Στοχαστικές Στρατηγικές

Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ

7η ενότητα: **Επαναληπτικές ασκήσεις**

Προβλήματα αξιοπιστίας

Παπάνα Αγγελική

Μεταδιδακτορική ερευνήτρια, ΑΠΘ & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας
E-mail: angeliki.papana@gmail.com, agpapana@auth.gr
Webpage: http://users.auth.gr/agpapana

ΆΣΚΗΣΗ (συνέχεια από προηγούμενη ενότητα)

Με τα δεδομένα της προηγούμενης άσκησης, ένας πωλητής ξεκινά από την πόλη 1, θέλει να επισκεφθεί 4 πόλεις και να επιστρέψει πάλι στην πόλη 1. Να βρεθεί η διαδρομή ελαχίστου κόστους.

Λύση

Εκτελούνται οι ίδιες πράξεις με πριν, και επιπλέον:

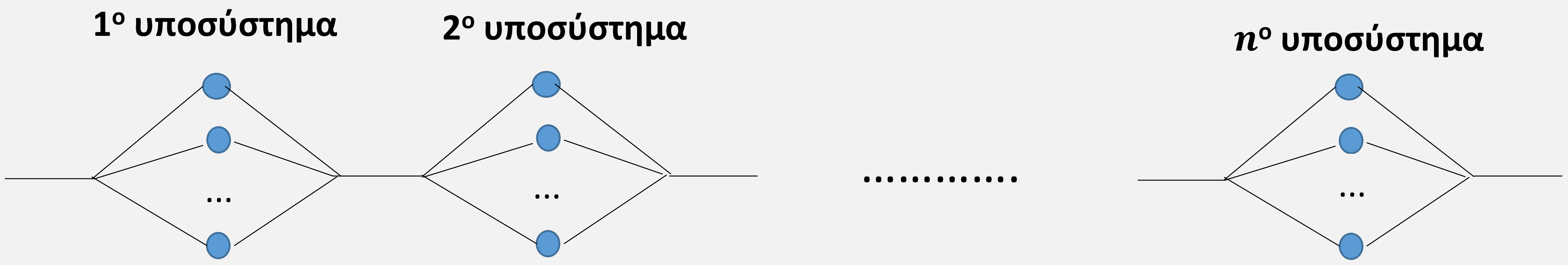
$$f_4(1,\{2,3,4,5\}) =$$

$$\min\{f_3(2,\{3,4,5\}) + a_{21},\ f_3(3,\{2,4,5\}) + a_{31},$$
$$f_3(4,\{2,3,5\}) + a_{41},\ f_3(5,\{2,3,4\}) + a_{51}\}$$

$i \backslash j$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	2	1	3	1
2	4	0	1	2	1
3	1	1	0	1	2
4	3	3	2	0	2
5	5	4	1	1	0

Το πρόβλημα της αξιοπιστίας

Έστω ότι έχουμε ένα εργαλείο το οποίο έχει σε σειρά ορισμένα όργανα, που όταν ένα από αυτά δεν λειτουργεί, το εργαλείο σταματά να λειτουργεί. Δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο n υποσυστημάτων όπου στο καθένα τοποθετείται ένα πλήθος οργάνων παράλληλα. Σε κάθε υποσύστημα τοποθετούμε ένα πλήθος οργάνων παράλληλα, ώστε αν χαλάσει το ένα όργανο, να λειτουργήσει το επόμενο.



Δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε μεγάλο αριθμό από όργανα σε παράλληλη θέση διότι υπάρχουν πάντα περιορισμοί, π.χ. βάρος, κόστος κτλ

Το πρόβλημα

Θέλουμε να **μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα λειτουργίας του εργαλείου** όταν είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε κάποια όργανα σε παράλληλη θέση έτσι ώστε αν χαλάσει κάποιο από τα όργανα που είναι σε παράλληλη θέση, θα λειτουργήσει κάποιο άλλο.

Συμβολισμοί

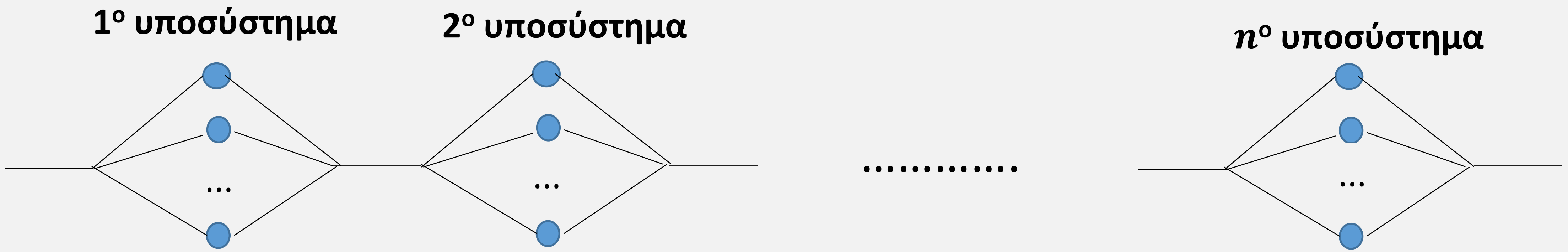
n: πλήθος υποσυστημάτων

x_i: πλήθος οργάνων στο i υποσύστημα

$p_i(x_i)$: η πιθανότητα να λειτουργεί το i υποσύστημα όταν έχει x_i όργανα παράλληλα τοποθετημένα

$c_i(x_i)$: το κόστος αγοράς (και τοποθέτησης) των x_i οργάνων του i υποσυστήματος

K: το κεφάλαιο που διαθέτουμε για την αγορά των οργάνων

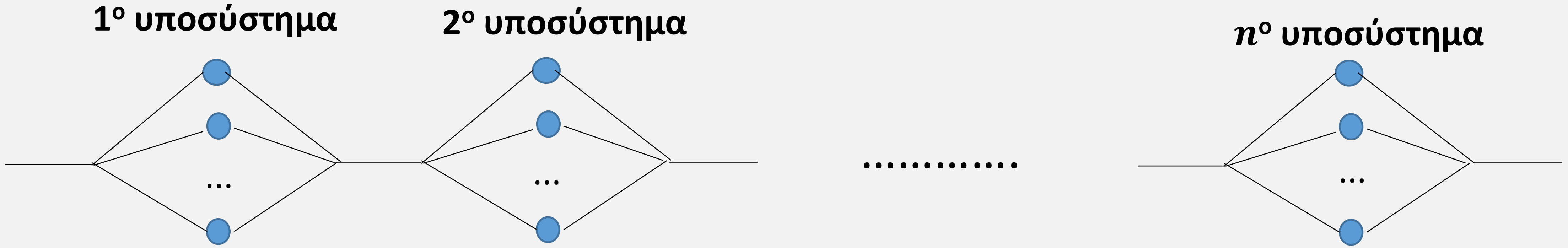


Υποθέτουμε ότι τα ενδεχόμενα να λειτουργούν τα όργανα που βρίσκονται σε σειρά είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, έτσι η πιθανότητα να λειτουργήσουν και τα $\boldsymbol{n}$-όργανα των $\boldsymbol{n}$ υποσυστημάτων είναι:

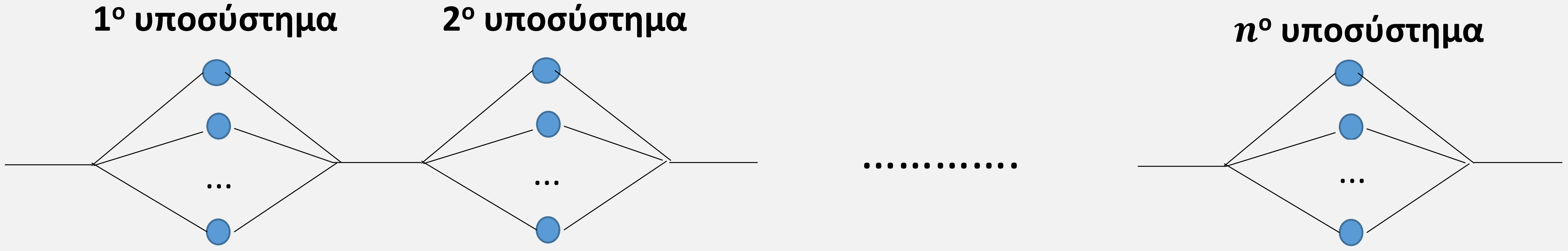
$$\boldsymbol{p_1(x_1)\cdot p_2(x_2)\cdots p_n(x_n)=\prod_{i=1}^{n}p_i(x_i)}$$

Πρόβλημα αξιοπιστίας: $\max \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)$

με $\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i) \le K,\ x_i = 0,1,\ldots$



Επειδή το πρόβλημα (μαθηματικά) έχει **ΓΙΝΟΜΕΝΟ** και όχι **ΑΘΡΟΙΣΜΑ**, **ΔΕΝ** μπορούμε να εφαρμόσουμε άμεσα μεθόδους του ακέραιου προγραμματισμού, αλλά μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα μόνο με τον **ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ**.



Βέλτιστη συνάρτηση

$\boldsymbol{f_i(k)}$ = {η μέγιστη πιθανότητα λειτουργίας των υποσυστημάτων $i, i+1, \ldots, n$ όταν για αυτά υπάρχει διαθέσιμο κεφάλαιο K}

Επαναληπτική σχέση

$$\boldsymbol{f_i(k)} = max_{x_i}\{p_i(x_i)\, f_{i+1}(k - c_i(x_i))\},\ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$x_i = 1, .., k/c_i(x_i)$$

$$k = 0,1, .., K$$

Οριακές συνθήκες

Για $\boldsymbol{i = n}$:

$\boldsymbol{f_n(k)} = max_{x_n}\{p_n(x_n)\}$ με $c_n(x_n) \leq K$

Άσκηση

Έστω ένα σύστημα αντιστάσεων, όπου το 1ο υποσύστημα έχει το πολύ 3 αντιστάσεις, το 2ο υποσύστημα έχει το πολύ 3 αντιστάσεις και το 3ο υποσύστημα έχει το πολύ 2 αντιστάσεις. Ζητείται το πλήθος των αντιστάσεων σε κάθε υποσύστημα που μπορούν να αγοραστούν με κεφάλαιο $K = 9$, ώστε να προκύπτει για το σύστημα η μέγιστη δυνατή αξιοπιστία.

$c_i(j)$	**1**	**2**	**3**
1	1	2	4
2	3	2	1
3	3	4	-

$\pi_i(j)$	**1**	**2**	**3**
1	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.4	0.3
3	0.5	0.4	-

Βέλτιστη συνάρτηση

$\boldsymbol{f_i(k)}$ = {η μέγιστη πιθανότητα λειτουργίας των υποσυστημάτων $i, i+1, \ldots, 3$ όταν για αυτά υπάρχει διαθέσιμο κεφάλαιο K}

Επαναληπτική σχέση

$$\boldsymbol{f_i(k)} = max\{\pi_i(j)\, f_{i+1}(k - c_i(j))\}$$

$\boldsymbol{c_i(j)}$	**1**	**2**	**3**
1	1	2	4
2	3	2	1
3	**3**	4	-

$\boldsymbol{\pi_i(j)}$	**1**	**2**	**3**
1	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.4	0.3
3	0.5	0.4	-

Οριακές συνθήκες

- Για $\boldsymbol{i = 3}$:

$$\boldsymbol{f_3(3)} = \pi_3(1) = 0.5$$

η αξιοπιστία που θα δώσει το 3ο υποσύστημα με 1 αντίσταση
(3:ελάχιστος κόστος για μια αντίσταση στο 3ο υποσύστημα)

$f_3(4) = \max\{\pi_3(1), \pi_3(2)\} = 0.5$

η αξιοπιστία που θα δώσει το 3ο υποσύστημα με 2 αντιστάσεις

$f_3(k) = \max\{\pi_3(1), \pi_3(2)\} = 0.5$

όπου $k = 5,6,7$

Η μέγιστη τιμή του k είναι 7 ώστε να αφήσουμε κατά ελάχιστο ποσό από 1 χρηματική μονάδα για τα 2 πρώτα υποσυστήματα.

$c_i(j)$	**1**	**2**	**3**
1	1	2	4
2	3	2	1
3	**3**	4	-

$\pi_i(j)$	**1**	**2**	**3**
1	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.4	0.3
3	0.5	0.4	-

- Για $i = 2$:

$c_2(3) = 1$: το 3ο όργανο του 2ου υποσυστήματος έχει το μικρότερο κόστος

$$f_2(4) = \pi_2(3) \cdot f_3\left(4 - c_2(3)\right) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15$$

4: το ελάχιστο ποσό που χρειαζόμαστε για τα υποσυστήματα 2 και 3

$$f_2(5) = \max\{\pi_2(1) \cdot f_3\left(5 - c_2(1)\right),$$
$$\pi_2(2) \cdot f_3\left(5 - c_2(2)\right), \pi_2(3) \cdot f_3\left(5 - c_2(3)\right)\} =$$
$$\max\{0.2 \cdot 0, 0.4 \cdot 0.5, 0.3 \cdot 0.5\} = 0.2$$

Θέτω $f_3(2) = 0$ γιατί δεν μπορεί να υπολογιστεί

$$f_2(6) = \max\{\pi_2(1) \cdot f_3\left(6 - c_2(1)\right),$$
$$\pi_2(2) \cdot f_3\left(6 - c_2(2)\right), \pi_2(3) \cdot f_3\left(6 - c_2(3)\right)\} =$$
$$\max\{0.1, 0.2, 0.15\} = 0.2$$

$c_i(j)$	1	2	3
1	1	2	4
2	3	2	1
3	3	4	-

$\pi_i(j)$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.4	0.3
3	0.5	0.4	-

Ομοίως

$f_2(7) = 0.2$

$f_2(8) = 0.2$

$f_2(9) = 0.2$

$c_i(j)$	**1**	**2**	**3**
1	1	2	4
2	3	2	**1**
3	**3**	4	-

$\pi_i(j)$	**1**	**2**	**3**
1	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.4	0.3
3	0.5	0.4	-

- Για $\boldsymbol{i = 1}$:

$$f_1(\mathbf{9}) = \max\{\pi_1(1) \cdot f_2\left(9 - c_1(1)\right), \pi_1(2) \cdot f_2\left(9 - c_1(2)\right), \pi_1(3) \cdot f_2\left(9 - c_1(3)\right)\}$$

$$= \max\{0.1 \cdot 0.2, \quad 0.2 \cdot 0.2, \quad 0.3 \cdot 0.2\} = 0.06$$

Κεφάλαιο

Βέλτιστο πλήθος αντιστάσεων

1 αντίσταση στο 3ο υποσύστημα ($\pi_3(1)$)

2 αντιστάσεις στο 2ο υποσύστημα ($\pi_2(2)$)

3 αντιστάσεις στο 1ο υποσύστημα ($\pi_1(3)$)

Αξιοπιστία

$$\pi_3(1) \cdot \pi_2(2) \cdot \pi_1(3) = 0.06$$

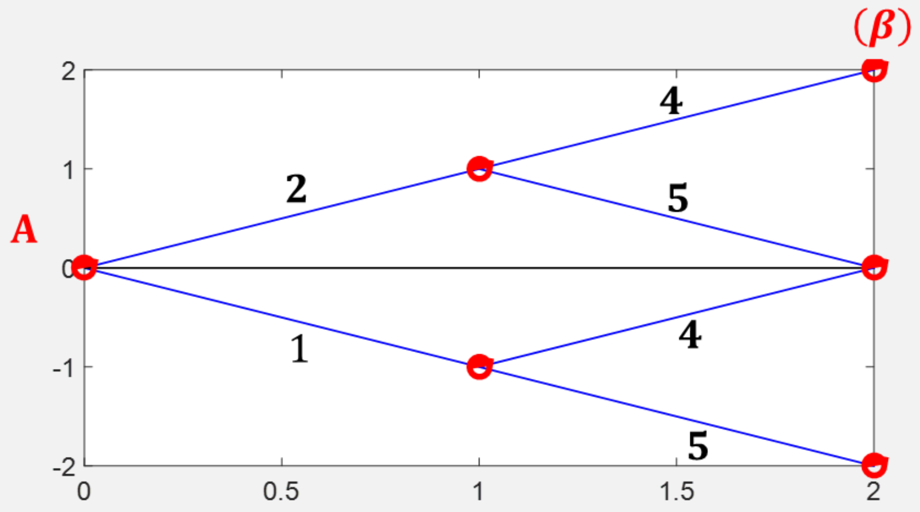
$c_i(j)$	**1**	**2**	**3**
1	1	2	4
2	3	2	1
3	3	4	-

$\pi_i(j)$	**1**	**2**	**3**
1	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.4	0.3
3	0.5	0.4	-

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται το παρακάτω δικτυωτό. Να βρεθεί με τη μέθοδο του βέλτιστου με επαναπληροφόρηση ελέγχου, το πρόβλημα διαδρομής μέγιστου κέρδους από το σημείο Α ως την ευθεία (β). Μια εντολή εκτελείται με πιθανότητα 0.1 και δεν εκτελείται με πιθανότητα 0.9. Οι τιμές στα τόξα παριστάνουν κέρδος.



ΛΥΣΗ

Βέλτιστη συνάρτηση

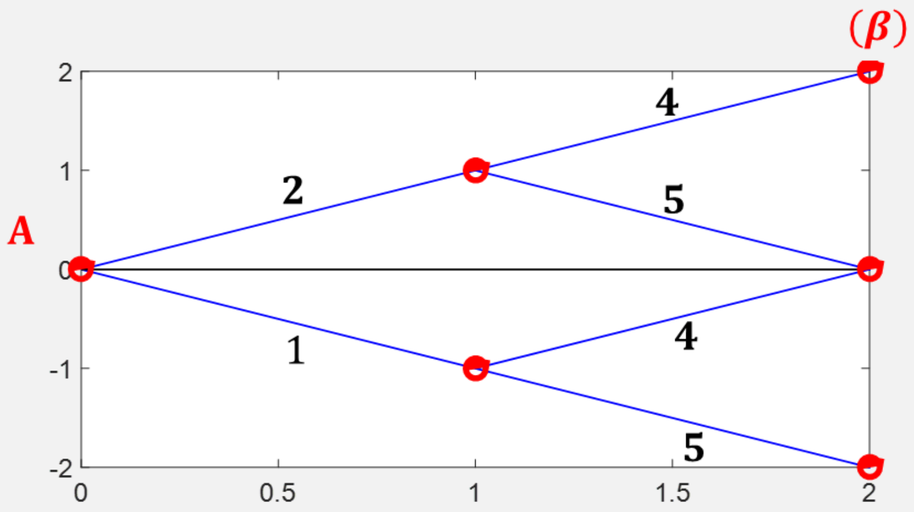
$f(x,y)$={Το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος από τον κόμβο (x,y) μέχρι το τέλος }

Επαναληπτική σχέση

$$f(x,y)= \max \{p[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}+\mathbf{1})] + (1-p)\,[\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}-\mathbf{1})],$$
$$p[\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}-\mathbf{1})] + (1-p)\,[\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}+\mathbf{1})]\}$$

Οριακές συνθήκες

$f(2,2)=0$, $f(2,0)=0$, $f(2,-2)=0$



- Για x=1

$f(1,1)$ = max $\{p[\boldsymbol{a}(1,1)+\boldsymbol{f}(2,2)]$ + (1-p) $[\delta(1,1)+\boldsymbol{f}(2,0)]$,

$p[\delta(1,1)+\boldsymbol{f}(2,0)]$ + (1-p) $[\alpha(1,1)+\boldsymbol{f}(2,0)]\}$

= max $\{0.1(4+0)$ + 0.9 $(5+0)$, $0.1(5+0)$ + 0.9 $(4+0)\}$ = max{**<u>4.9</u>**, 4.1} = **4.9**

$f(1,-1)$ = max $\{p[\boldsymbol{a}(1,-1)+\boldsymbol{f}(2,0)]$ + (1-p) $[\delta(1,-1)+\boldsymbol{f}(2,-2)]$,

$[\delta(1,-1)+\boldsymbol{f}(2,-2)]$ + (1-p) $[\alpha(1,-1)+\boldsymbol{f}(2,0)]\}$

= max $\{0.1(4+0)$ + 0.9 $(5+0)$, $0.1(5+0)$ + 0.9 $(4+0)\}$ = max{**<u>4.9</u>**, 4.1} = **4.9**

- Για x=0

$f(0,0)$ = max $\{p[\boldsymbol{a}(0,0)+\boldsymbol{f}(1,1)]$ + (1-p) $[\delta(0,0)+\boldsymbol{f}(1,-1)]$,

$p[\delta(0,0)+\boldsymbol{f}(1,-1)]$ + (1-p) $[\alpha(0,0)+\boldsymbol{f}(1,1)]\}$

= max $\{0.1(2+4.9)$ + 0.9 $(1+4.9)$, 0.1 $(1+4.9)$ + 0.9 $(2+4.9)\}$=max{6, **<u>6.8</u>**} =

6.8

Βέλτιστη πολιτική εντολών

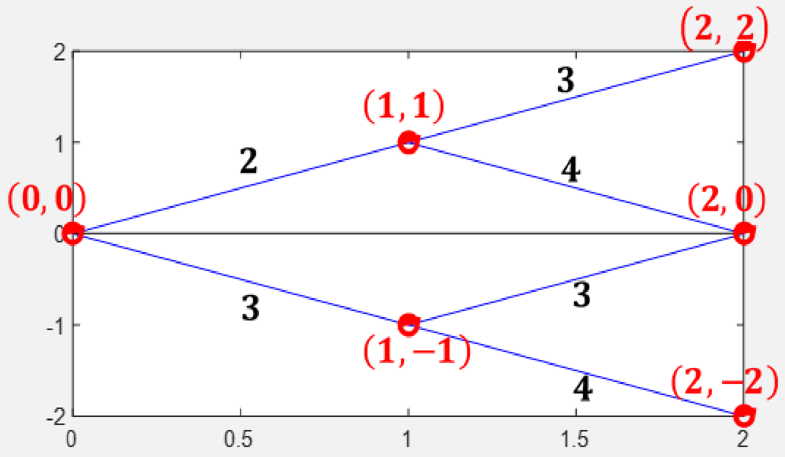
(0,0) : κίνηση προς δεξιά

(1,1): κίνηση προς αριστερά

(1,-1): κίνηση προς αριστερά

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται το διπλανό δικτυωτό. Να βρεθεί με τη **μέθοδο ανοιχτού κύκλου**, το πρόβλημα διαδρομής μέγιστου κέρδους από το σημείο Α ως την τελική ευθεία (x=2). Μια εντολή εκτελείται με πιθανότητα p=0.4 σε κάθε κόμβο. Ποια είναι η διασπορά του κέρδους της βέλτιστης εντολής και τι εκφράζει;



Λύση

Οι δυνατές εντολές που μπορούμε να δώσουμε είναι: ΑΑ, ΑΔ, ΔΑ, ΔΔ.

E(AA) = $p\,p\,(2+3)+p\,q\,(2+4)+q\,p\,(3+3)+q\,q\,(3+4)=\mathbf{6.2}$

E(ΑΔ) = $p\,p\,(2+4)+p\,q\,(2+3)+q\,p\,(3+4)+q\,q\,(3+3)=6$

E(ΔΑ) = $p\,p\,(3+3)+p\,q\,(3+4)+q\,p\,(2+3)+q\,q\,(2+4)=6$

E(ΔΔ) = $p\,p\,(3+4)+p\,q\,(3+3)+q\,p\,(2+4)+q\,q\,(2+3)=5.8$

$$\max\{\boldsymbol{E(AA)}, E(A\Delta), E(\Delta A), E(\Delta\Delta)\} = \mathbf{6.2}$$

Βέλτιστη δυάδα εντολών: **ΑΑ**

Για την εντολή **ΑΑ**, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X: κέρδος

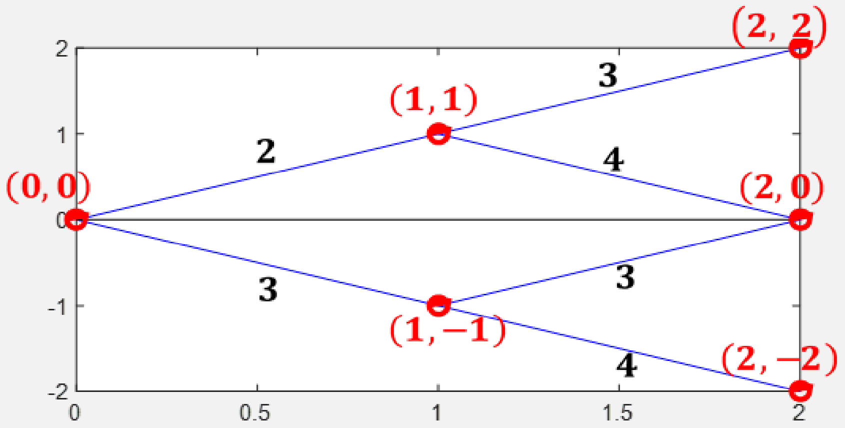
κέρδος	Πιθανότητα
x_i	p_i
5	0.16
6	0.24
6	0.24
7	0.36
Σύνολο	1

Μέση τιμή $\bar{x} = E(AA)$

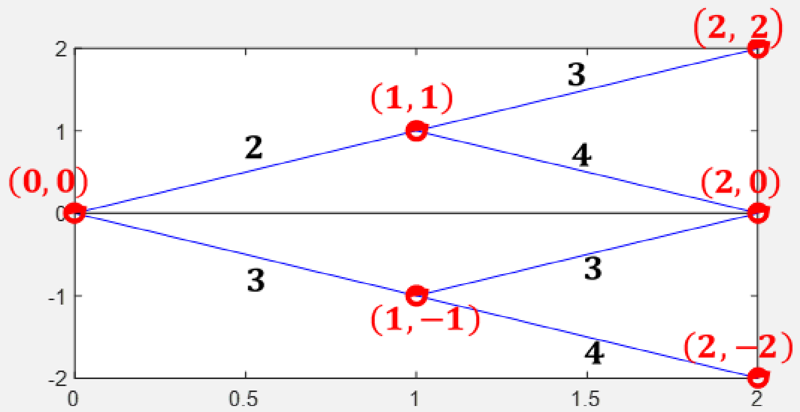
Διασπορά $\sigma^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 p_i$

$$\sigma^2 = (5-6.2)^2 0.16 + (6-6.2)^2 0.24 + (6-6.2)^2 0.24 + (7-6.2)^2 0.36 = 0.48$$

Η τυπική απόκλιση είναι $\sigma = 0.69$ και εκφράζει την αναμενόμενη απόκλιση από την μέση τιμή των κερδών που περιμένουμε ακολουθώντας την βέλτιστη πολιτική ΑΑ.



Για το ίδιο δικτυωτό, να βρεθεί με τη μέθοδο ανοιχτού κύκλου με επαναπληροφόρηση, το πρόβλημα διαδρομής μέγιστου κέρδους από το σημείο Α ως την τελική ευθεία (x=2). Μια εντολή εκτελείται με πιθανότητα p=0.4.



Λύση

- Στον κόμβο **(0,0)**: (από προηγούμενο ερώτημα)

  E(ΑΑ) = $\mathbf{6.2}$, Ε(ΑΔ) $= 6$, Ε(ΔΑ) $= 6$, Ε(ΔΔ) $= 5.8$

  $\max\{\boldsymbol{E(AA)}, E(A\Delta), E(\Delta A), E(\Delta\Delta)\} = \mathbf{6.2}$

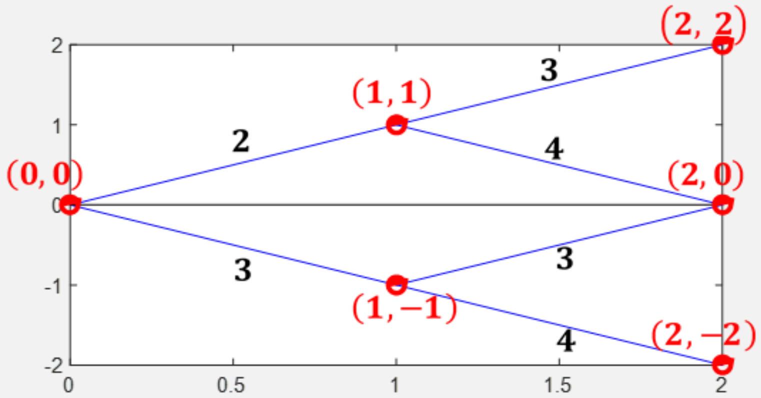
  Βέλτιστες εντολές στο (0,0): κίνηση ΑΑ

- Στον κόμβο **(1,1)**, οι δυνατές εντολές είναι Α, Δ.

  E(A) = $p\,3 + q\,4 = \mathbf{3.6}$ Ε(Δ) = $p\,4 + q\,3 = 3.4$

$\max\{\boldsymbol{E(A)}, E(\Delta)\} = \mathbf{3.6}$

Βέλτιστη εντολή στο (1,1): κίνηση αριστερά



- Στον κόμβο **(1,−1)**, οι δυνατές εντολές είναι Α, Δ.

E(A) = $p\,3 + q\,4 = \mathbf{3.6}$

E(Δ) = $p\,4 + q\,3 = 3.4$

$\max\{\boldsymbol{E(A)}, E(\Delta)\} = \mathbf{3.6}$

Βέλτιστη εντολή στο (1,−1): κίνηση αριστερά

Άσκηση Σε στοχαστικό πρόβλημα αντικατάστασης εργαλείων δίνονται :
A: η τιμή αγοράς νέου εργαλείου, στην αρχή του χρόνου,
$\alpha(t)$: η τιμή ανταλλαγής, στην αρχή του χρόνου, εργαλείου που λειτουργεί, ηλικίας t στην αρχή του χρόνου, με ένα καινούριο,
$p(t)$: η πιθανότητα ένα εργαλείο ηλικίας t στην αρχή του χρόνου, να χαλάσει στο 1/3 του χρόνου,
$\delta(t)$: η τιμή επιδιόρθωσης ενός χαλασμένου εργαλείου ηλικίας t στο 1/3 του χρόνου,
$R_1(t)$: το κόστος λειτουργίας εργαλείου ηλικίας t στην αρχή του χρόνου, για το πρώτο 1/3 του χρόνου,
$R_2(t)$: το κόστος λειτουργίας εργαλείου ηλικίας t στην αρχή του χρόνου, για τα τελευταία 2/3 του χρόνου, αν το εργαλείο χάλασε στο 1/3 του χρόνου και επιδιορθώθηκε,
$R_3(t)$: το κόστος λειτουργίας εργαλείου ηλικίας t, για τα τελευταία 2/3 του χρόνου, αν το εργαλείο δεν χάλασε.
Χρειαζόμαστε το εργαλείο για T χρόνια και διαθέτουμε δικό μας εργαλείο ηλικίας 1 χρόνου. Ορίστε την βέλτιστη συνάρτηση, επαναληπτική σχέση και οριακές συνθήκες.

Ορίζουμε την **βέλτιστη συνάρτηση**:

$f(t, \tau)$ ={το **ελάχιστο αναμενόμενο κόστος** του εργαλείου από την αρχή του **χρόνου τ** μέχρι το **τέλος T**, δεδομένου ότι στην αρχή του χρόνου τ **διαθέτουμε δικό μας εργαλείο που λειτουργεί**

Άρα στην αρχή ενός χρόνου τ, έχουμε τις επιλογές:

1) Απόφαση: Αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: Συνεχίζουμε με το εργαλείο που διαθέτουμε

❑ Επαναληπτική σχέση:

$$\boldsymbol{f(t,\tau)} = \boldsymbol{min}\{\mathrm{A} - \alpha(t) + R_1(0) + p(0)\left(\delta\left(\frac{1}{3}\right) + R_2(0) + f(1,\tau+1)\right)$$

$$+\big(1-p(0)\big)\left(R_3\left(\tfrac{1}{3}\right) + f(1,\tau+1)\right),$$

$$R_1(t) + p(t)\left(\delta\left(t+\frac{1}{3}\right) + R_2(t) + f(t+1,\tau+1)\right)$$

$$+\big(1-p(t)\big)\left(R_3\left(t+\frac{1}{3}\right) + f(t+1,\tau+1)\right)$$

1) Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: συνεχίζουμε με το εργαλείο που έχουμε

❑ Οριακές συνθήκες:

Ορίζονται για $\boldsymbol{\tau = T}$ (στην αρχή του τελευταίου χρόνου):

$$\boldsymbol{f(t,T) = min}\{\mathrm{A} - \alpha(t) + R_1(0) + p(0)\left(\delta\left(\frac{1}{3}\right) + R_2(0)\right) + (1 - p(0))\left(R_3\left(\frac{1}{3}\right)\right),$$

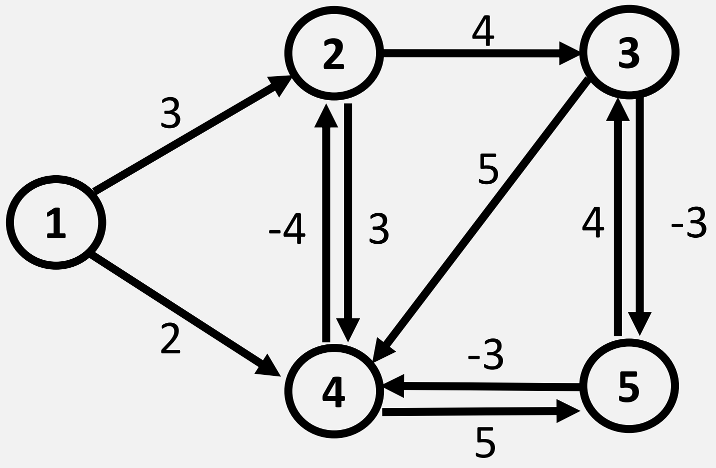
$$R_1(t) + p(t)\left(\delta\left(t + \frac{1}{3}\right) + R_2(t)\right) + (1 - p(t))\left(R_3\left(t + \frac{1}{3}\right)\right)$$

1) Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: συνεχίζουμε με το εργαλείο που έχουμε

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται το διπλανό δικτυωτό. Να βρεθεί η διαδρομή ελάχιστου κόστους από τον **κόμβο 1** στον **κόμβο 5** με **4 το πολύ βήματα** <u>χωρίς</u> να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των βημάτων.



<u>Λύση</u>

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των μειώσεων καθώς δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των βημάτων (λόγω εκφώνησης), ούτε η Dijkstra (λόγω αρνητικών τιμών).

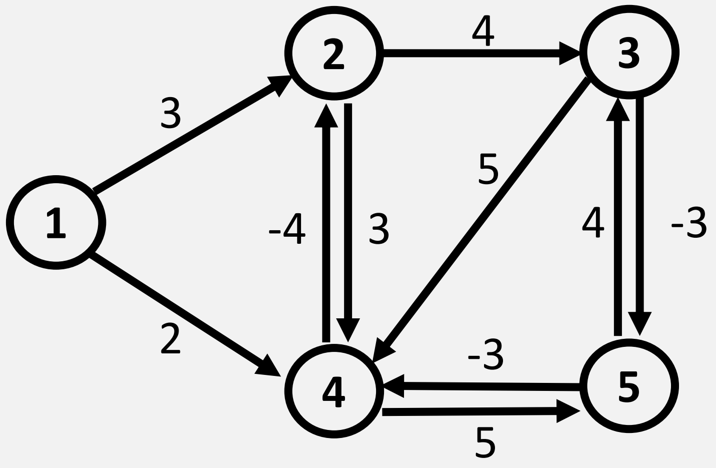
Αφού θέλουμε 4 βήματα, θεωρητικά μπορούμε να έχουμε το πολύ 2 μειώσεις. Σύμφωνα με το δικτυωτό όμως μπορούμε να έχουμε μόνο την μείωση 4 $\rightarrow$ 2. Άρα έχουμε το πολύ 1 μείωση.

Μια το πολύ μείωση σημαίνει:

$\boldsymbol{i-1=1 \Leftrightarrow i=2}$

Βέλτιστη συνάρτηση

$\boldsymbol{g_i(k)} = \{$το μήκος της ελάχιστης διαδρομής από τον κόμβο $\mathbf{1}$ στον κόμβο $\boldsymbol{k}$, μεταξύ όλων των διαδρομών που έχουν $\boldsymbol{i-1}$ ή λιγότερες μειώσεις$\}$

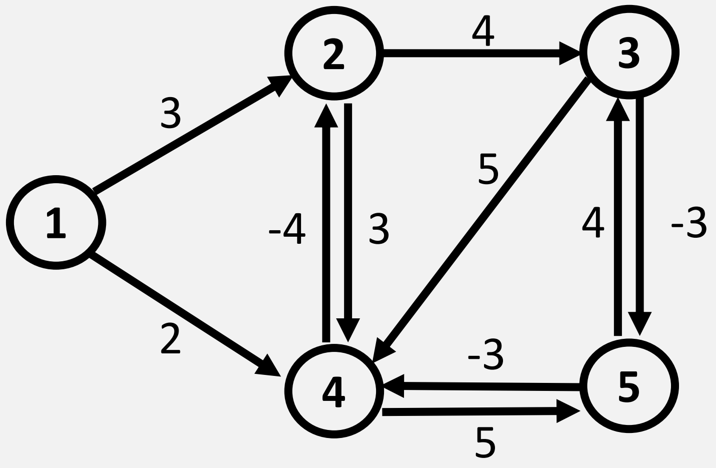


Επαναληπτική σχέση

$$\boldsymbol{g_i(k) = min\begin{cases} min_{j<k}\{g_i(j) + a_{jk}\} \\ min_{j>k}\{g_{i-1}(j) + a_{jk}\} \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{g_i(1) = min_{j\geq 1}\{g_{i-1}(j) + a_{j1}\}}$$

Οριακές συνθήκες



$$\boxed{\boldsymbol{g_0(k)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \alpha\nu \;\; k = 1 \\ \infty, & \alpha\nu \;\; k \neq 1 \end{cases}}$$

- **Για $\boldsymbol{i = 0}$**

$$g_0(1) = 0$$

$$g_0(2) = g_0(3) = g_0(4) = g_0(5) = \infty$$

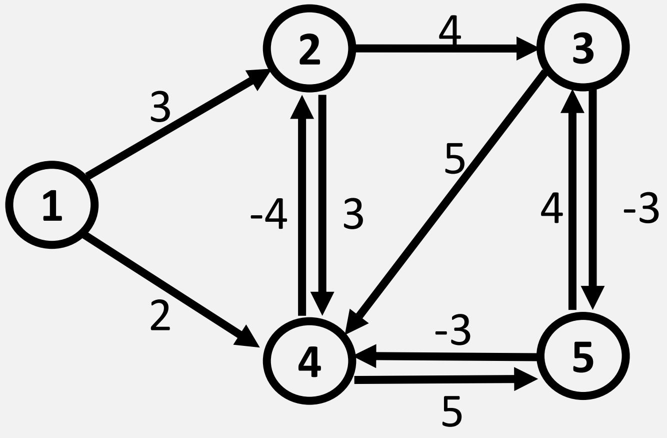
- **Για $\boldsymbol{i = 1}$**

$$\begin{aligned} g_1(1) &= \min\{g_0(1) + a_{11}, g_0(2) + a_{21}, g_0(3) + a_{31}, g_0(4) + a_{41}, g_0(5) + a_{51}\} \\ &= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0 \end{aligned}$$

$$g_1(2) = \min \begin{cases} \min\{g_0(3) + a_{32}, g_0(4) + a_{42}, g_0(5) + a_{52}\} \\ g_1(1) + a_{12} \end{cases} = \min \begin{cases} \min\{\infty, \infty, \infty\} \\ 0 + 3 \end{cases} = 3$$

$$g_1(3) = \min\begin{cases}\min\{g_0(4) + a_{43}, g_0(5) + a_{53}\} \\ \min\{g_1(1) + a_{13}, g_1(2) + a_{23}\}\end{cases} =$$

$$= \min\begin{cases}\infty, \infty \\ \min\{0 + \infty, 3 + 4\}\end{cases} = 7$$

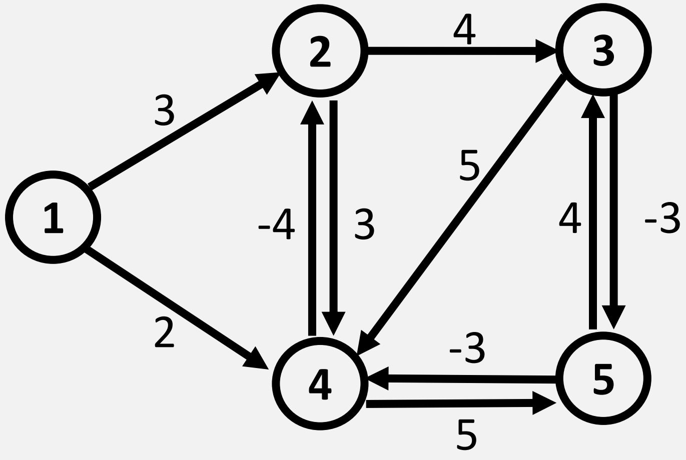


$$g_1(4) = \min\begin{cases}g_0(5) + a_{54} \\ \min\{g_1(1) + a_{14}, g_1(2) + a_{24}, g_0(3) + a_{34},\}\end{cases} =$$

$$= \min\begin{cases}\infty \\ \min\{0 + 2, 3 + 3, 7 + 5\}\end{cases} = 2$$

$$g_1(5) = \min\{g_1(1) + a_{15}, g_1(2) + a_{25}, g_1(3) + a_{35}, g_1(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, 3 + \infty, 7 + (-3), 2 + 5\} = 4$$

- **Για $i = 2$**



$$g_2(1) = \min\{g_1(1) + a_{11}, g_1(2) + a_{21}, g_1(3) + a_{31}, g_1(4) + a_{41}, g_1(5) + a_{51}\}$$
$$= \min\{0 + 0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

$$g_2(2) = \min\begin{cases} \min\{g_1(3) + a_{32}, g_1(4) + a_{42}, g_1(5) + a_{52}\} \\ g_2(1) + a_{12} \end{cases}$$
$$= \min\begin{cases} \min\{7 + \infty, 2 + (-4), 4 + \infty\} \\ 0 + 3 \end{cases} = -2$$

$$g_2(3) = \min\begin{cases} \min\{g_1(4) + a_{43}, g_1(5) + a_{53}\} \\ \min\{g_2(1) + a_{13}, g_2(2) + a_{23}\} \end{cases} = \min\begin{cases} \min\{\infty, 4 + 4\} \\ \min\{\infty, -2 + 4\} \end{cases} = 2$$

$$g_2(4) = \min\begin{cases} g_1(5) + a_{54} \\ \min\{g_2(1) + a_{14}, g_2(2) + a_{24}, g_2(3) + a_{34}\} \end{cases} = \min\begin{cases} 4 - 3 \\ \min\{2, -2 + 3, 2 + 5\} \end{cases}$$
$$= 1$$

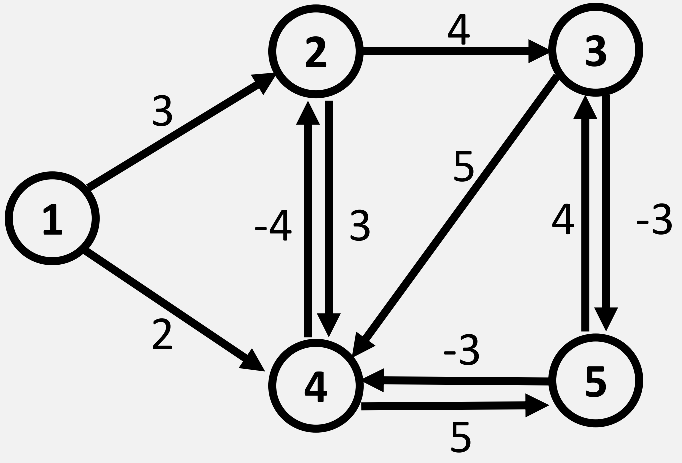
$$g_2(5) = \min\{g_2(1) + a_{15}, g_2(2) + a_{25}, g_2(3) + a_{35}, g_2(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, -2 + \infty, 2 + (-3), 1 + 5\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, -1, 6\} = \mathbf{-1}$$

ελάχιστο κόστος διαδρομής

Άρα η βέλτιστη διαδρομή είναι:

$$\mathbf{1} \rightarrow \boxed{\mathbf{4} \rightarrow \mathbf{2}} \rightarrow \mathbf{3} \rightarrow \mathbf{5}$$

με μια μείωση



Βιβλιογραφία

1) Π.-Χ. Βασιλείου (2001) Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Ζήτη.
2) Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Ν. Τσάντας (1998) Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη.