) = \alpha(3,3) + min\{f(4,4,0) + 2, f(4,4,1)\} = $$
$$= 3 + \min\{2,0\} = 3$$

$$f(3,3,1) = \delta(3,3) + min\{f(4,2,0), f(4,2,1) + 2\}$$
$$= 1 + \min\{0,2\} = 1$$

$$\boldsymbol{f(3,1,0)} = a(3,1) + min\{f(4,2,0) + 2, \boldsymbol{f(4,2,1)}\}$$
$$= 2 + \min\{2,0\} = \boldsymbol{2}$$

$$f(3,1,1) = \delta(3,1) + min\{f(4,0,0), f(4,0,1) + 2\}$$
$$= 5 + \min\{0,2\} = 5$$



$$f(3,-1,0) = a(3,-1) + min\{f(4,0,0) + 2, f(4,0,1)\} = 5 + \min\{2,0\} = 5$$

$$f(3,-1,1) = \delta(3,-1) + min\{f(4,-2,0), f(4,-2,1) + 2\} = 3 + \min\{0,2\} = 3$$

$$f(3,-3,0) = \alpha(3,-3) + min\{f(4,-2,0) + 2, f(4,-2,1)\} = 6 + \min\{2,0\} = 6$$

$$f(3,-3,1) = \delta(3,-3) + min\{f(4,-4,0), f(4,-4,1) + 2\} = 5 + \min\{0,2\} = 5$$

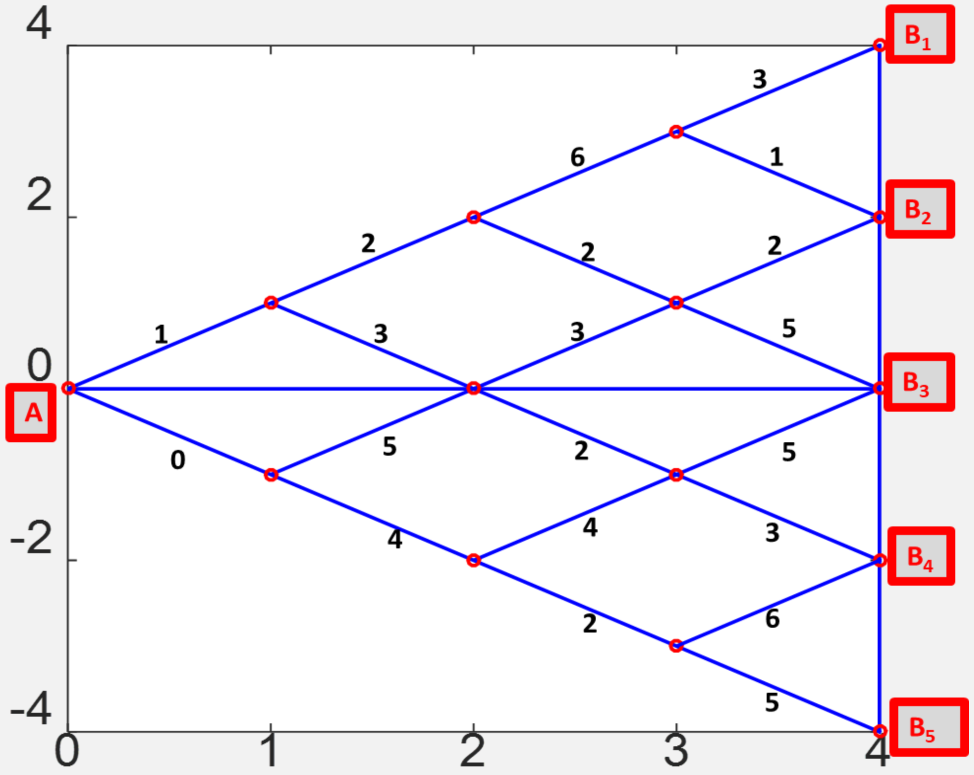
- Για $\boldsymbol{x = 2}$:

$$f(2,2,0) = \alpha(2,2) + min\{f(3,3,0) + 2, f(3,3,1)\}$$
$$= 6 + min\{5,1\} = 7$$

$$\boldsymbol{f(2,2,1)} = \delta(2,2) + min\{\boldsymbol{f(3,1,0)}, f(3,1,1) + 2\}$$
$$= 2 + min\{2,7\} = \boldsymbol{4}$$

$$f(2,0,0) = a(2,0) + min\{f(3,1,0) + 2, f(3,1,1)\}$$
$$= 3 + min\{4,5\} = 7$$

$$f(2,0,1) = \delta(2,0) + min\{f(3,-1,0), f(3,-1,1) + 2\}$$
$$= 2 + min\{5,5\} = 7$$



$$f(2,-2,0) = a(2,-2) + min\{f(3,-1,0) + 2, f(3,-1,1)\} = 4 + min\{7,3\} = 7$$

$$f(2,-2,1) = \delta(2,-2) + min\{f(3,-3,0), f(3,-3,1) + 2\} = 2 + min\{6,7\} = 8$$

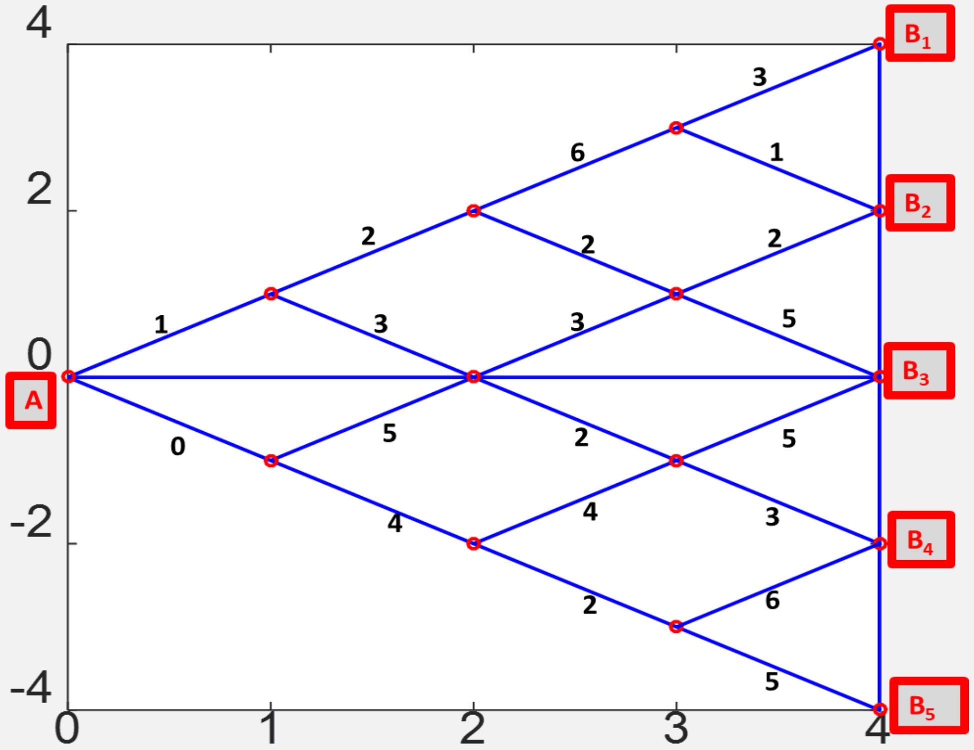
- Για $\boldsymbol{x = 1}$:

$$\boldsymbol{f(1,1,0)} = a(1,1) + min\{f(2,2,0) + 2, \boldsymbol{f(2,2,1)}\}$$
$$= 2 + min\{9,4\} = \boldsymbol{6}$$

$$f(1,1,1) = \delta(1,1) + min\{f(2,0,0), f(2,0,1) + 2\}$$
$$= 3 + min\{7,9\} = 10$$

$$f(1,-1,0) = a(1,-1) + min\{f(2,0,0) + 2, f(2,0,1)\}$$
$$= 5 + min\{9,7\} = 12$$

$$f(1,-1,1)$$
$$= \delta(1,-1) + min\{f(2,-2,0), f(2,-2,1) + 2\}$$
$$= 4 + min\{7,10\} = 11$$



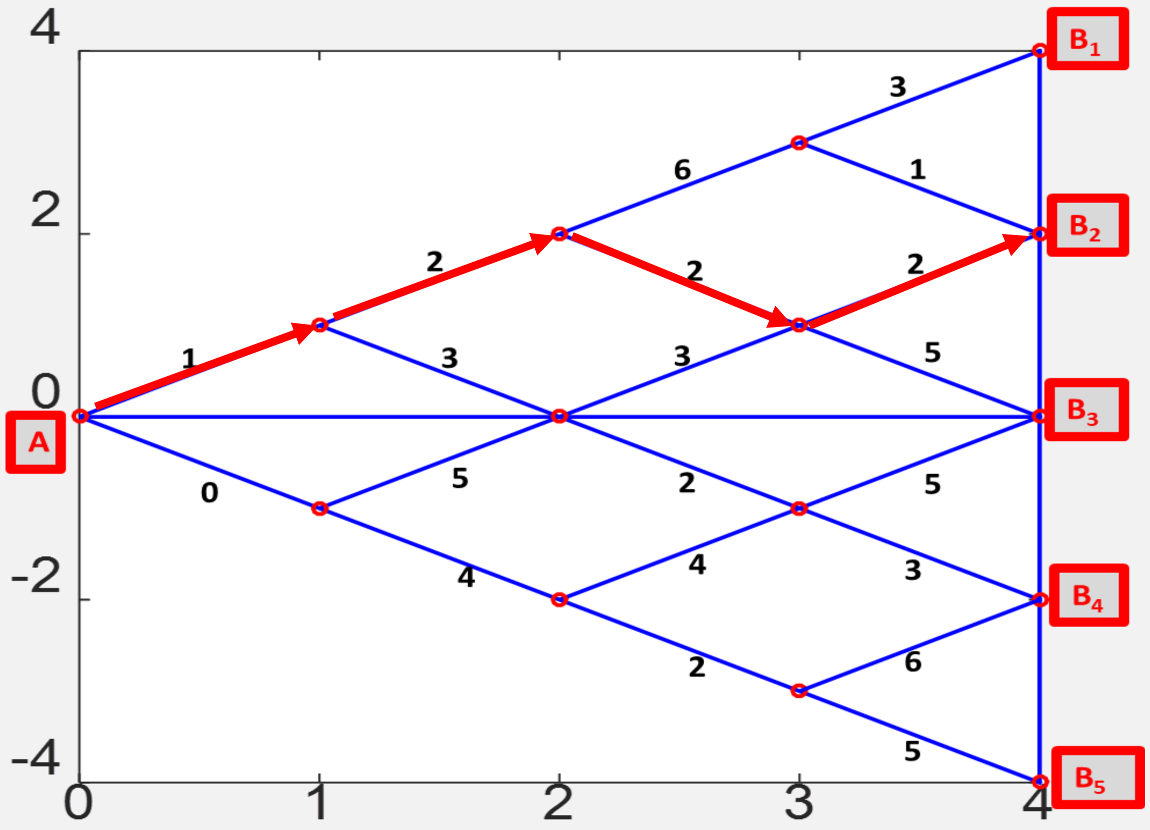
- Για $\boldsymbol{x = 0}$:

$$\boldsymbol{f(0,0,0)} = a(0,0) + min\{\boldsymbol{f(1,1,0)} + 2, f(1,1,1)\} = 1 + min\{8,10\} = \boldsymbol{9}$$

$$f(0,0,1) = \delta(0,0) + min\{f(1,-1,0), f(1,-1,1) + 2\} = 0 + min\{12,13\} = 12$$

Άρα η βέλτιστη διαδρομή, με ελάχιστο κόστος 9, είναι:

$$(\mathbf{0},\mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{1},\mathbf{1}) \rightarrow (\mathbf{2},\mathbf{2}) \rightarrow (\mathbf{3},\mathbf{1}) \rightarrow (\mathbf{4},\mathbf{2})$$



Βιβλιογραφία

1) Π.-Χ. Βασιλείου (2001) Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Ζήτη.
2) Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Ν. Τσάντας (1998) Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη.
3) Γ. Βασιλειάδης (2012) Σημειώσεις Δυναμικού Προγραμματισμού. Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ.