# Στοχαστικές Στρατηγικές

Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ

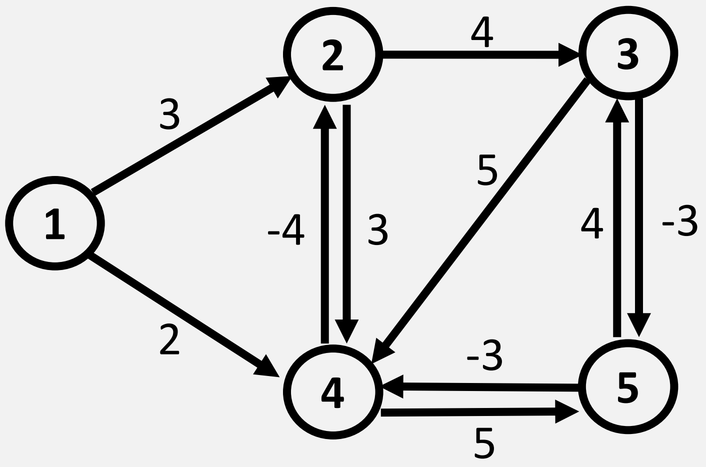
6η ενότητα: **Το γενικό πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής (3)**

**Παπάνα Αγγελική**

Μεταδιδακτορική ερευνήτρια, ΑΠΘ & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας
E-mail: angeliki.papana@gmail.com, agpapana@auth.gr
Webpage: http://users.auth.gr/agpapana

# Άσκηση

Στο δικτυωτό του σχήματος, να βρεθεί η βέλτιστη διαδρομή από τον κόμβο **1** στον κόμβο **5** με **μια** το πολύ **μείωση**.




Λύση

**Βέλτιστη συνάρτηση**

$\boldsymbol{g_i(k)} = \{$το μήκος της ελάχιστης διαδρομής από τον κόμβο $\mathbf{1}$ στον κόμβο $\boldsymbol{k}$, μεταξύ όλων των διαδρομών που έχουν $\boldsymbol{i-1}$ ή λιγότερες μειώσεις$\}$

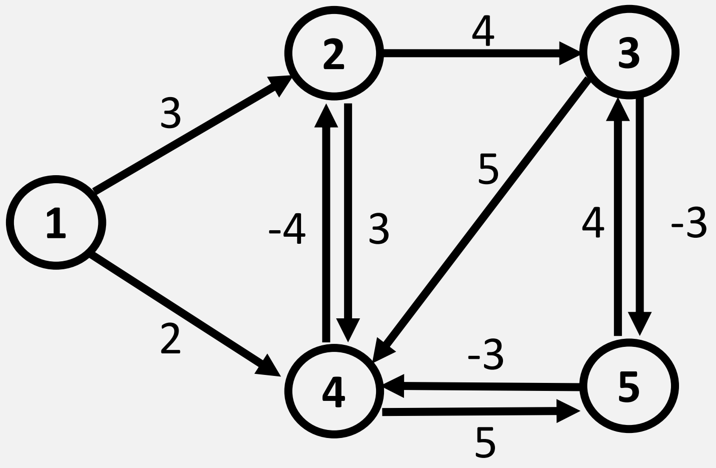
**Μια το πολύ μείωση** σημαίνει:

$$\boldsymbol{i-1=1} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{i=2}}$$

- **Οριακές συνθήκες** για $\boldsymbol{i = 0}$

$$g_0(1) = 0$$

$$g_0(2) = g_0(3) = g_0(4) = g_0(5) = \infty$$




- Για $\boldsymbol{i = 1}$ και $\boldsymbol{k = 1, 2, 3, 4, 5}$:

$$g_1(1) = \min\{g_0(1) + a_{11}, g_0(2) + a_{21}, g_0(3) + a_{31}, g_0(4) + a_{41}, g_0(5) + a_{51}\}$$
$$= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

$$g_1(2) = \min \begin{cases} min\{g_0(3) + a_{32}, g_0(4) + a_{42}, g_0(5) + a_{52}\} \\ g_1(1) + a_{12} \end{cases} = \min \begin{cases} \min\{\infty, \infty, \infty\} \\ 0 + 3 \end{cases} = 3$$

$$g_1(3) = \min \begin{cases} \min\{g_0(4) + a_{43}, g_0(5) + a_{53}\} \\ \min\{g_1(1) + a_{13}, g_1(2) + a_{23}\} \end{cases} = \min \begin{cases} \min\{\infty, \infty\} \\ \min\{\infty, 7\} \end{cases} = 7$$

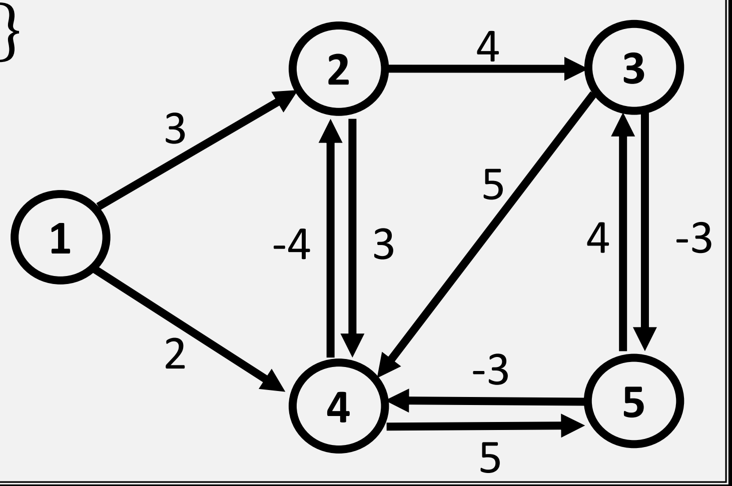
$$g_1(4) = \min \begin{cases} g_0(5) + a_{54} \\ \min\{g_1(1) + a_{14}, g_1(2) + a_{24}, g_1(3) + a_{34}\} \end{cases} = \min \begin{cases} \infty \\ \min\{2,6,12\} \end{cases} = 2$$

$$g_1(5) = \min\{g_1(1) + a_{15}, g_1(2) + a_{25}, g_1(3) + a_{35}, g_1(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, 4,7\} = 4$$

- Για $\boldsymbol{i = 2}$ και $\boldsymbol{j = 1, 2, 3, 4, 5}$:

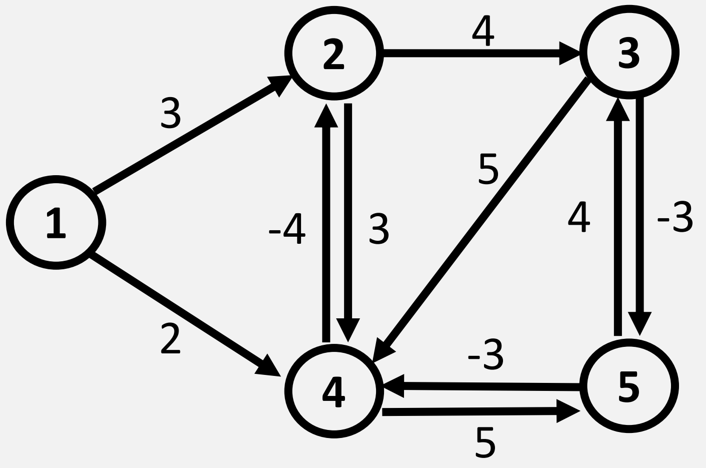
$$g_2(1) = \min\{g_1(1) + a_{11}, g_1(2) + a_{21}, g_1(3) + a_{31}, g_1(4) + a_{41}, g_1(5) + a_{51}\}$$
$$= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

$$g_2(2) = \min \begin{cases} min\{g_1(3) + a_{32}, g_1(4) + a_{42}, g_1(5) + a_{52}\} \\ g_2(1) + a_{12} \end{cases}$$
$$= \min \begin{cases} \min\{\infty, -2, \infty\} \\ 3 \end{cases} = -2$$



$$g_2(3) = \min\begin{cases} \min\{g_1(4) + a_{43}, g_1(5) + a_{53}\} \\ \min\{g_2(1) + a_{13}, g_2(2) + a_{23}\} \end{cases}$$

$$= \min\begin{cases} \min\{\infty, 8\} \\ \min\{\infty, 2\} \end{cases} = 2$$




$$g_2(4) = \min\begin{cases} g_1(5) + a_{54} \\ \min\{g_2(1) + a_{14}, g_2(2) + a_{24}, g_2(3) + a_{34}\} \end{cases}$$

$$= \min\begin{cases} 4 - 3 \\ \min\{2, -2 + 3, 2 + 5\} \end{cases} = 1$$

$$g_2(5) = \min\{g_2(1) + a_{15}, g_2(2) + a_{25}, g_2(3) + a_{35}, g_2(4) + a_{45}\}$$

$$= \min\{\infty, \infty, 2 + (-3), 1 + 5\} = \boxed{-1}$$

Είναι:

$$\boldsymbol{g_2(5)} = \min\{g_2(1)+a_{15}, g_2(2)+a_{25}, \boldsymbol{g_2(3)+a_{35}}, g_2(4)+a_{45}\} = \boxed{\boldsymbol{-1}}$$

$$\boldsymbol{g_2(3)} = \min\begin{cases} \min\{g_1(4)+a_{43}, g_1(5)+a_{53}\} \\ \min\{g_2(1)+a_{13}, \boldsymbol{g_2(2)+a_{23}}\} \end{cases} = \boldsymbol{2}$$

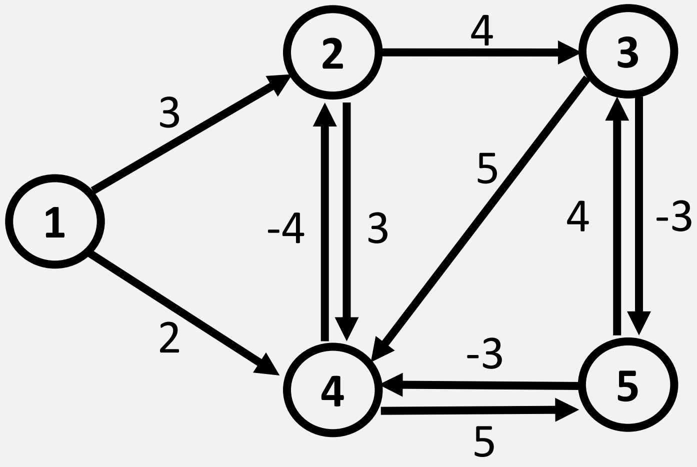
$$\boldsymbol{g_2(2)} = \min\begin{cases} min\{g_1(3)+a_{32}, \boldsymbol{g_1(4)+a_{42}}, g_1(5)+a_{52}\} \\ g_2(1)+a_{12} \end{cases} = \boldsymbol{-2}$$

$$\boldsymbol{g_1(4)} = \min\begin{cases} g_0(5)+a_{54} \\ \min\{\boldsymbol{g_1(1)+a_{14}}, g_1(2)+a_{24}, g_1(3)+a_{34}\} \end{cases} = \boldsymbol{2}$$

Οπότε η βέλτιστη διαδρομή από τον κόμβο **1** στον **5** με **μια το πολύ μείωση** είναι:

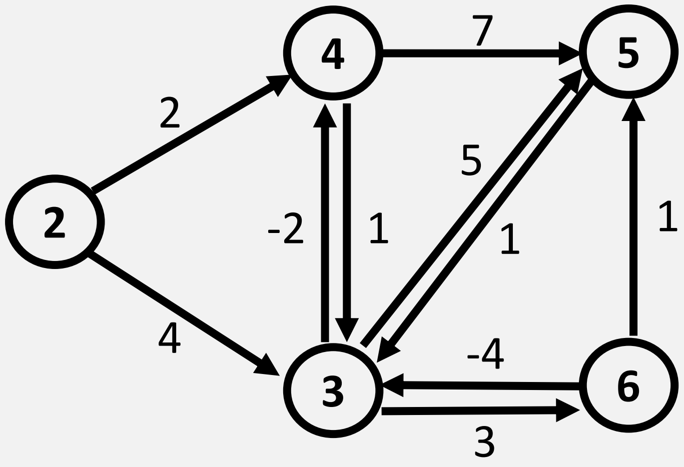
$$\boldsymbol{1} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{4} \rightarrow \boldsymbol{2}} \rightarrow \boldsymbol{3} \rightarrow \boldsymbol{5}$$

όπου έχουμε μια μείωση



**Άσκηση**

**α)** Στο δικτυωτό του σχήματος, να βρεθεί η βέλτιστη διαδρομή από τον κόμβο **2** στον κόμβο **5** **με μια το πολύ μείωση** αν δεν επιτρέπεται σε μια διαδρομή να υπάρχει το τόξο $3 \rightarrow 4$ δύο φορές.




**β)** Εξηγείστε σχετικά με τη λύση, αν λείπει η υπογραμμισμένη συνθήκη.

Λύση

**α) Βέλτιστη συνάρτηση**

$g_i(k) = \{$το μήκος της ελάχιστης διαδρομής από τον κόμβο $\mathbf{2}$ στον κόμβο $k$, μεταξύ όλων των διαδρομών που έχουν $i-1$ ή λιγότερες μειώσεις$\}$

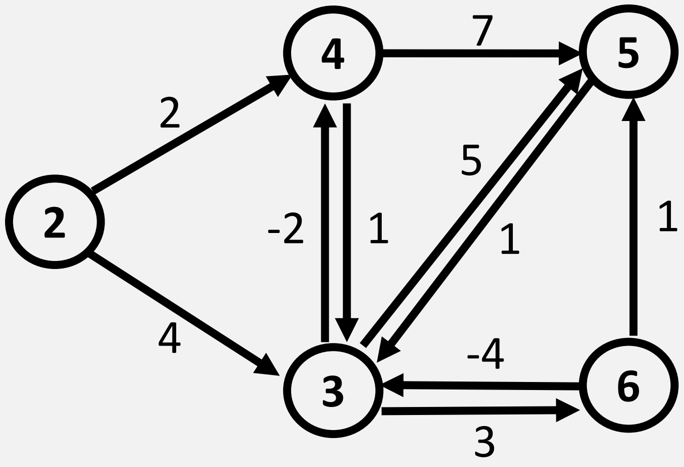
**Μια το πολύ μείωση** σημαίνει:

$i - 1 = 1 \Leftrightarrow i = 2$

- **Οριακές συνθήκες** για $i = 0$

$$g_0(2) = 0$$

$$g_0(3) = g_0(4) = g_0(5) = g_0(6) = \infty$$




- Για $i = 1$:

$$g_1(2) = \min\{g_0(2) + a_{22}, g_0(3) + a_{32}, g_0(4) + a_{42}, g_0(5) + a_{52}, g_0(6) + a_{62}\}$$
$$= \min\{0 + 0, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty\} = 0$$

$$g_1(3) = \min\begin{cases} min\{g_0(4) + a_{43}, g_0(5) + a_{53}, g_0(6) + a_{63}\} \\ g_1(2) + a_{23} \end{cases}$$

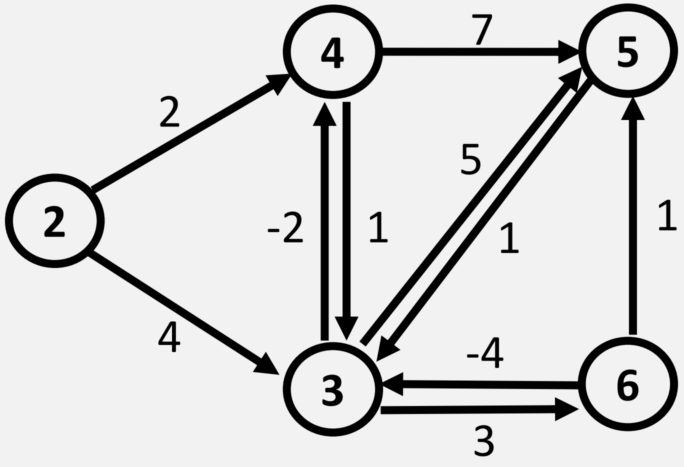
$$= \min\begin{cases} \min\{\infty + 1, \infty + 1, \infty + (-4)\} \\ 0 + 4 \end{cases} = 4$$

$$g_1(4) = \min\begin{cases} \min\{g_0(5) + a_{54}, g_0(6) + a_{64}\} \\ \min\{g_1(2) + a_{24}, g_1(3) + a_{34}\} \end{cases} = \min\begin{cases} \min\{\infty, \infty\} \\ \min\{0 + 2, 4 + (-2)\} \end{cases} = 2$$

$$g_1(5) = \min\begin{cases} g_0(6) + a_{65} \\ \min\{g_1(2) + a_{25}, g_1(3) + a_{35}, g_1(4) + a_{45}\} \end{cases}$$

$$= \min\begin{cases} \infty + 1 \\ \min\{0 + \infty, 4 + 5, 2 + 7\} \end{cases} = 9$$

$$g_1(6) = \min\{g_1(2) + a_{26}, g_1(3) + a_{36}, g_1(4) + a_{46}, g_1(5) + a_{56}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, 4 + 3, 2 + \infty, 9 + \infty\} = 7$$

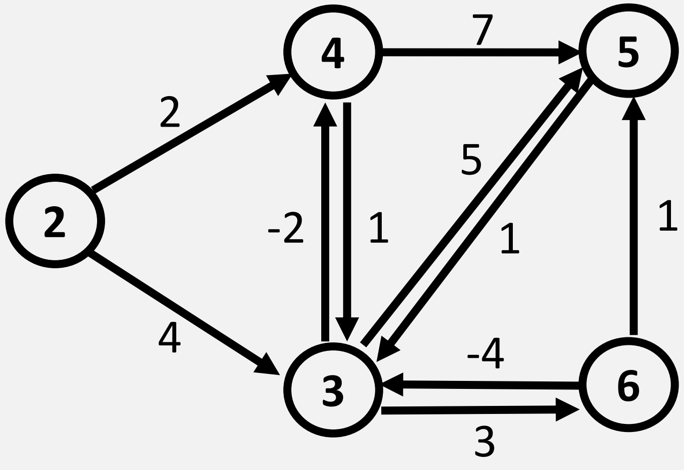


- Για $\boldsymbol{i = 2}$:

$$g_2(2) = \min\{g_1(2) + a_{22}, g_1(3) + a_{32}, g_1(4) + a_{42}, g_1(5) + a_{52}, g_1(6) + a_{62}\}$$
$$= \min\{0 + 0, 4 + \infty, 2 + \infty, 9 + \infty, 7 + \infty\} = 0$$

$$g_2(3) = \min\begin{cases} min\{g_1(4) + a_{43}, g_1(5) + a_{53}, g_1(6) + a_{63}\} \\ g_2(2) + a_{23} \end{cases}$$
$$= \min\begin{cases} \min\{2 + 1, 9 + 1, 7 + (-4)\} \\ 0 + 4 \end{cases} = 3$$

$$g_2(4) = \min\begin{cases} \min\{g_1(5) + a_{54}, g_1(6) + a_{64}\} \\ \min\{g_2(2) + a_{24}, g_2(3) + a_{34}\} \end{cases}$$
$$= \min\begin{cases} \min\{9 + \infty, 7 + \infty\} \\ \min\{0 + 2, 3 + (-2)\} \end{cases} = 1$$



$$g_2(5) = \min \begin{cases} g_1(6) + a_{65} \\ \min\{g_2(2) + a_{25}, g_2(3) + a_{35}, g_2(4) + a_{45}\} \end{cases}$$

$$= \min \begin{cases} 7 + 1 \\ \min\{0 + \infty, 3 + 5, 1 + 7\} \end{cases} = \boxed{8}$$ : ελάχιστο κόστος

Άρα οι βέλτιστες διαδρομές με μια το πολύ μείωση είναι:

$2 \rightarrow \boxed{4 \rightarrow 3} \rightarrow 5$

$2 \rightarrow 3 \rightarrow \boxed{4 \rightarrow 3} \rightarrow 5$

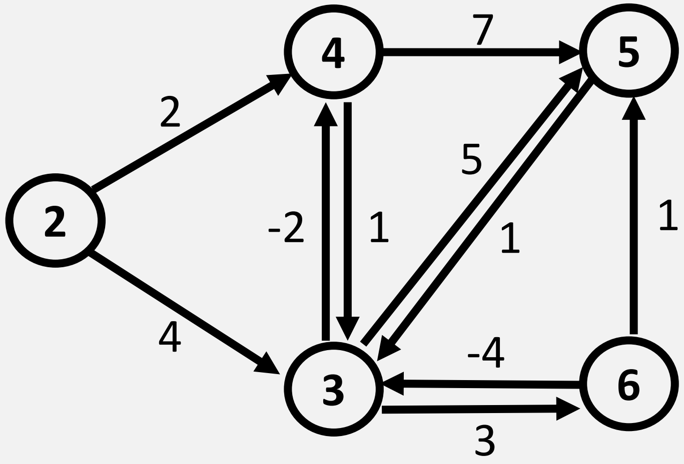
$2 \rightarrow 3 \rightarrow \boxed{6 \rightarrow 3} \rightarrow 5$

$2 \rightarrow 3 \rightarrow \boxed{6 \rightarrow 5}$

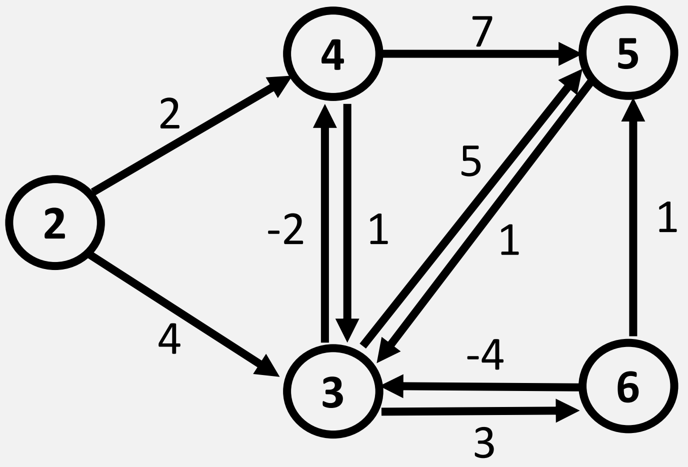
$2 \rightarrow \boxed{4 \rightarrow 3} \rightarrow 4 \rightarrow 5$

$2 \rightarrow \boxed{3 \rightarrow 4} \rightarrow \boxed{3 \rightarrow 4} \rightarrow 5$ απορρίπτεται

$2 \rightarrow 3 \rightarrow \boxed{6 \rightarrow 3} \rightarrow 4 \rightarrow 5$

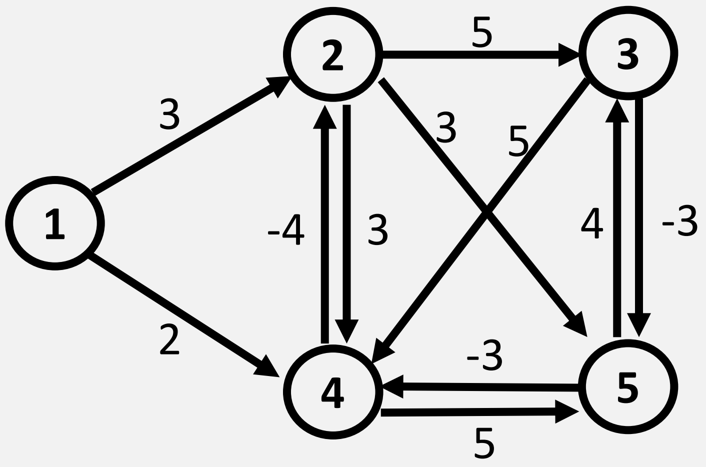


**β)** Αν στην άσκηση δεν αναφέρεται ο μέγιστος επιτρεπτός αριθμός μειώσεων, τότε το πρόβλημα δεν έχει **φραγμένη λύση**, αφού είναι δυνατόν να επαναλαμβάνουμε συνεχώς τον **κύκλο 3 ↔ 6 μειώνοντας διαρκώς το κόστος**.



**Άσκηση (Παλιό θέμα εξεταστικής)**

Στο διπλανό δικτυωτό, οι τιμές στα τόξα παριστάνουν κέρδος. Να βρεθεί η διαδρομή μέγιστου κέρδους από τον κόμβο **1** στον κόμβο **5** με **μια** το πολύ **μείωση**, αλλά να **μην** χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των μειώσεων.



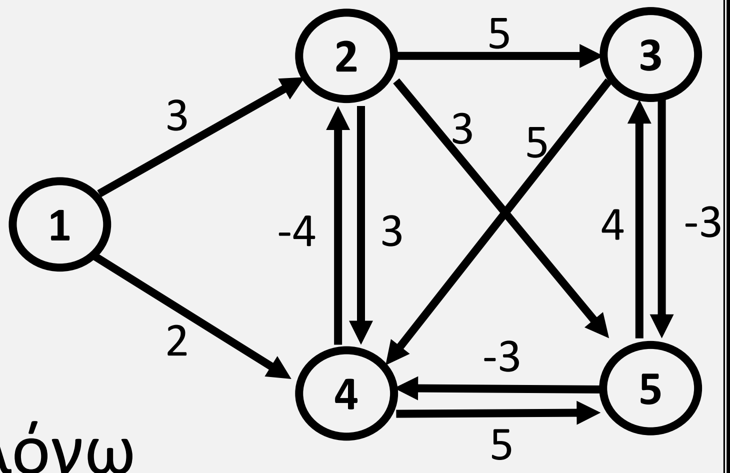

Υπάρχει περίπτωση το παραπάνω πρόβλημα να μην έχει λύση αν χρησιμοποιηθούν δύο το πολύ μειώσεις;

Εξηγείστε αν μπορεί να λυθεί το πρόβλημα με την μέθοδο Dijkstra.

Λύση

Οι μοναδικές μειώσεις στο δικτυωτό είναι

$\mathbf{4 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 3, 5 \rightarrow 4}$




Ο κόμβος **5** είναι ο τελικός κόμβος άρα μόνο η μείωση $\mathbf{4 \rightarrow 2}$ έχει νόημα.

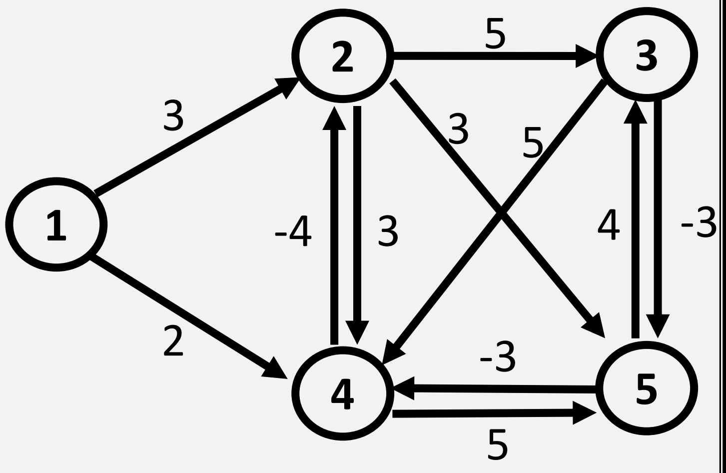
Η μέθοδος Dijkstra δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί λόγω αρνητικών τιμών.

Επομένως θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των βημάτων και θα αποκλείσουμε διαδρομές που έχουν πάνω από 1 μείωση.

Επομένως, αρχικά ελέγχουμε για 6 βήματα την βέλτιστη διαδρομή και έπειτα ελέγχουμε αν αυξάνοντας το πλήθος των βημάτων μειώνεται το κόστος και ικανοποιείται η συνθήκη για 1 το πολύ μείωση.

## Βέλτιστη συνάρτηση

$f_i(k) = \{$το μέγιστο κέρδος διαδρομής από τον κόμβο $1$ στον κόμβο $k$, με $i$ το πολύ βήματα$\}$ όπου $k = 1, 2, 3, 4, 5$




## Επαναληπτική σχέση

$$\boxed{f_i(k) = max_{j \neq k}\{f_{i-1}(j) + a_{jk}\} \text{ για } k \neq 1}$$

$$\boxed{f_i(1) = max\{f_{i-1}(1) + a_{j1}\}} = f_{i-1}(1) + a_{11}$$

**(αφού κανένας κόμβος δεν επιστρέφει στον κόμβο 1)**

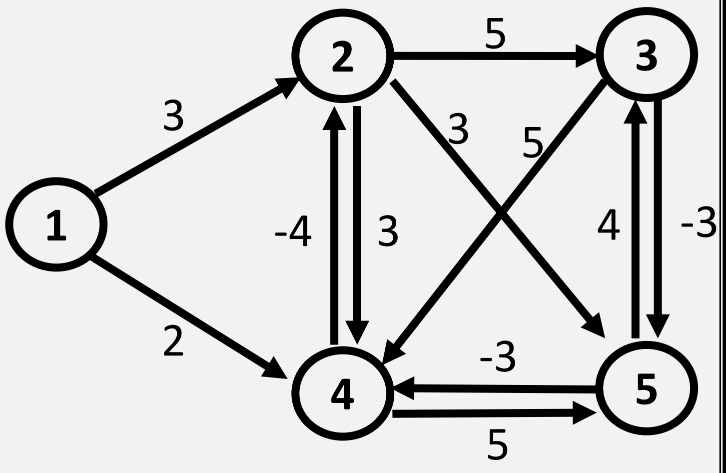
## Οριακές συνθήκες

$$\boxed{f_0(k) = \begin{cases} 0, & αν \;\; k = 1 \\ -\infty, & αν \;\; k \neq 1 \end{cases}}$$

- $i = 0$

$f_0(1) = 0$

$f_0(2) = f_0(3) = f_0\,(4) = f_0(5) = -\infty$




- $i = 1$

$f_1(1) = f_0(1) + a_{11} = 0 + 0 = 0$

$f_1(2) = f_0(1) + a_{12} = 0 + 3 = 3$ **(Οι υπόλοιπες περιπτώσεις δίνουν $-\infty$)**

$f_1(3) = max\{f_0(1) + a_{13}, f_0(2) + a_{23}, f_0(4) + a_{43}, \cancel{f_0(5) + a_{53}}\} = -\infty$

$f_1(4) = max\{f_0(1) + a_{14}, f_0(2) + a_{24}, f_0(3) + a_{34}, \cancel{f_0(5) + a_{54}}\} = 2$

$f_1(5) = -\infty$

- $\boldsymbol{i = 2}$

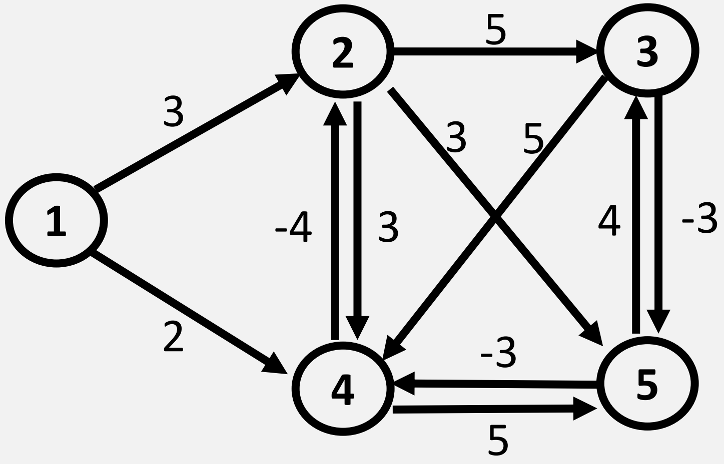
$$f_2(1) = f_1(1) + a_{11} = 0$$

$$f_2(2) = max\{f_1(1) + a_{12}, f_1(3) + a_{32}, f_1(4) + a_{42}, \cancel{f_1(5) + a_{52}}\} = 3$$

$$f_2(3) = max\{f_1(1) + a_{13}, f_1(2) + a_{23}, f_1(4) + a_{43}, \cancel{f_1(5) + a_{53}}\} = 8$$

$$f_2(4) = max\{f_1(1) + a_{14}, f_1(2) + a_{24}, f_1(3) + a_{34}, \cancel{f_1(5) + a_{54}}\} = 6$$

$$f_2(5) = max\{f_1(1) + a_{15}, f_1(2) + a_{25}, f_1(3) + a_{35}, f_1(4) + a_{45}\} = 7$$



- $\boldsymbol{i = 3}$

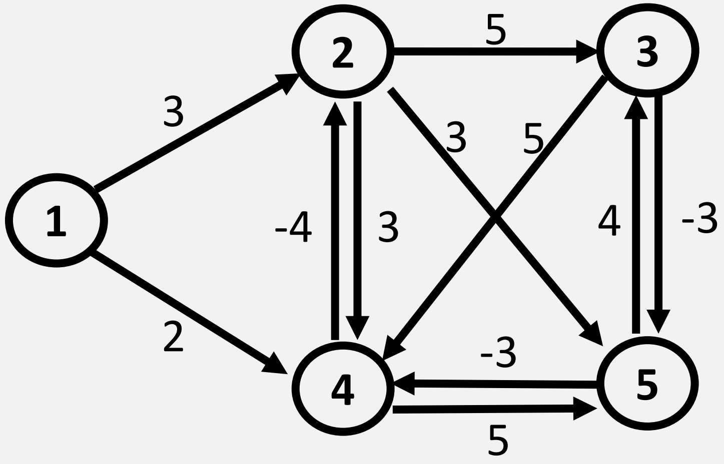
$$f_3(1) = f_2(1) + a_{11} = 0$$

$$f_3(2) = max\{f_2(1) + a_{12}, f_2(3) + a_{32}, f_2(4) + a_{42}, \cancel{f_2(5) + a_{52}}\} = 3$$

$$f_3(3) = max\{f_2(1) + a_{13}, f_2(2) + a_{23}, f_2(4) + a_{43}, \cancel{f_2(5) + a_{53}}\} = 8$$

$$f_3(4) = max\{f_2(1) + a_{14}, f_2(2) + a_{24}, f_2(3) + a_{34}, \cancel{f_2(5) + a_{54}}\} = 13$$

$$f_3(5) = max\{f_2(1) + a_{15}, f_2(2) + a_{25}, f_2(3) + a_{35}, f_2(4) + a_{45}\} = 11$$



- $\boldsymbol{i = 4}$

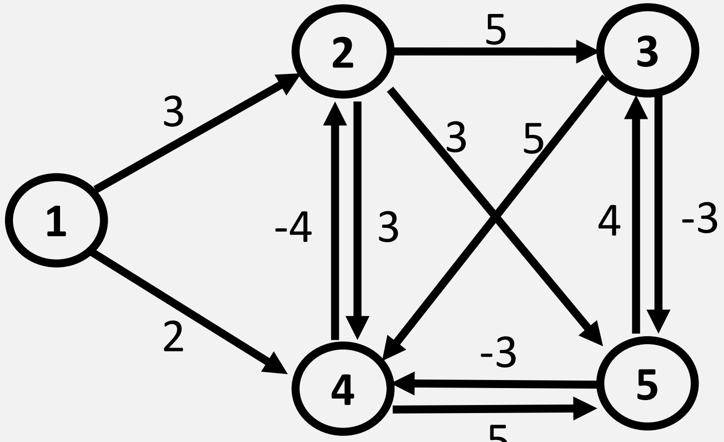
$$f_4(1) = f_3(1) + a_{11} = 0$$

$$f_4(2) = max\{f_3(1) + a_{12}, f_3(3) + a_{32}, f_3(4) + a_{42}, \cancel{f_3(5) + a_{52}}\} = 9$$

$$f_4(3) = max\{f_3(1) + a_{13}, f_3(2) + a_{23}, f_3(4) + a_{43}, \cancel{f_3(5) + a_{53}}\} = 8$$

$$f_4(4) = max\{f_3(1) + a_{14}, f_3(2) + a_{24}, f_3(3) + a_{34}, \cancel{f_3(5) + a_{54}}\} = 13$$

$$f_4(5) = max\{f_3(1) + a_{15}, f_3(2) + a_{25}, f_3(3) + a_{35}, f_3(4) + a_{45}\} = 18$$



- $\boldsymbol{i = 5}$

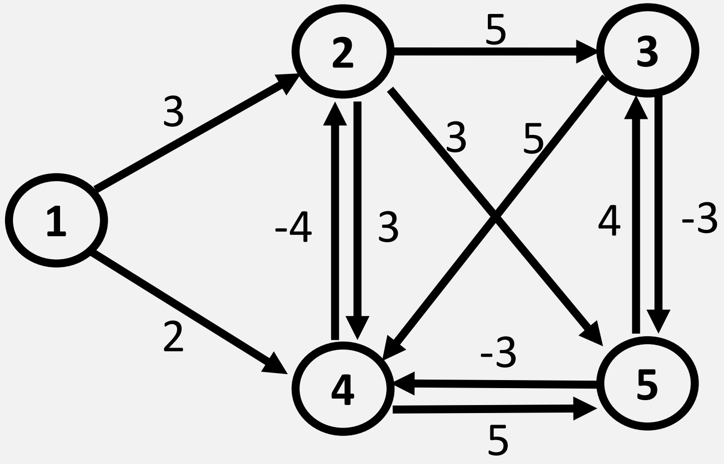
$$f_5(1) = f_4(1) + a_{11} = 0$$

$$f_5(2) = max\{f_4(1) + a_{12}, f_4(3) + a_{32}, f_4(4) + a_{42}, \cancel{f_4(5) + a_{52}}\} = 9$$

$$f_5(3) = max\{f_4(1) + a_{13}, f_4(2) + a_{23}, f_4(4) + a_{43}, \cancel{f_4(5) + a_{53}}\} = 14$$

$$f_5(4) = max\{f_4(1) + a_{14}, f_4(2) + a_{24}, f_4(3) + a_{34}, \cancel{f_4(5) + a_{54}}\} = 13$$

$$f_5(5) = max\{f_4(1) + a_{15}, f_4(2) + a_{25}, f_4(3) + a_{35}, f_4(4) + a_{45}\} = 18$$



- $\boldsymbol{i = 6}$

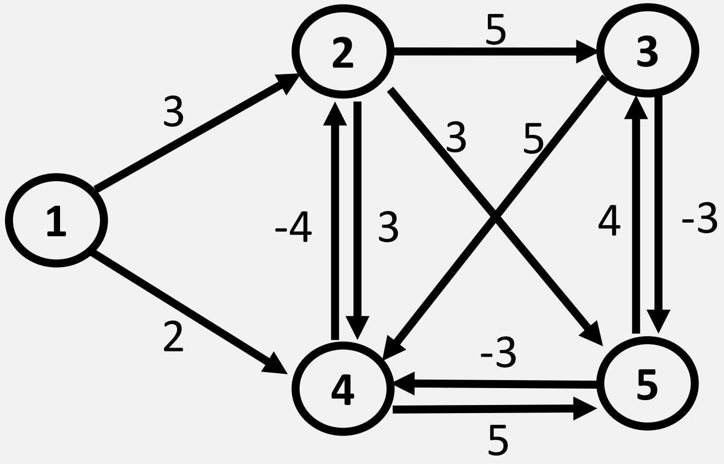
$f_6(1) = f_5(1) + a_{11} = 0$

$f_6(2) = max\{f_5(1) + a_{12}, f_5(3) + a_{32}, f_5(4) + a_{42}, \cancel{f_5(5) + a_{52}}\} = 9$

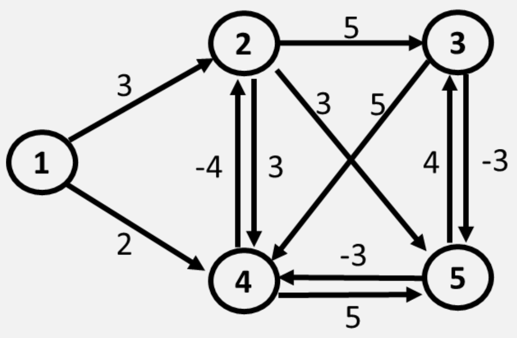
$f_6(3) = max\{f_5(1) + a_{13}, f_5(2) + a_{23}, f_5(4) + a_{43}, \cancel{f_4(5) + a_{53}}\} = 14$

$f_6(4) = max\{f_5(1) + a_{14}, f_5(2) + a_{24}, f_5(3) + a_{34}, \cancel{f_4(5) + a_{54}}\} = 19$

$f_6(5) = max\{f_5(1) + a_{15}, f_5(2) + a_{25}, f_4(3) + a_{35}, f_5(4) + a_{45}\} = \underline{18}$



## ▪ Βέλτιστη διαδρομή μέγιστου κέρδους




Με 0 βήματα (δηλ. ελέγχω το $f_0(5)$) : δεν γίνεται

Με 1 βήμα (δηλ. ελέγχω το $f_1(5)$) : δεν γίνεται

Με 2 βήματα (δηλ. ελέγχω το $f_2(5)$) : $\mathbf{1} \to \mathbf{4} \to \mathbf{5}$ μέγιστο κέρδος $\mathbf{7}$

Με 3 βήματα (δηλ. ελέγχω το $f_3(5)$) : $\mathbf{1} \to \mathbf{2} \to \mathbf{4} \to \mathbf{5}$ μέγιστο κέρδος $\mathbf{11}$

Με 4 βήματα (δηλ. ελέγχω το $f_4(5)$) : $\mathbf{1} \to \mathbf{2} \to \mathbf{3} \to \mathbf{4} \to \mathbf{5}$ μέγιστο κέρδος $\mathbf{18}$

Με 5 βήματα (δηλ. ελέγχω το $f_5(5)$) : $\mathbf{1} \to \mathbf{2} \to \mathbf{3} \to \mathbf{4} \to \mathbf{5}$ μέγιστο κέρδος $\mathbf{18}$

Με 6 βήματα (δηλ. ελέγχω το $f_6(5)$) : $\mathbf{1} \to \mathbf{2} \to \mathbf{3} \to \mathbf{4} \to \mathbf{5}$ μέγιστο κέρδος $\mathbf{18}$

**Εφόσον δεν υπάρχει καμμία μείωση στις βέλτιστες διαδρομή, ελέγχω αν μειώνεται το κέρδος για μεγαλύτερο πλήθος βημάτων**

- $\boldsymbol{i = 7}$

$$f_7(1) = f_6(1) + a_{11} = 0$$

$$f_7(2) = max\{f_6(1) + a_{12}, f_6(3) + a_{32}, f_6(4) + a_{42}, \cancel{f_6(5) + a_{52}}\} = 15$$

$$f_7(3) = max\{f_6(1) + a_{13}, f_6(2) + a_{23}, f_6(4) + a_{43}, \cancel{f_6(5) + a_{53}}\} = 14$$

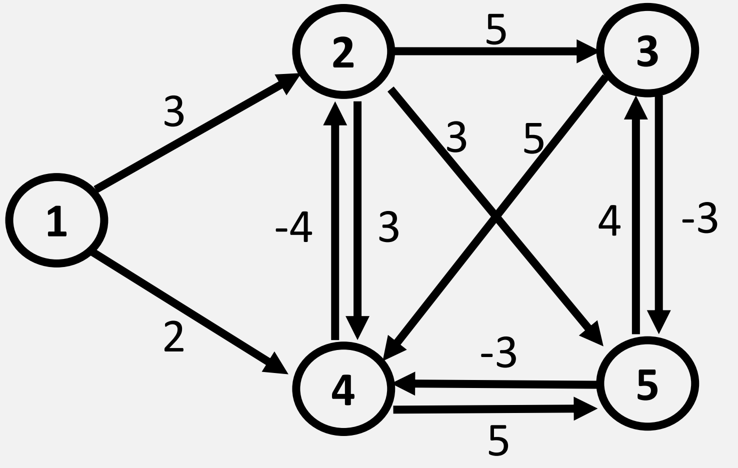
$$f_7(4) = max\{f_6(1) + a_{14}, f_6(2) + a_{24}, f_6(3) + a_{34}, \cancel{f_6(5) + a_{54}}\} = 19$$

$$f_7(5) = max\{f_6(1) + a_{15}, f_6(2) + a_{25}, f_6(3) + a_{35}, \underline{f_6(4) + a_{45}}\} = \underline{24}$$

Με 7 βήματα : **1→ 2→ 3→ $\boxed{\textbf{4→ 2}}$ → 3→ 4 → 5**

με μέγιστο κέρδος **24**

**μια μείωση**



- $i = 8$

$f_8(5) = max\{f_7(1) + a_{15}, f_7(2) + a_{25}, f_7(3) + a_{35}, \underline{f_7(4) + a_{45}}\} = \underline{24}$ **μέγιστο κέρδος**

- $i = 9$

$f_9(5) = max\{f_8(1) + a_{15}, f_8(2) + a_{25}, f_8(3) + a_{35}, f_8(4) + a_{45}\} = \underline{24}$ **μέγιστο κέρδος**

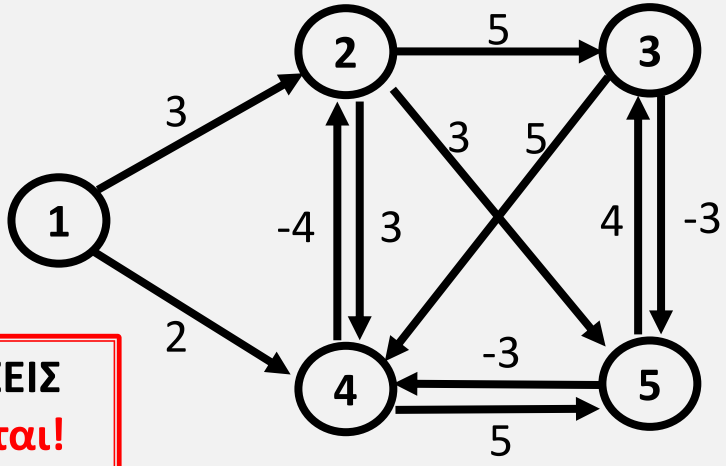
Με 8 και 9 βήματα : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \boxed{4 \rightarrow 2} \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ **μια μείωση**

- $i = 10$

$f_{10}(5) = max\{f_9(1) + a_{15}, f_9(2) + a_{25}, f_9(3) + a_{35},$
$f_9(4) + a_{45}\} = \underline{30}$ **μέγιστο κέρδος**

Με 10 βήματα :

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \boxed{4 \rightarrow 2} \rightarrow 3 \rightarrow \boxed{4 \rightarrow 2} \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ **ΔΥΟ ΜΕΙΩΣΕΙΣ Απορρίπτεται!**



## 4) Το πρόβλημα της μετάβασης σε όλους τους κόμβους του δικτυωτού - επαναφοράς στον αρχικό κόμβο (Το πρόβλημα του πλανόδιου εμπόρου)

Έστω ότι έχουμε ένα δικτυωτό με $N$ κόμβους, αριθμημένους από το $1$ ως το $N$, με $a_{ij}$ το κόστος της απόστασης μεταξύ των κόμβων $i$ και $j$.
Θέλουμε να ξεκινήσουμε από τον κόμβο $1$, να μεταβούμε σε όλους τους κόμβους του δικτυωτού και πιθανόν να επιστρέψουμε και στον αρχικό κόμβο $1$.

**Το πρόβλημα**

Θέλουμε να βρούμε την σειρά μετάβασης σε όλους τους κόμβους ώστε το κόστους της διαδρομής να είναι ελάχιστο.

- **Επιτρέπονται θετικές και αρνητικές τιμές στα τόξα.**
- **Είναι η μόνη μέθοδος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί αν το ζητούμενο είναι να περάσουμε από συγκεκριμένους κόμβους.**

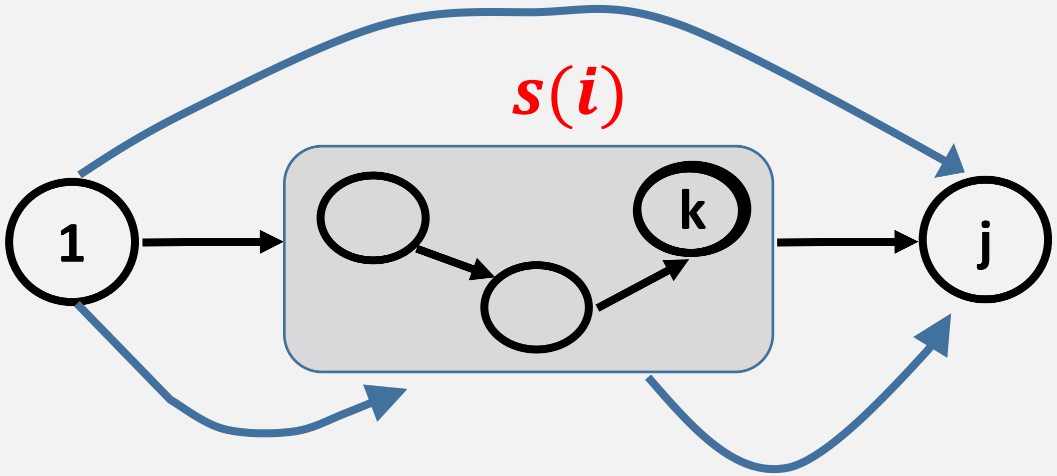
## Άσκηση

Να βρεθεί η διαδρομή ελάχιστου κόστους από τον κόμβο **1** στον κόμβο **5**, αν πρέπει να περάσουμε από όλους τους κόμβους.

| $i \backslash j$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| **2** | 4 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| **3** | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| **4** | 3 | 3 | 2 | 0 | 2 |
| **5** | 5 | 4 | 1 | 1 | 0 |

**Βέλτιστη συνάρτηση**

$f_i(j, s(i)) = \{$η τιμή της βέλτιστης διαδρομής (ελάχιστου κόστους) από τον κόμβο $\mathbf{1}$ στον κόμβο $j$, περνώντας από τους ενδιάμεσους κόμβους του συνόλου $s(i)\}$




Ανάλογα με το ποιος είναι ο τελευταίος κόμβος πριν από τον $j$, θα έχω και ανάλογο πλήθος διαδρομών. Όσοι είναι οι ενδιάμεσοι κόμβοι, τόσες διαδρομές πρέπει να εξετάσουμε και να πάρουμε την καλύτερη.

**Επαναληπτική σχέση**

Θα περάσουμε από όλους τους κόμβους του $s(i)$ εκτός από έναν, τον $k$, και από τον $k$ με ένα ακόμα βήμα θα πάμε στον κόμβο $j$.

Για να βρω το $i$, χρειάζομαι το $i-1$, άρα χρησιμοποιούμε την προς τα εμπρός μέθοδο.

$$\boxed{f_i(j, s(i)) = min_{k \in s(i)}\{f_{i-1}\big(k, s(i-1)\big) + a_{kj}\}}$$

Δηλ. θέλουμε το $min$ των δυνατών κόμβων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως τελευταίους πριν βγούμε από το $s(i)$, δηλ. των κόμβων $k$.

Προφανώς $s(i-1) \subseteq s(i)$

## Οριακές συνθήκες

$$\boxed{\boldsymbol{f_0(j,-) = a_{1j},\ j = 2, \dots, N}}$$

Έχω 0 ενδιάμεσους κόμβους, άρα $\emptyset$.

π.χ. $\boldsymbol{f_0(2,-)}$: το ελάχιστο κόστος μετάβασης από τον κόμβο $\mathbf{1}$ στον κόμβο $\mathbf{2}$ χρησιμοποιώντας 0 ενδιάμεσους κόμβους (δηλ. απευθείας)

## Άσκηση

Να βρεθεί η διαδρομή ελάχιστου κόστους από τον κόμβο **1** στον κόμβο **5**, αν πρέπει να περάσουμε από όλους τους κόμβους.

| $i \backslash j$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| **2** | 4 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| **3** | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| **4** | 3 | 3 | 2 | 0 | 2 |
| **5** | 5 | 4 | 1 | 1 | 0 |

## Λύση

- Για $\boldsymbol{i = 0}$ $(j = 2,3,4,\cancel{5})$

$$f_0(2) = a_{12} = 2$$

$$f_0(3) = a_{13} = 1$$

$$f_0(4) = a_{14} = 3$$

$$\cancel{f_0(5) = a_{15} = 1}$$

- Για $\boldsymbol{i = 1}$ (έχουμε έναν ενδιάμεσο κόμβο)

$$\left.\begin{aligned} f_1(2,\{3\}) &= f_0(3) + a_{32} = 1 + 1 = 2 \\ f_1(2,\{4\}) &= f_0(4) + a_{42} = 3 + 3 = 6 \\ f_1(2,\{5\}) &= f_0(5) + a_{52} = 1 + 4 = 5 \end{aligned}\right\} \text{κόμβος } \mathbf{2}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(3,\{2\}) &= f_0(2) + a_{23} = 2 + 1 = 3 \\ f_1(3,\{4\}) &= f_0(4) + a_{43} = 3 + 2 = 5 \\ f_1(3,\{5\}) &= f_0(5) + a_{53} = 1 + 1 = 2 \end{aligned}\right\} \text{κόμβος } \mathbf{3}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(4,\{2\}) &= f_0(2) + a_{24} = 2 + 2 = 4 \\ f_1(4,\{3\}) &= f_0(3) + a_{34} = 1 + 1 = 2 \\ f_1(4,\{5\}) &= f_0(5) + a_{54} = 1 + 1 = 2 \end{aligned}\right\} \text{κόμβος } \mathbf{4}$$

| $i$ \ $j$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| **2** | 4 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| **3** | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| **4** | 3 | 3 | 2 | 0 | 2 |
| **5** | 5 | 4 | 1 | 1 | 0 |

$$\left.\begin{aligned}
f_1(5,\{2\}) &= f_0(2) + a_{25} = 2 + 1 = 3\\
f_1(5,\{3\}) &= f_0(3) + a_{35} = 1 + 2 = 3\\
f_1(5,\{4\}) &= f_0(4) + a_{45} = 3 + 2 = 5
\end{aligned}\right\} \text{κόμβος } \mathbf{5}$$

| *i* \ *j* | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| **2** | 4 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| **3** | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| **4** | 3 | 3 | 2 | 0 | 2 |
| **5** | 5 | 4 | 1 | 1 | 0 |

- Για $\boldsymbol{i = 2}$ (έχουμε δύο ενδιάμεσους κόμβους)

| $i \backslash j$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| **2** | 4 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| **3** | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| **4** | 3 | 3 | 2 | 0 | 2 |
| **5** | 5 | 4 | 1 | 1 | 0 |

<u>Κόμβος **2**</u>

$$f_2(2,\{3,4\}) = \min\{f_1(3,\{4\}) + a_{32}, f_1(4,\{3\}) + a_{42}\}$$
$$= \min\{5+1, 2+3\} = 5$$

$$f_2(2,\{3,5\}) = \min\{f_1(3,\{5\}) + a_{32}, f_1(5,\{3\}) + a_{52}\}$$
$$= \min\{2+1, 3+4\} = 3$$

$$f_2(2,\{4,5\}) = \min\{f_1(4,\{5\}) + a_{42}, f_1(5,\{4\}) + a_{52}\}$$
$$= \min\{2+3, 5+4\} = 5$$

<u>Κόμβος **3**</u>

$$f_2(3,\{2,4\}) = \min\{f_1(2,\{4\}) + a_{23}, f_1(4,\{2\}) + a_{43}\} = \min\{6+1, 4+2\} = 6$$
$$f_2(3,\{2,5\}) = \min\{f_1(2,\{5\}) + a_{23}, f_1(5,\{2\}) + a_{53}\} = \min\{5+1, 3+1\} = 4$$
$$f_2(3,\{4,5\}) = \min\{f_1(4,\{5\}) + a_{43}, f_1(5,\{4\}) + a_{53}\} = \min\{2+2, 5+1\} = 4$$

Κόμβος **4**

$$f_2(4,\{2,3\}) = \min\{f_1(3,\{2\}) + a_{34}, f_1(2,\{3\}) + a_{24}\}$$
$$= \min\{3+1, 2+2\} = 4$$

$$f_2(4,\{3,5\}) = \min\{f_1(3,\{5\}) + a_{34}, f_1(5,\{3\}) + a_{54}\}$$
$$= \min\{2+1, 3+1\} = 3$$
$$f_2(4,\{2,5\}) = \min\{f_1(2,\{5\}) + a_{24}, f_1(5,\{2\}) + a_{54}\}$$
$$= \min\{5+2, 3+1\} = 4$$

Κόμβος **5**

$$f_2(5,\{2,3\}) = \min\{f_1(2,\{3\}) + a_{25}, f_1(3,\{2\}) + a_{35}\} = \min\{2+1, 3+2\} = 3$$
$$f_2(5,\{2,4\}) = \min\{f_1(2,\{4\}) + a_{25}, f_1(4,\{2\}) + a_{45}\} = \min\{6+1, 4+2\} = 6$$
$$f_2(5,\{3,4\}) = \min\{f_1(3,\{4\}) + a_{35}, f_1(4,\{3\}) + a_{45}\} = \min\{5+2, 2+2\} = 4$$

| $i \backslash j$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| **2** | 4 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| **3** | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| **4** | 3 | 3 | 2 | 0 | 2 |
| **5** | 5 | 4 | 1 | 1 | 0 |

- Για $\boldsymbol{i = 3}$ (έχουμε τρεις ενδιάμεσους κόμβους)

$$f_3(5,\{2,3,4\}) = \min\{\boldsymbol{f_2(2,\{3,4\}) + a_{25}}, f_2(3,\{2,4\}) + a_{35}, \boldsymbol{f_2(4,\{2,3\}) + a_{45}}\}$$
$$= \min\{\boldsymbol{5+1}, 6+2, \boldsymbol{4+2}\} = \boldsymbol{6}$$

Βέλτιστες διαδρομές με κόστος **6**:

$\boldsymbol{1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 5}$

$\boldsymbol{1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5}$

$\boldsymbol{1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 5}$

| $i$ \ $j$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| **2** | 4 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| **3** | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| **4** | 3 | 3 | 2 | 0 | 2 |
| **5** | 5 | 4 | 1 | 1 | 0 |

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Σε περίπτωση που θέλουμε να επιστρέψουμε στον αρχικό κόμβο, θα πρέπει να υπολογιστεί η τιμή:

$f_3(5, \{2,3,4\}) + a_{51} = 6 + 5 = \mathbf{11}$ (ελάχιστο κόστος διαδρομής)

και οι βέλτιστες διαδρόμές είναι:

$\mathbf{1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1}$

$\mathbf{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1}$

$\mathbf{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1}$

| $i \backslash j$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| **2** | 4 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| **3** | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| **4** | 3 | 3 | 2 | 0 | 2 |
| **5** | 5 | 4 | 1 | 1 | 0 |

**ΆΣΚΗΣΗ**

Με τα δεδομένα της προηγούμενης άσκησης, ένας πωλητής ξεκινά από την πόλη 1, θέλει να επισκεφθεί 4 πόλεις και να επιστρέψει πάλι στην πόλη 1. Να βρεθεί η διαδρομή ελαχίστου κόστους.

| $i \backslash j$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| **2** | 4 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| **3** | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| **4** | 3 | 3 | 2 | 0 | 2 |
| **5** | 5 | 4 | 1 | 1 | 0 |

# Βιβλιογραφία


1) Π.-Χ. Βασιλείου (2001) Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Ζήτη.
2) Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Ν. Τσάντας (1998) Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη.