

Στοχαστικές Στρατηγικές

Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ

1^η ενότητα: Εισαγωγή στον Δυναμικό Προγραμματισμό

Παπάνα Αγγελική

Μεταδιδακτορική ερευνήτρια, ΑΠΘ & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

E-mail: angeliki.papana@gmail.com, agrapana@auth.gr

Webpage: <http://users.auth.gr/agrapana>

Προτεινόμενο σύγγραμμα

Π.-Χ. Βασιλείου, Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός,
Ζήτη Πελαγία & Σια Ι.Κ.Ε, 2001.

Κωδικός στον Εύδοξο: **11031**

Βιβλίο ασκήσεων

Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Ν. Τσάντας (2003). Ασκήσεις στην
Επιχειρησιακή Έρευνα, Τόμος 2, Ζήτη.

- ❑ Η εξεταστέα ύλη συμπίπτει με την διδασκτέα ύλη.
- ❑ Θα δίνονται προαιρετικές ασκήσεις κατά την διάρκεια του εξαμήνου για την καλύτερη κατανόηση της ύλης του μαθήματος.
- ❑ Πληροφορίες για το μάθημα καθώς και οι διαλέξεις κάθε μαθήματος θα ανακοινώνονται στο **eLearning** και στην ιστοσελίδα μου: **<http://users.auth.gr/agrapana>**

Επιχειρησιακή έρευνα

**Δυναμικός
Προγραμματισμός**



**Λήψη
αποφάσεων**

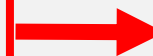
Σκοπός του μαθήματος

Μεθοδολογία **Δυναμικού Προγραμματισμού (ΔΠ)**

Τεχνικές επίλυσης προβλημάτων, τα οποία χαρακτηρίζονται από **διαδοχικές αλληλεξαρτώμενες αποφάσεις**, όπου η κάθε απόφαση επηρεάζει μεταγενέστερες αποφάσεις.

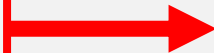
μεθοδολογία

Παραδείγματα /
εφαρμογές



**Αναγκαιότητα /
χρησιμότητα ΔΠ** στην
αντιμετώπιση
προβλημάτων της
**Επιχειρησιακής
Έρευνας**

**Δυναμικός
Προγραμματισμός**



Προβλήματα βελτιστοποίησης:
εύρεση ακροτάτων, μεγιστοποίηση
ή ελαχιστοποίηση συναρτήσεων

Χαρακτηριστικά προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού

- **Δεδομένα σε μορφή πλέγματος**
- **Τυχαίες μεταβλητές (στοχαστικότητα)**
- **Άγνωστη η συνάρτηση βελτιστοποίησης**

~~Γραμμικός / ακέραιος
Προγραμματισμός~~

~~Μαθηματική
ανάλυση~~

Η έννοια του Δυναμικού Προγραμματισμού

Ο **Δυναμικός Προγραμματισμός** εισήχθη το 1953 από τον Richard E. Bellman για να εφαρμοστεί σε προβλήματα βέλτιστου ελέγχου στον τομέα της Μηχανικής.

Το πρώτο συνθετικό, το «**Δυναμικός**», υποδηλώνει την χρονικά μεταβαλλόμενη φύση της διαδικασίας του Δυναμικού Προγραμματισμού, καθώς συμβαίνει σε πολλαπλά διαδοχικά στάδια.

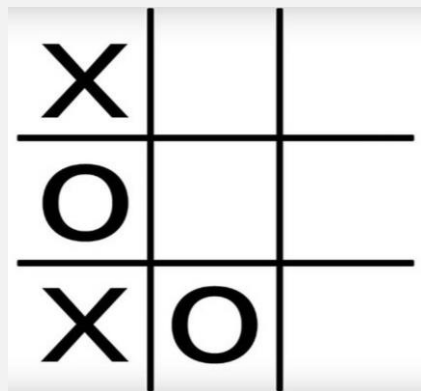
Το δεύτερο συνθετικό, το «**Προγραμματισμός**», προέρχεται από τον όρο «μαθηματικός προγραμματισμός» - ένα συνώνυμο για τη βελτιστοποίηση.

Η έννοια του προβλήματος

Η έννοια του προβλήματος είναι διαισθητικά γνωστή σε όλους: υπάρχει μια **δεδομένη κατάσταση (αρχική)**, υπάρχει μια **επιθυμητή κατάσταση (τελική)** και διαθέσιμες ενέργειες που πρέπει να γίνουν ώστε να προκύψει η επιθυμητή κατάσταση.

Ορισμένα απλά ή πιο σύνθετα προβλήματα:

Τρίλιζα



Σκάκι



Ο **Δυναμικός Προγραμματισμός** είναι μία υπολογιστική μέθοδος η οποία εφαρμόζεται όταν πρόκειται να ληφθεί μία σύνθετη απόφαση (λήψη απόφασης), η οποία προκύπτει από τη σύνθεση επιμέρους αποφάσεων που αλληλεξαρτώνται.

αλληλεξάρτηση

```
graph TD; A[αλληλεξάρτηση] --> B[Οι αποφάσεις παρουσιάζουν χρονική διαδοχή π.χ. αναζήτησης της συντομότερης διαδρομής]; A --> C[Οι αποφάσεις συνδέονται με κοινούς περιορισμούς π.χ. κατανομή περιορισμένων πόρων μεταξύ ανταγωνιστικών δραστηριοτήτων];
```

Οι αποφάσεις παρουσιάζουν χρονική διαδοχή
π.χ. αναζήτησης της συντομότερης διαδρομής

Οι αποφάσεις συνδέονται με κοινούς περιορισμούς
π.χ. κατανομή περιορισμένων πόρων μεταξύ ανταγωνιστικών δραστηριοτήτων

Ορισμός Δυναμικού Προγραμματισμού

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός είναι η μαθηματική θεωρία των πολυσταδιακών αποφάσεων, που αναφέρεται στην βελτιστοποίηση της λειτουργίας τους βάσει κάποιου επιλεγμένου κριτηρίου, γνωστού ως συνάρτηση κόστους ή αντικειμενικής συνάρτησης.

Οι μεταβλητές σε ένα πρόβλημα μπορεί να είναι:

- αιτιοκρατικές, δηλαδή έχουν μια συγκεκριμένη τιμή κάθε χρονική στιγμή ή
- τυχαίες ή πιθανολογικές, οπότε δεν έχουν συγκεκριμένη τιμή αλλά γνωρίζουμε την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας των τιμών τους.

Πολυσταδιακή διαδικασία αποφάσεων

Απαιτείται μια αλληλουχία διαδοχικών αποφάσεων.

Μια τέτοια αλληλουχία διαδοχικών αποφάσεων ονομάζεται «πολιτική».

Βέλτιστη πολιτική είναι εκείνη που **βελτιστοποιεί** (μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί) την τιμή της επιλεγμένης **αντικειμενικής συνάρτησης** της διαδικασίας.

Η βασική ιδέα του Δυναμικού Προγραμματισμού

Η βασική ιδέα του **Δυναμικού Προγραμματισμού** είναι ότι μπορούμε να χωρίσουμε κατάλληλα το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε σε τόσα **υπο-προβλήματα**, όσες είναι και οι **άγνωστες μεταβλητές** του και να προσδιορίζουμε κάθε φορά την τιμή μιας μόνο μεταβλητής.

Για παράδειγμα, αντί να έχουμε ένα πρόβλημα με τρεις μεταβλητές, σχηματίζουμε τρία αλληλοσυνδεόμενα υπο-προβλήματα με μία μεταβλητή στο καθένα.

Χαρακτηριστικά Δυναμικού Προγραμματισμού

- Οι **αποφάσεις** λαμβάνονται διαδοχικά.
- Το πρόβλημα μπορεί να διαιρεθεί σε **βήματα (φάσεις)** και σε κάθε βήμα απαιτείται να ληφθεί μία **«στρατηγική» απόφαση**.
- Κάθε βήμα έχει ένα ορισμένο αριθμό **«καταστάσεων»** που συνδέονται με αυτό.
- Το αποτέλεσμα μίας στρατηγικής απόφασης που λαμβάνεται σε κάθε βήμα είναι να μετατρέπει την παρούσα κατάσταση σε μία κατάσταση που συνδέεται με το επόμενο βήμα.
- Με κάθε **απόφαση** συνδέεται ένα κέρδος ή μία ζημία (κόστος).

Χαρακτηριστικά Δυναμικού Προγραμματισμού

- Ο αντικειμενικός σκοπός είναι να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος ή να ελαχιστοποιηθεί η συνολική ζημία, δηλαδή να επιτευχθεί το βέλτιστο αποτέλεσμα.
- Οι αποφάσεις που παίρνονται σε κάθε βήμα εξαρτώνται μόνον από την κατάσταση του προηγούμενου βήματος και όχι από τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιήθηκε το βήμα αυτό.

Αρχή βελτιστοποίησης

Η μεθοδολογία του δυναμικού προγραμματισμού βασίζεται στην **αρχή της βελτιστοποίησης**.

Σύμφωνα με τον **Bellman**:

«**Μία βέλτιστη πολιτική έχει την ιδιότητα ότι οποιαδήποτε και αν είναι η αρχική κατάσταση της διαδικασίας και η αρχική απόφαση, οι αποφάσεις που εναπομένουν πρέπει να συνιστούν μια βέλτιστη πολιτική σε σχέση με την κατάσταση που είναι αποτέλεσμα της πρώτης απόφασης**».

Κύριο χαρακτηριστικό του **Δυναμικού Προγραμματισμού** είναι ότι **δεν** υπάρχει γενικευμένη διατύπωση της μεθόδου για την επίλυση όλων των προβλημάτων.

Η μέθοδος της αντίστροφης λύσης

Πολλές φορές στα προβλήματα του **Δυναμικού Προγραμματισμού** γνωρίζουμε ή μπορούμε να καθορίσουμε την τελική κατάσταση της διαδικασίας που θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε και για το λόγο αυτό η αρίθμηση των σταδίων της πολυσταδιακής διαδικασίας γίνεται κατά την αντίστροφη φορά, δηλαδή από το τέλος του προβλήματος που εξετάζουμε προς την αρχή του.

Το μοντέλο λύσης

Η μεθοδολογία του **Δυναμικού Προγραμματισμού** έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- ❑ Χωρίζουμε το πρόβλημά μας σε τόσα **στάδια** όσες και οι **αποφάσεις** που θα πρέπει στο τέλος να ληφθούν.
- ❑ Ξεκινάμε από το **πρώτο** ή **τελευταίο στάδιο απόφασης** και προχωρούμε **αντίστροφα** δηλαδή προς το τέλος ή την αρχή του προβλήματος.
- ❑ Σε **κάθε στάδιο** υπολογίζουμε την **καλύτερη δυνατή απόφαση**, από οποιαδήποτε θέση αυτού του σταδίου, μέχρι τον τελικό προορισμό, την λύση του προβλήματος.

Υπολογιστικό κόστος – Χρησιμότητα

Η λύση των υπο-προβλημάτων αποτελεί κυρίως το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου, το οποίο αν και είναι σημαντικό, είναι πολύ μικρότερο από το κόστος της πλήρους απαρίθμησης και αξιολόγησης όλων των δυνατών λύσεων.

Η μεθοδολογία του **Δυναμικού Προγραμματισμού** είναι απαραίτητη για την επίλυση προβλημάτων τα οποία δεν μπορούν να αντιμετωπισθούν με μεθόδους του **Γραμμικού / Ακέραιου Προγραμματισμού** και της **Μαθηματικής Ανάλυσης**:

- **Δεδομένα σε μορφή πλέγματος**
- **Τυχαίες μεταβλητές**
- **Δεν υπάρχει αναλυτική μορφή για την συνάρτηση βελτιστοποίησης**

Οι μέθοδοι του **Δυναμικού Προγραμματισμού** είναι οι μόνες μέθοδοι από τον κλάδο της **Επιχειρησιακής έρευνας** που μπορούν να επεκταθούν σε **στοχαστικά προβλήματα** με **τυχαίες μεταβλητές** και άρα να εφαρμοστούν σε **ρεαλιστικά προβλήματα των Επιχειρήσεων**:

- Δρομολόγια περιοδευόντων πωλητών π.χ. ιατρικών επισκεπτών
- Πρόβλημα σχεδιασμού παραγωγής
- Πρόβλημα κατανομής εργασίας / μεγέθους εργατικού δυναμικού
- Πρόβλημα αντικατάστασης εξοπλισμού, π.χ. μηχανολογικού
- Εφοδιαστική αλυσίδα (λήψη αποφάσεων σχετικά με τη μεταφορά και αποθήκευση προϊόντων)

- **Ναυτιλιακές εταιρείες:** Το πρόβλημα βέλτιστης φόρτωσης πλοίων
- **Εταιρείες επεξεργασίας των Επικίνδυνων / Μολυσματικών Αποβλήτων** (λήψη αποφάσεων σχετικά με τα δρομολόγια)

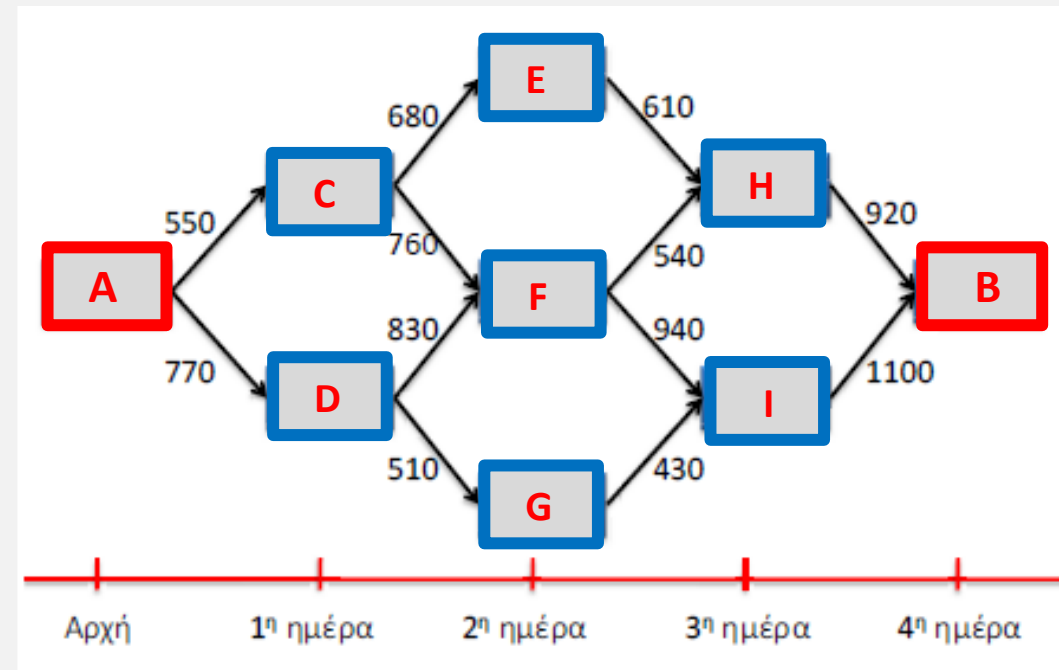
**Βασικά προβλήματα
Δυναμικού Προγραμματισμού**

1. Στοιχειώδη προβλήματα διαδρομής

Τα προβλήματα διαδρομής είναι κλασσικές εφαρμογές της μεθοδολογίας του **Δυναμικού Προγραμματισμού** και προσφέρονται για να παρουσιαστούν οι αρχές του.

Παράδειγμα

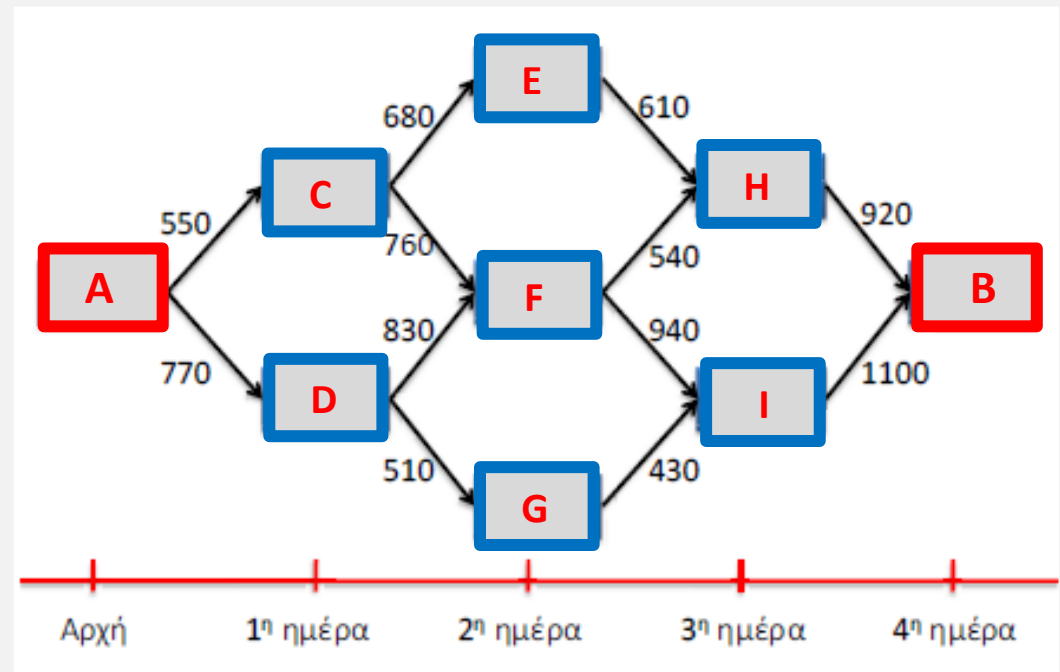
Ας υποθέσουμε ότι είμαστε στην πόλη A και θέλουμε να πάμε στην πόλη B. Ο διπλανός χάρτης δείχνει όλες τις πιθανές διαδρομές ακολουθώντας τα τόξα.



Τα νούμερα που είναι σημειωμένα στα τόξα αντιπροσωπεύουν τα χιλιόμετρα, αλλά θα μπορούσε να είναι κάποιο άλλο μέγεθος που μας ενδιαφέρει, π.χ. χρόνος ή έξοδα.

Το πρόβλημα

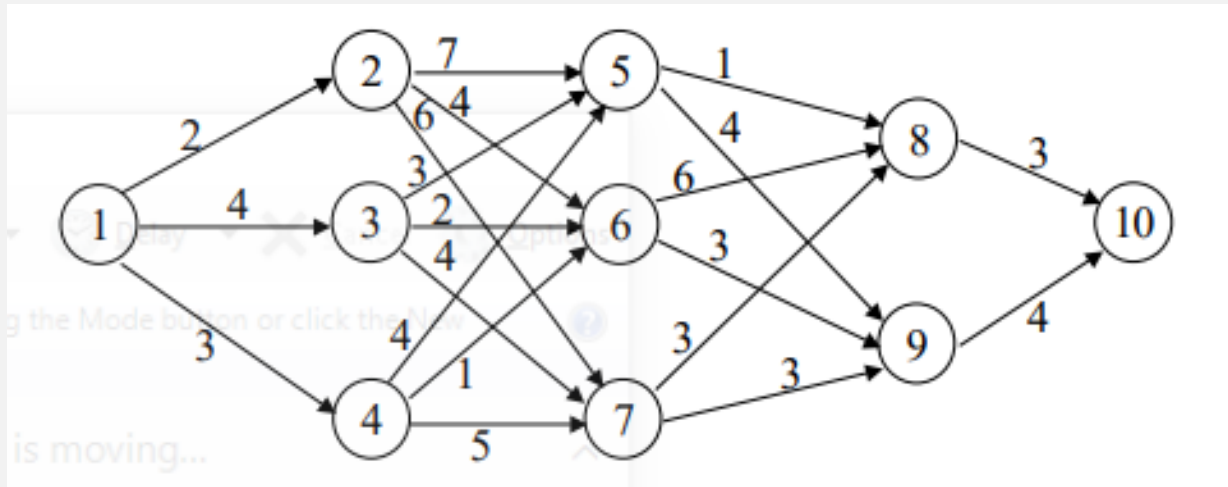
Πρέπει να βρούμε ποια είναι η βέλτιστη διαδρομή, δηλαδή θέλουμε να βρούμε ποια είναι η διαδρομή με τα λιγότερα χιλιόμετρα (ή αντίστοιχα με τον λιγότερο χρόνο ή τα λιγότερα έξοδα).



Σημείωση

θα πρέπει να σημειωθεί ότι η επιλογή της φθηνότερης διαδρομής σε κάθε διαδοχικό στάδιο δε δίνει απαραίτητα τη συνολική βέλτιστη απόφαση. Ακολουθώντας αυτή την στρατηγική θα έχουμε την διαδρομή $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10$ με συνολικό κόστος 13.

Όμως μια μικρή θυσία σε ένα στάδιο μπορεί να δώσει μεγαλύτερες οικονομίες στα επόμενα.



Το ελάχιστο κόστος των βέλτιστων διαδρομών είναι 11:

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 10$

$1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 10$

$1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10$

2. Στοχαστικά προβλήματα διαδρομής

Μια διαδικασία ονομάζεται στοχαστική αν η εξέλιξη της δεν είναι γνωστή με βεβαιότητα, αλλά συνυπάρχουν μέσα της διάφορες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες μεταφέρουν την αβεβαιότητα στο πρόβλημα.

Σε μια ρεαλιστική αντιμετώπιση των προβλημάτων που παρουσιάζονται στην ζωή, πρέπει να εντοπίζονται και να αντιμετωπίζονται όλες οι τυχαίες μεταβλητές.

Ο **στοχαστικός γραμμικός προγραμματισμός** αποτελεί μια προσέγγιση σε πρόβλημα βελτιστοποίησης υπό συνθήκες αβεβαιότητας.

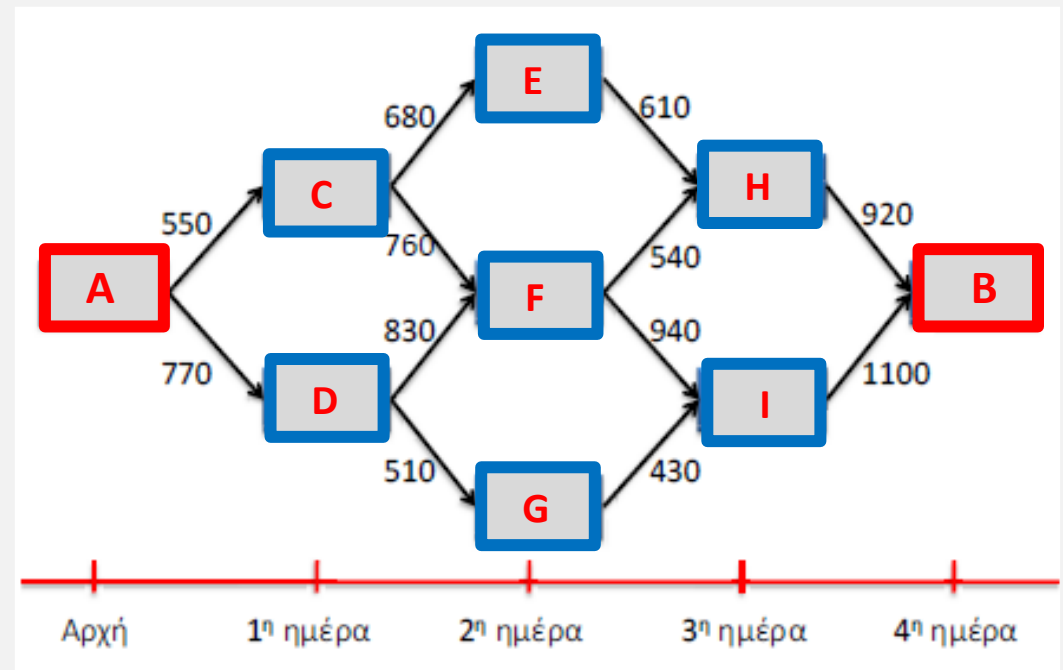
Το **στοιχειώδες πρόβλημα διαδρομής** που αναφέραμε πριν μετατρέπεται σε **στοχαστικό πρόβλημα διαδρομής** αν εισάγουμε μια τυχαία μεταβλητή.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι είμαστε στην πόλη A και θέλουμε να πάμε στην πόλη B. Ο χάρτης δείχνει όλες τις πιθανές διαδρομές ακολουθώντας τα τόξα. Υποθέτουμε όμως, ότι αν δώσουμε σε κάποιον οδηγίες για το ποια είναι η βέλτιστη διαδρομή, τότε **ακολουθεί την σωστή διεύθυνση με πιθανότητα 0.75**.

Το πρόβλημα

Ποια είναι η πολιτική που πρέπει να προτιμηθεί ώστε το αναμενόμενο «**κόστος**» να είναι **ελάχιστο**.



3. Αντικατάσταση εργαλείων

- Έστω ότι έχουμε ένα εργαλείο, το οποίο χάνει την λειτουργικότητα του με τον καιρό.



- Υποθέτουμε ότι χρειαζόμαστε ένα αντίστοιχο εργαλείο για τις επόμενες T χρονικές στιγμές.
- Αν στο ενδιάμεσο διάστημα αντικαταστήσουμε το εργαλείο, παίρνουμε την αξία του ανάλογα με την ηλικία του.
- Μετά από T χρονικές στιγμές πουλάμε το εργαλείο και παίρνουμε μια τιμή ανάλογα με την ηλικία του.
- Τέλος, υποθέτουμε ότι το **κόστος λειτουργίας** του εργαλείου είναι συνάρτηση της **ηλικίας** του.

Το πρόβλημα

Αν και ποια χρονική στιγμή πρέπει να αντικατασταθεί το εργαλείο έτσι ώστε το **ολικό κόστος** να είναι **ελάχιστο**.

4. Στοχαστικά προβλήματα αντικατάστασης εργαλείων

Το πρόβλημα της αντικατάστασης εργαλείων μετατρέπεται σε **στοχαστικό** αν υποθέσουμε ότι:

- Ο χρόνος χρήσης του εργαλείου, T , είναι μια τυχαία μεταβλητή.
- Το κόστος χρήσης σε κάθε χρονική περίοδο είναι επίσης μια τυχαία μεταβλητή.
- Υπάρχει το **ενδεχόμενο** της **καταστροφής** του εργαλείου και κατά συνέπεια της απρόβλεπτης **αντικατάστασης** του.

Το πρόβλημα

Αν και ποια χρονική στιγμή πρέπει να **αντικατασταθεί** το εργαλείο έτσι ώστε το **ολικό κόστος** να είναι **ελάχιστο**.

5. Το πρόβλημα της κατανομής υλικού

Έστω ότι διαθέτουμε Y μονάδες από ένα υλικό και ότι πρέπει να το μοιράσουμε σε K δραστηριότητες.

Από τις δραστηριότητες αυτές γνωρίζουμε ότι **για κάθε ποσότητα** $y = 0, 1, \dots, Y$ που τοποθετείται στην δραστηριότητα i , έχουμε σαν επιστροφή $f_i(y)$ μια γνωστή **αύξουσα συνάρτηση** του y .

Το πρόβλημα

Πως μπορούμε να μοιράσουμε το **υλικό** στις διάφορες **δραστηριότητες** έτσι ώστε η **ολική επιστροφή** να είναι **μέγιστη**.

Δηλαδή έχουμε να λύσουμε το μαθηματικό πρόβλημα

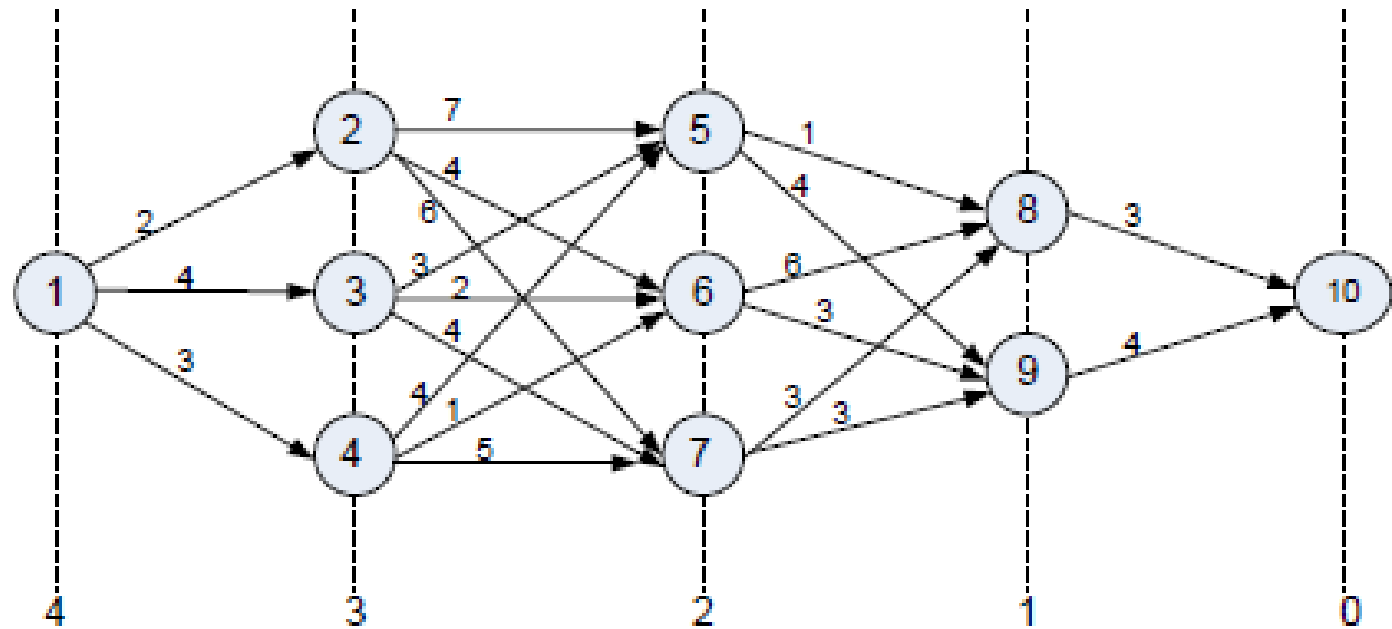
$$\max_{y_1, \dots, y_n} F(y)$$

με τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις

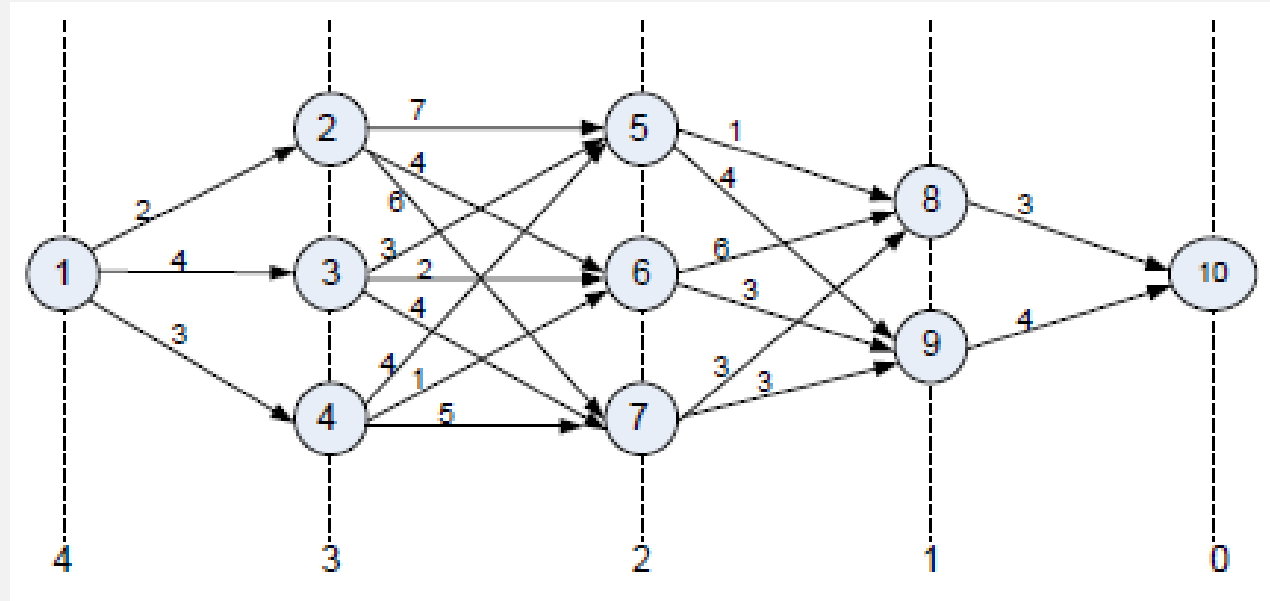
- $y_i, i = 1, \dots, K$: μη αρνητικοί ακέραιοι
- $\sum_{i=1}^K y_i = Y$
- $F(y) = F(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^K f_i(y_i)$

6. Το γενικό πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής

Έστω ένα **δικτυωτό** όπως το παρακάτω όπου υπάρχουν αριθμημένοι **κόμβοι** από το 1 ως το 10.



Οι **δυνατές πορείες** από τον έναν κόμβο στον άλλο σημειώνονται με **τόξα**.



Το πρόβλημα

Ποιά είναι η **διαδρομή** με την **ελάχιστη απόσταση** μεταξύ του **πρώτου** και του **τελευταίου κόμβου**.

7. Το πρόβλημα του βέλτιστου φορτίου

Έστω W το μέγιστο δυνατό φορτίο που μπορεί να μεταφέρει ένα μεταφορικό μέσο.

Έστω ότι θέλουμε να μεταφέρουμε n είδη αντικειμένων.

Έστω u_i η αξία του ενός κομματιού του είδους i και w_i το βάρος του.

Έστω $x_i, i = 1, \dots, n$ τα κομμάτια του είδους i που θα πρέπει να φορτώσουμε (άρα x_i ακέραιοι αριθμοί).

Το πρόβλημα

Ποιες είναι οι ποσότητες κάθε είδους i που πρέπει να φορτωθούν έτσι ώστε η αξία του φορτίου να είναι μέγιστη.

Δηλαδή έχουμε να λύσουμε το μαθηματικό πρόβλημα

$$\max_{x_1, \dots, x_n} \sum_{i=1}^n x_i u_i$$

με τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις

- $x_i, i = 1, \dots, n$: ακέραιοι
- $\sum_{i=1}^n x_i w_i \leq W$

8. Προβλήματα παραγωγής και αποθήκευσης

Αποτελεί το κεντρικό πρόβλημα κάθε παραγωγικής μονάδας εμπορικών ή άλλων προϊόντων.

Σε κάθε χρονική περίοδο η παραγωγική μονάδα έχει μια **πεπερασμένη δυνατότητα παραγωγής** και μια **πεπερασμένη δυνατότητα αποθήκευσης** των προϊόντων.

Την ίδια χρονική περίοδο, υπάρχει μια **ζήτηση του προϊόντος** από την αγορά, η οποία πρέπει να ικανοποιηθεί.

Το πρόβλημα

- **Πότε** πρέπει να δοθεί μια εντολή παραγωγής ενός προϊόντος;
- **Τι ποσότητα** πρέπει να παραχθεί;

Η απάντηση των δύο αυτών ερωτημάτων γίνεται με βάση την **ελαχιστοποίηση του κόστους.**

Μερικά από τα **είδη κόστους:**

- **Κόστος παραγγελίας**
(κόστος προετοιμασίας για την έναρξη παραγωγής)
- **Κόστος αγοράς μονάδας προϊόντος**
(κόστος ανθρώπινου δυναμικού, απόσβεση μηχανημάτων, κόστος υλικού παραγωγής κτλ)
- **Κόστος αποθήκευσης μονάδας προϊόντος**
(συντήρηση αποθήκευσης, φορολογία αποθηκευμένων προϊόντων, ασφάλιση από κλοπή κτλ)

9. Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων

Είναι μια κλάση προβλημάτων που εμφανίζουν την μεγαλύτερη δυναμική εφαρμογών σε πραγματικά προβλήματα. Συνδυάζουν τις μεθόδους **Δυναμικού Προγραμματισμού** και τις **Μαρκοβιανές Αλυσίδες**.

Μαρκοβιανή αλυσίδα ονομάζουμε ένα μαθηματικό σύστημα που μεταβάλλεται από μια κατάσταση σε μια άλλη, ανάμεσα σε ένα πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων.

Είναι μια τυχαία διαδικασία που δε διατηρεί μνήμη για τις προηγούμενες μεταβολές: **Η επόμενη κατάσταση εξαρτάται μόνο από την τωρινή κατάσταση και όχι από αυτές που προηγήθηκαν**. Αυτό το συγκεκριμένο είδος "αμνησίας" ονομάζεται **μαρκοβιανή ιδιότητα**.

Παράδειγμα

Ένας εκδότης εφημερίδας εξετάζει αν η κυκλοφορία της εφημερίδας του είναι ικανοποιητική ή όχι ώστε να αποφασίσει αν θα συνεχίσει την κυκλοφορία της χωρίς καμία αλλαγή ή αν θα καταφύγει στην διαφήμιση.

Βιβλιογραφία

- 1) Π.-Χ. Βασιλείου (2001) Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Ζήτη.
- 2) Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Ν. Τσάντας (1998) Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη.
- 3) Γ. Βασιλειάδης (2012) Σημειώσεις Δυναμικού Προγραμματισμού. Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ.