Στοχαστικές Στρατηγικές

Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ

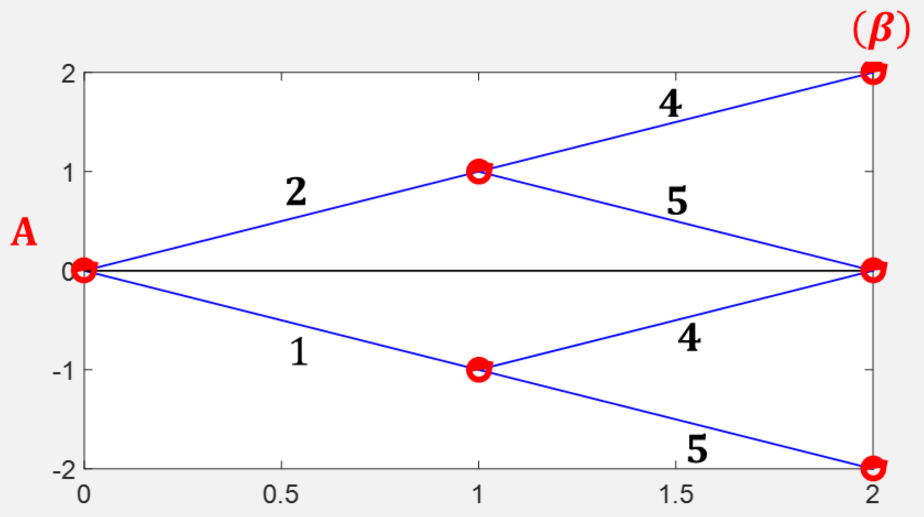
ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Παπάνα Αγγελική

Μεταδιδακτορική ερευνήτρια, ΑΠΘ & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας
E-mail: angeliki.papana@gmail.com, agpapana@auth.gr
Webpage: http://users.auth.gr/agpapana

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται το παρακάτω δικτυωτό. Να βρεθεί με τη μέθοδο του βέλτιστου με επαναπληροφόρηση ελέγχου, το πρόβλημα διαδρομής μέγιστου κέρδους από το σημείο Α ως την ευθεία (β). Μια εντολή εκτελείται με πιθανότητα 0.1 και δεν εκτελείται με πιθανότητα 0.9. Οι τιμές στα τόξα παριστάνουν κέρδος. Επιπλέον, υπάρχει κόστος 2 μονάδων αν καταλήξουμε στον κόμβο (2,0).



ΛΥΣΗ

Βέλτιστη συνάρτηση

$f(x,y)$={Το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος από τον κόμβο (x,y) μέχρι το τέλος }

Επαναληπτική σχέση

Εντολή κίνησης: αριστερά

$$f(x,y) = \max\{p[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}+\mathbf{1})] + (1-p)\,[\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}-\mathbf{1})],$$
$$p[\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}-\mathbf{1})] + (1-p)\,[\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}+\mathbf{1})]\}$$

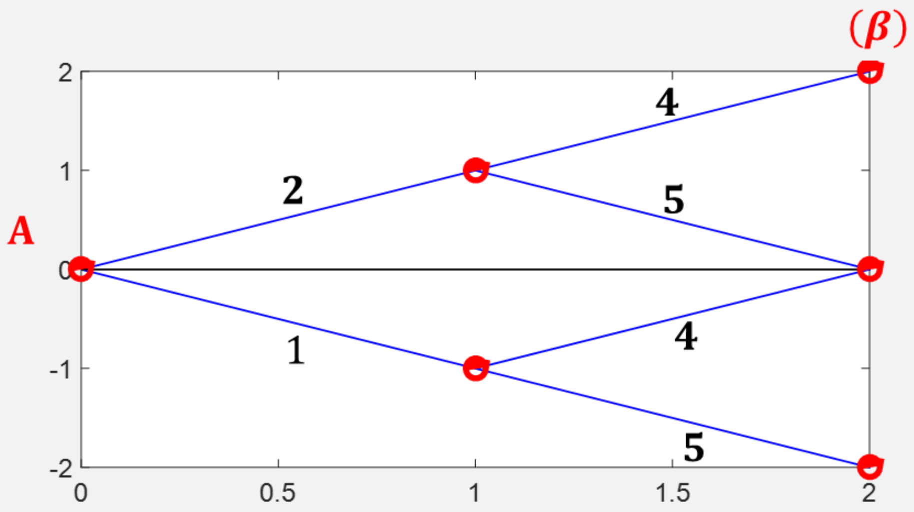
Εντολή κίνησης: δεξιά

Οριακές συνθήκες

$f(2,2)=0$

$f(2,0)=-2$

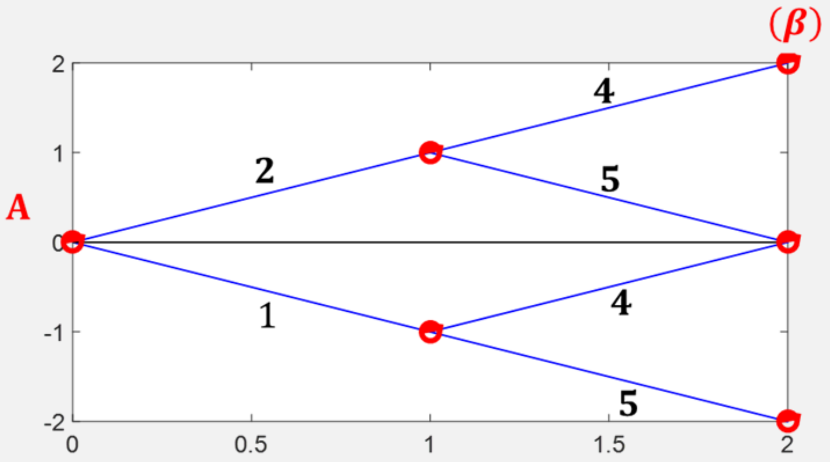
$f(2,-2)=0$



- Για x=1

$$f(1,1) = \max\{p[\boldsymbol{\alpha}(1,1)+\boldsymbol{f}(2,2)] + (1\text{-}p)\,[\delta(1,1)+\boldsymbol{f}(2,0)],$$
$$p[\delta(1,1)+\boldsymbol{f}(2,0)] + (1\text{-}p)\,[\alpha(1,1)+\boldsymbol{f}(2,2)]\}$$
$$= \max\{0.1(4+0) + 0.9\,(5\text{-}2),\ 0.1(5\text{-}2) + 0.9\,(4+0)\} = \max\{3.1,\ \underline{\mathbf{3.9}}\} = \mathbf{3.9}$$

$$f(1,\text{-}1) = \max\{p[\boldsymbol{\alpha}(1,\text{-}1)+\boldsymbol{f}(2,0)] + (1\text{-}p)\,[\delta(1,\text{-}1)+\boldsymbol{f}(2,\text{-}2)],$$
$$p[\delta(1,\text{-}1)+\boldsymbol{f}(2,\text{-}2)] + (1\text{-}p)\,[\alpha(1,\text{-}1)+\boldsymbol{f}(2,0)]\}$$
$$= \max\{0.1(4\text{-}2) + 0.9\,(5+0),\ 0.1(5+0) + 0.9\,(4\text{-}2)\} = \max\{\underline{\mathbf{4.7}},\ 2.3\} = \mathbf{4.7}$$



- Για x=0

$$f(0,0) = \max\{p[\boldsymbol{a}(0,0)+\boldsymbol{f}(1,1)] + (1\text{-}p)\,[\delta(0,0)+\boldsymbol{f}(1,\text{-}1)],$$
$$p[\delta(0,0)+\boldsymbol{f}(1,\text{-}1)] + (1\text{-}p)\,[\alpha(0,0)+\boldsymbol{f}(1,1)]\}$$

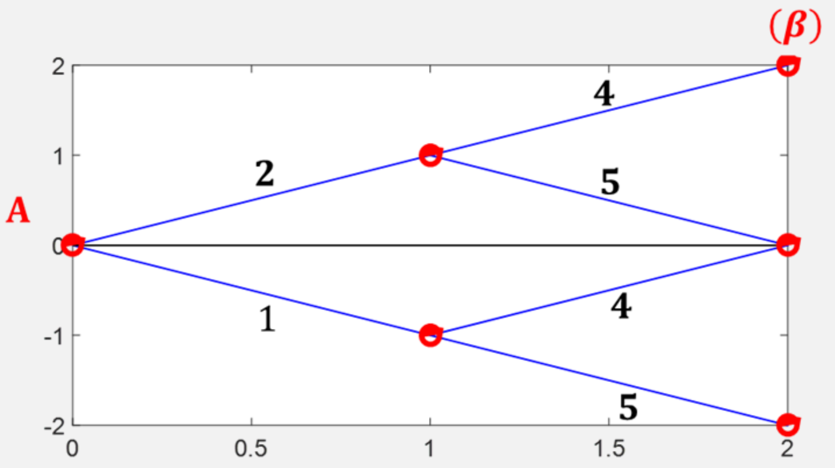
$$= \max\{0.1(2+3.9) + 0.9\,(1+4.7),\ 0.1\,(1+4.7) + 0.9\,(2+3.9)\}$$
$$=\max\{5.72,\ \underline{\mathbf{5.88}}\} = \mathbf{5.88}$$

Βέλτιστη πολιτική εντολών

(0,0) : κίνηση προς δεξιά

(1,1): κίνηση προς δεξιά

(1,-1): κίνηση προς αριστερά



Άσκηση Σε στοχαστικό πρόβλημα αντικατάστασης εργαλείων δίνονται :

A: η τιμή αγοράς νέου εργαλείου, στην αρχή του χρόνου,

$\alpha(t)$: η τιμή ανταλλαγής, στην αρχή του χρόνου, εργαλείου που λειτουργεί, ηλικίας t στην αρχή του χρόνου, με ένα καινούριο,

$p(t)$: η πιθανότητα ένα εργαλείο ηλικίας t στην αρχή του χρόνου, να χαλάσει στο 1/3 του χρόνου,

$\delta(t)$: η τιμή επιδιόρθωσης ενός χαλασμένου εργαλείου ηλικίας t (στην αρχή του χρόνου) στο 1/3 του χρόνου,

$R_1(t)$: το κόστος λειτουργίας εργαλείου ηλικίας t στην αρχή του χρόνου, για το πρώτο 1/3 του χρόνου,

$R_2(t)$: το κόστος λειτουργίας εργαλείου ηλικίας t (στην αρχή του χρόνου), για τα τελευταία 2/3 του χρόνου, αν το εργαλείο χάλασε στο 1/3 του χρόνου και επιδιορθώθηκε,

$R_3(t)$: το κόστος λειτουργίας εργαλείου ηλικίας t (στην αρχή του χρόνου), για τα τελευταία 2/3 του χρόνου, αν το εργαλείο δεν χάλασε.

Χρειαζόμαστε το εργαλείο για T χρόνια και διαθέτουμε δικό μας εργαλείο ηλικίας 1 χρόνου. Ορίστε την βέλτιστη συνάρτηση, επαναληπτική σχέση και οριακές συνθήκες.

Ορίζουμε την **βέλτιστη συνάρτηση**:

$f(t,\tau)$ ={το **ελάχιστο αναμενόμενο κόστος** του εργαλείου από την αρχή του **χρόνου τ** μέχρι το **τέλος T**, δεδομένου ότι στην αρχή του χρόνου τ **διαθέτουμε δικό μας εργαλείο που λειτουργεί**

Άρα στην αρχή ενός χρόνου τ, έχουμε τις επιλογές:

1) Απόφαση: Αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: Συνεχίζουμε με το εργαλείο που διαθέτουμε

❑ Επαναληπτική σχέση:

$$\boldsymbol{f(t,\tau) = min}\{ \begin{array}{l} \mathrm{A} - \alpha(t) + R_1(0) + p(0)\big(\delta(0) + R_2(0) + f(1, \tau+1)\big) \\ +\big(1 - p(0)\big)(R_3(0) + f(1, \tau+1)), \end{array}$$

1) Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$\begin{array}{l} R_1(t) + p(t)\left(\delta(t) + R_2(t) + f(t+1, \tau+1)\right) \\ +(1 - p(t))(R_3(t) + f(t+1, \tau+1)) \end{array}$$

2) Απόφαση: συνεχίζουμε με το εργαλείο που έχουμε

Οριακές συνθήκες:

Ορίζονται για $\boldsymbol{\tau = T}$ (στην αρχή του τελευταίου χρόνου):

$$\boldsymbol{f(t,T) = min}\{\begin{matrix} \mathrm{A} - \alpha(t) + R_1(0) + p(0)\big(\delta(0) + R_2(0)\big) \\ +\big(1 - p(0)\big)(R_3(0)), \\ \\ R_1(t) + p(t)\,\big(\delta(t) + R_2(t)\big) + (1 - p(t))\big(R_3(t)\big) \end{matrix}$$

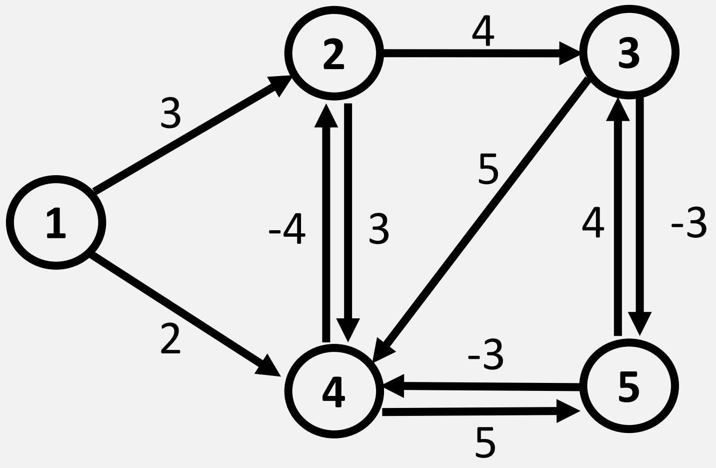
1) Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: συνεχίζουμε με το εργαλείο που έχουμε

$$\boldsymbol{f(t, T+1) = 0}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται το διπλανό δικτυωτό. Να βρεθεί η διαδρομή ελάχιστου κόστους από τον **κόμβο 1** στον **κόμβο 5** με **4 το πολύ βήματα** <u>χωρίς</u> να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των βημάτων.



<u>Λύση</u>

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των μειώσεων καθώς δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των βημάτων (λόγω εκφώνησης), ούτε η Dijkstra (λόγω αρνητικών τιμών).

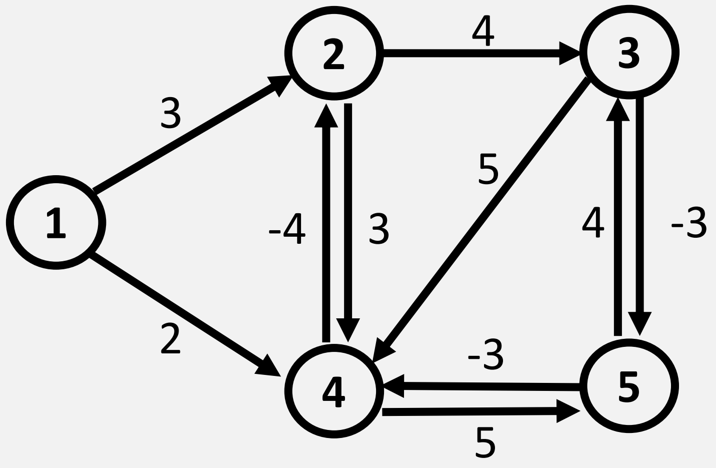
Αφού θέλουμε 4 βήματα, θεωρητικά μπορούμε να έχουμε το πολύ 2 μειώσεις. Σύμφωνα με το δικτυωτό όμως μπορούμε να έχουμε μόνο την μείωση $4 \rightarrow 2$. Άρα έχουμε το πολύ 1 μείωση.

Μια το πολύ μείωση σημαίνει:

$\boldsymbol{i-1=1 \Leftrightarrow i=2}$

Βέλτιστη συνάρτηση

$g_i(k) = \{$το μήκος της ελάχιστης διαδρομής από τον κόμβο $\mathbf{1}$ στον κόμβο $\boldsymbol{k}$, μεταξύ όλων των διαδρομών που έχουν $\boldsymbol{i-1}$ ή λιγότερες μειώσεις$\}$

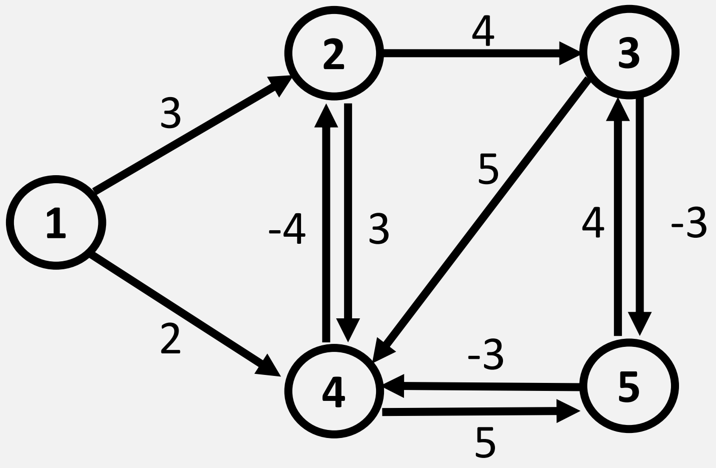


Επαναληπτική σχέση

$$\boxed{g_i(k) = min\begin{cases} min_{j<k}\{g_i(j) + a_{jk}\} \\ min_{j>k}\{g_{i-1}(j) + a_{jk}\} \end{cases}}$$

$$\boxed{g_i(1) = min_{j\geq 1}\{g_{i-1}(j) + a_{j1}\}}$$

Οριακές συνθήκες



$$\boxed{\boldsymbol{g_0(k)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \alpha\nu \;\; k = 1 \\ \infty, & \alpha\nu \;\; k \neq 1 \end{cases}}$$

- **Για $\boldsymbol{i = 0}$**

$$g_0(1) = 0$$

$$g_0(2) = g_0(3) = g_0(4) = g_0(5) = \infty$$

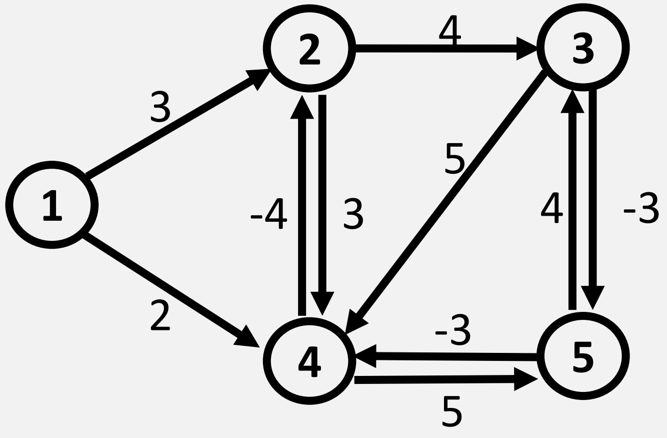
- **Για $\boldsymbol{i = 1}$**

$$\begin{aligned} g_1(1) &= \min\{g_0(1) + a_{11}, g_0(2) + a_{21}, g_0(3) + a_{31}, g_0(4) + a_{41}, g_0(5) + a_{51}\} \\ &= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0 \end{aligned}$$

$$g_1(2) = \min\begin{cases} \min\{g_0(3) + a_{32}, g_0(4) + a_{42}, g_0(5) + a_{52}\} \\ g_1(1) + a_{12} \end{cases} = \min\begin{cases} \min\{\infty, \infty, \infty\} \\ 0 + 3 \end{cases} = 3$$

$$g_1(3) = \min\begin{cases}\min\{g_0(4) + a_{43}, g_0(5) + a_{53}\} \\ \min\{g_1(1) + a_{13}, g_1(2) + a_{23}\}\end{cases} =$$

$$= \min\begin{cases}\infty, \infty \\ \min\{0 + \infty, 3 + 4\}\end{cases} = 7$$

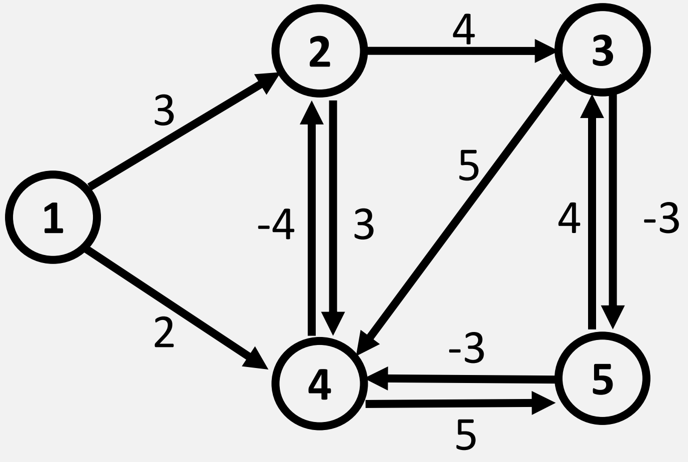


$$g_1(4) = \min\begin{cases}g_0(5) + a_{54} \\ \min\{g_1(1) + a_{14}, g_1(2) + a_{24}, g_0(3) + a_{34},\}\end{cases} =$$

$$= \min\begin{cases}\infty \\ \min\{0 + 2, 3 + 3, 7 + 5\}\end{cases} = 2$$

$$g_1(5) = \min\{g_1(1) + a_{15}, g_1(2) + a_{25}, g_1(3) + a_{35}, g_1(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, 3 + \infty, 7 + (-3), 2 + 5\} = 4$$

- **Για $i = 2$**



$$g_2(1) = \min\{g_1(1) + a_{11}, g_1(2) + a_{21}, g_1(3) + a_{31}, g_1(4) + a_{41}, g_1(5) + a_{51}\}$$
$$= \min\{0 + 0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

$$g_2(2) = \min\begin{cases}\min\{g_1(3) + a_{32}, g_1(4) + a_{42}, g_1(5) + a_{52}\}\\ g_2(1) + a_{12}\end{cases}$$
$$= \min\begin{cases}\min\{7 + \infty, 2 + (-4), 4 + \infty\}\\ 0 + 3\end{cases} = -2$$

$$g_2(3) = \min\begin{cases}\min\{g_1(4) + a_{43}, g_1(5) + a_{53}\}\\ \min\{g_2(1) + a_{13}, g_2(2) + a_{23}\}\end{cases} = \min\begin{cases}\min\{\infty, 4 + 4\}\\ \min\{\infty, -2 + 4\}\end{cases} = 2$$

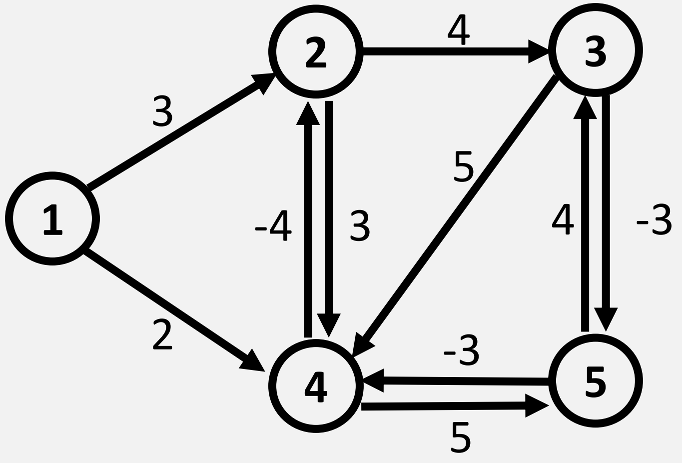
$$g_2(4) = \min\begin{cases}g_1(5) + a_{54}\\ \min\{g_2(1) + a_{14}, g_2(2) + a_{24}, g_2(3) + a_{34}\}\end{cases} = \min\begin{cases}4 - 3\\ \min\{2, -2 + 3, 2 + 5\}\end{cases}$$
$$= 1$$

$$g_2(5) = \min\{g_2(1) + a_{15}, g_2(2) + a_{25}, g_2(3) + a_{35}, g_2(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, -2 + \infty, 2 + (-3), 1 + 5\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, -1, 6\} = \mathbf{-1}$$ **ελάχιστο κόστος διαδρομής**

Άρα η βέλτιστη διαδρομή είναι:

$$\mathbf{1 \rightarrow \boxed{4 \rightarrow 2} \rightarrow 3 \rightarrow 5}$$

με μια μείωση



ΑΣΚΗΣΗ

Ζητείται η διαδρομή μέγιστου κέρδους από τον κόμβο 1 στον 5 με τρία ακριβώς βήματα και περνώντας το πολύ 1 φορά από τον κάθε κόμβο.

ΛΥΣΗ

Βέλτιστη συνάρτηση

$\boldsymbol{f_i(j, s(i))} = \{$η τιμή της βέλτιστης διαδρομής (μέγιστου κέρδους) από τον κόμβο **1** στον κόμβο $\boldsymbol{j}$, περνώντας από τους ενδιάμεσους κόμβους του συνόλου $\boldsymbol{s(i)}\}$

Επαναληπτική σχέση

$$\boxed{f_i(j, s(i)) = min_{k \in s(i)} \{f_{i-1}\big(k, s(i-1)\big) + a_{kj}\}}$$

Οριακές συνθήκες

$$\boxed{f_0(j, -) = a_{1j}}$$

i \ j	1	2	3	4	5
1	-	5	8	6	5
2	3	-	2	5	2
3	5	2	-	1	3
4	5	7	6	-	3
5	2	4	4	3	-

- Για $\boldsymbol{i = 0}$

  $f_0(2) = a_{12} = 5$

  $f_0(3) = a_{13} = 8$

  $f_0(4) = a_{14} = 6$

  $f_0(5) = a_{15} = 5$

- Για $\boldsymbol{i = 1}$ (έχουμε έναν ενδιάμεσο κόμβο)

$$\left.\begin{array}{l} f_1(2,\{3\}) = f_0(3) + a_{32} = 8 + 2 = 10 \\ f_1(2,\{4\}) = f_0(4) + a_{42} = 6 + 7 = 13 \end{array}\right\} \text{κόμβος } \mathbf{2}$$

i \ j	1	2	3	4	5
1	-	5	8	6	5
2	3	-	2	5	2
3	5	2	-	1	3
4	5	7	6	-	3
5	2	4	4	3	-

$$\left.\begin{aligned} f_1(3,\{2\}) &= f_0(2) + a_{23} = 5 + 2 = 7 \\ f_1(3,\{4\}) &= f_0(4) + a_{43} = 6 + 6 = 12 \end{aligned}\right\}$$ κόμβος **3**

$$\left.\begin{aligned} f_1(4,\{2\}) &= f_0(2) + a_{24} = 5 + 5 = 10 \\ f_1(4,\{3\}) &= f_0(3) + a_{34} = 8 + 1 = 9 \end{aligned}\right\}$$ κόμβος **4**

i \ *j*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	-	5	8	6	5
2	3	-	2	5	2
3	5	2	-	1	3
4	5	7	6	-	3
5	2	4	4	3	-

- Για $\boldsymbol{i = 2}$ (έχουμε δύο ενδιάμεσους κόμβους)

Αρκεί να βρώ το $f_2(5, s(2))$

$$f_2(5,\{2,3\}) = \max\{f_1(2,\{3\}) + a_{25}, f_1(3,\{2\}) + a_{35}\}$$
$$= \max\{10 + 2, 7 + 3\} = 12$$
$$f_2(5,\{2,4\}) = \max\{ f_1(2,\{4\}) + a_{25}, f_1(4,\{2\}) + a_{45}\}$$
$$= \max\{\mathbf{13 + 2}, \mathbf{10 + 5}\} = \mathbf{15}$$
$$f_2(5,\{3,4\}) = \max\{ f_1(3,\{4\}) + a_{35}, f_1(4,\{3\}) + a_{45}\}$$
$$= \max\{\mathbf{12 + 3}, 9 + 5\} = \mathbf{15}$$

Μέγιστο κέρδος

i \ j	1	2	3	4	5
1	-	5	8	6	5
2	3	-	2	5	2
3	5	2	-	1	3
4	5	7	6	-	3
5	2	4	4	3	-

Βέλτιστες διαδρομές

$\mathbf{1 \to 4 \to 3 \to 5}$

$\mathbf{1 \to 4 \to 2 \to 5}$

$\mathbf{1 \to 2 \to 4 \to 5}$