Στοχαστικές Στρατηγικές

Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ

6η ενότητα: **Το γενικό πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής (2)**

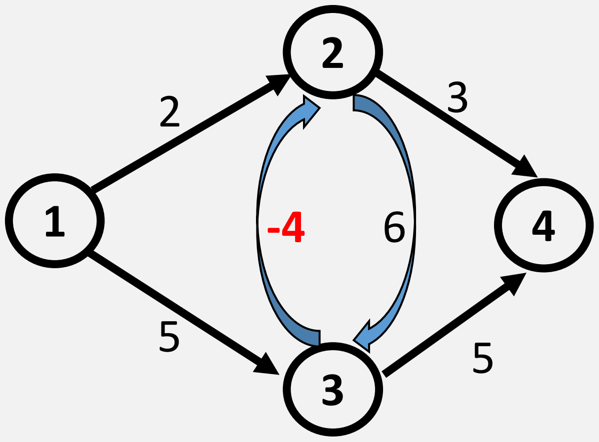
Παπάνα Αγγελική

Μεταδιδακτορική ερευνήτρια, ΑΠΘ & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

E-mail: angeliki.papana@gmail.com, agpapana@auth.gr

Webpage: http://users.auth.gr/agpapana

2) Η μέθοδος των βημάτων



Η μέθοδος Dijkstra μπορεί να εφαρμοστεί μόνο αν οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Η μέθοδος των βημάτων εφαρμόζεται σε κυκλικά δικτυωτά ανεξάρτητα αν τα τόξα έχουν θετικές ή αρνητικές τιμές.

Βέλτιστη συνάρτηση για $\boldsymbol{i = 1, 2, 3, .., N}$

$f_i(k) = \{$το ελάχιστο κόστος διαδρομής από τον κόμβο $\mathbf{1}$ στον κόμβο $\boldsymbol{k}$, όταν $\boldsymbol{i}$ ή λιγότερα τόξα πρέπει να χρησιμοποιηθούν$\}$

***Γενικά**: με $\boldsymbol{L}$ το πολύ βήματα ($\boldsymbol{L} \in \mathbb{N}^*$)

Επαναληπτική σχέση

$$\boxed{f_i(k) = \min_{j \neq k}\{f_{i-1}(j) + a_{jk}\}}$$

$i = 1, 2, 3, .., L$, όπου $L \in \mathbb{N}^*$

L: ο μέγιστος αριθμός βημάτων

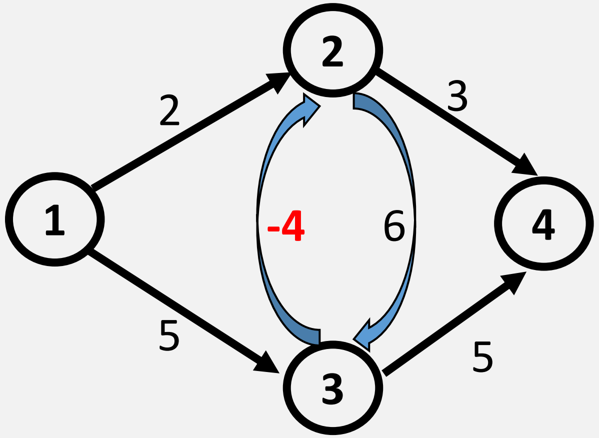
$k = 2, 3, .., N$

Οριακές συνθήκες

$$\boxed{f_0(k) = \begin{cases} 0, & \alpha\nu \;\; k = 1 \\ \infty, & \alpha\nu \;\; k \neq 1 \end{cases}}$$

Αν $k = 1$ και $j = 1, .., N$:

$$\boxed{f_i(1) = \min\{f_{i-1}(j) + a_{j1}\}}$$



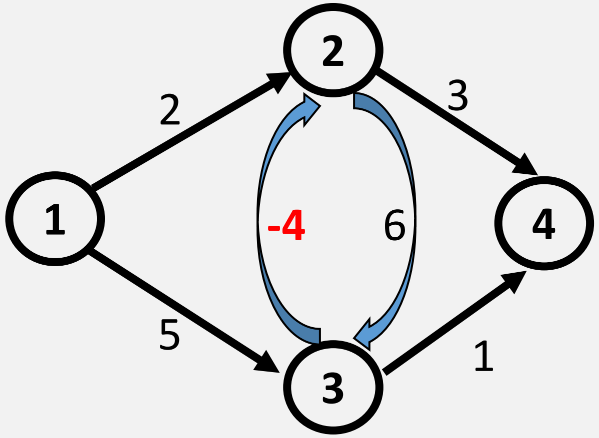
$a_{32} = -4$:

Το αρνητικό κόστος εκφράζει κέρδος.

Άσκηση

Να βρεθεί η διαδρομή ελάχιστου κόστους από τον κόμβο **1** στον κόμβο **4** με **4 το πολύ βήματα**.

Λύση



- **Οριακές συνθήκες**

Για $\boldsymbol{i = 0}$ και $\mathbf{L = 1, 2, 3, 4}$:

$$f_0(1) = 0$$
$$f_0(2) = \infty$$
$$f_0(3) = \infty$$
$$f_0(4) = \infty$$

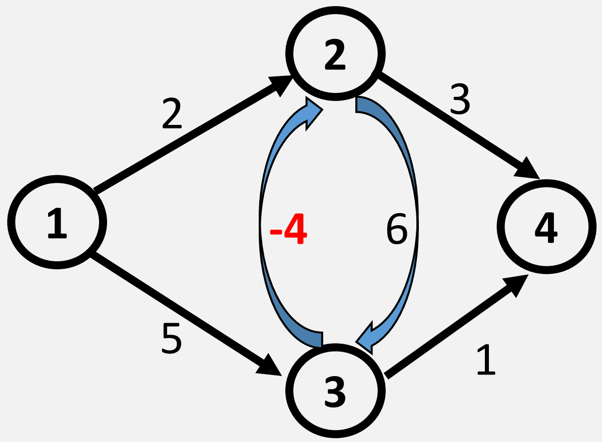
- Για $\boldsymbol{i = 1}$ και $\mathbf{L = 1, 2, 3, 4}$:

$$f_1(1) = \min\{f_0(1) + a_{11}, f_0(2) + a_{21}, f_0(3) + a_{31}, f_0(4) + a_{41}\}$$
$$= \min\{0 + 0, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty\} = 0$$

$$f_1(2) = \min\{f_0(1) + a_{12}, f_0(3) + a_{32}, f_0(4) + a_{42}\}$$
$$= \min\{0 + 2, \infty - 4, \infty + \infty\} = 2$$

$$f_1(3) = \min\{f_0(1) + a_{13}, f_0(2) + a_{23}, f_0(4) + a_{43}\}$$
$$= \min\{0 + 5, \infty + 6, \infty + \infty\} = 5$$

$$f_1(4) = \min\{f_0(1) + a_{14}, f_0(2) + a_{24}, f_0(3) + a_{34}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, \infty + 3, \infty + 1\} = \infty$$



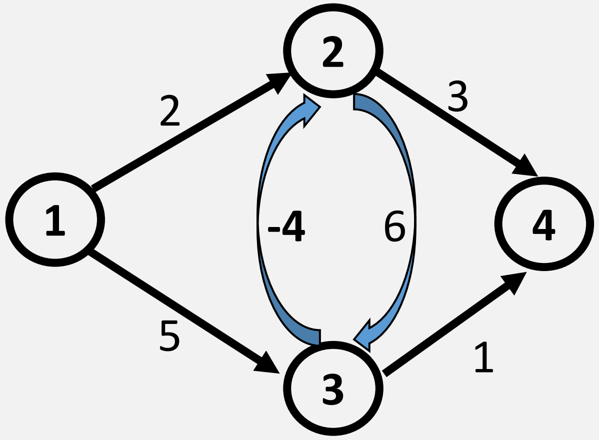
- Για $\boldsymbol{i = 2}$ και $\mathbf{L = 1, 2, 3, 4}$:

$$f_2(1) = \min\{f_1(1) + a_{11}, f_1(2) + a_{21}, f_1(3) + a_{31}, f_1(4) + a_{41}\}$$
$$= \min\{0 + 0, 2 + \infty, 5 + \infty, \infty + \infty\} = 0$$

$$f_2(2) = \min\{f_1(1) + a_{12}, f_1(3) + a_{32}, f_1(4) + a_{42}\}$$
$$= \min\{0 + 2, 5 - 4, \infty + \infty\} = 1$$

$$f_2(3) = \min\{f_1(1) + a_{13}, f_1(2) + a_{23}, f_1(4) + a_{43}\}$$
$$= \min\{0 + 5, 2 + 6, \infty + \infty\} = 5$$

$$f_2(4) = \min\{f_1(1) + a_{14}, f_1(2) + a_{24}, f_1(3) + a_{34}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, 2 + 3, 5 + 1\} = 5$$



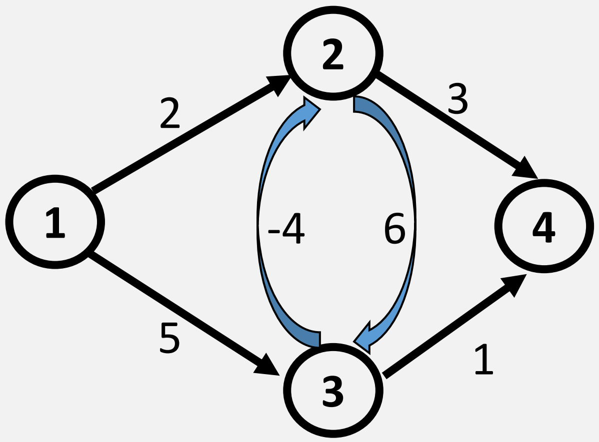
- Για $\boldsymbol{i = 3}$ και $\mathbf{L = 1, 2, 3, 4}$:

$$f_3(1) = \min\{f_2(1) + a_{11}, f_2(2) + a_{21}, f_2(3) + a_{31}, f_2(4) + a_{41}\}$$
$$= \min\{0 + 0, 1 + \infty, 5 + \infty, 5 + \infty\} = 0$$

$$f_3(2) = \min\{f_2(1) + a_{12}, f_2(3) + a_{32}, f_2(4) + a_{42}\}$$
$$= \min\{0 + 2, 5 - 4, 5 + \infty\} = 1$$

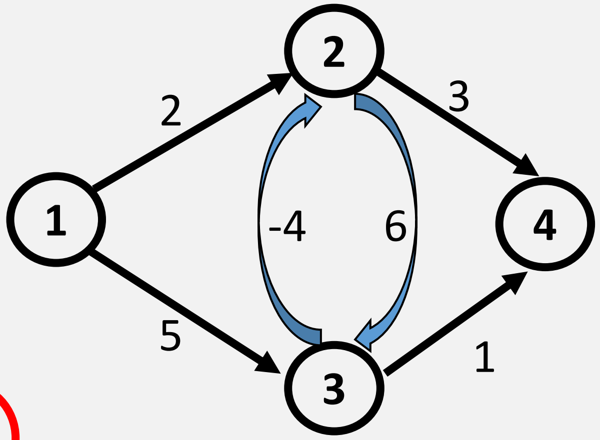
$$f_3(3) = \min\{f_2(1) + a_{13}, f_2(2) + a_{23}, f_2(4) + a_{43}\}$$
$$= \min\{0 + 5, 1 + 6, 5 + \infty\} = 5$$

$$f_3(4) = \min\{f_2(1) + a_{14}, f_2(2) + a_{24}, f_2(3) + a_{34}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, 1 + 3, 5 + 1\} = 4$$



- Για $\boldsymbol{i = 4}$ και $\mathbf{L = 4}$:

$$f_4(4) = min\{f_3(1) + a_{14}, f_3(2) + a_{24}, f_3(3) + a_{34}\}$$
$$= min\{0 + \infty, 1 + 3{,}5 + 1\} = 4$$



Για να βρούμε την ελάχιστη διαδρομή:

$$\boldsymbol{f_4(4)} = \min\{f_3(1) + a_{14}, \boldsymbol{f_3(2)} + \boxed{\boldsymbol{a_{24}}}, f_3(3) + a_{34}\} = \boldsymbol{4}$$

$$\boldsymbol{f_3(2)} = \min\{f_2(1) + a_{12}, \boldsymbol{f_2(3)} + \boxed{\boldsymbol{a_{32}}}, f_2(4) + a_{42}\} = \boldsymbol{1}$$

$$\boldsymbol{f_2(3)} = \min\{\boldsymbol{f_1(1)} + \boxed{\boldsymbol{a_{13}}}, f_1(2) + a_{23}, f_1(4) + a_{43}\} = \boldsymbol{5}$$

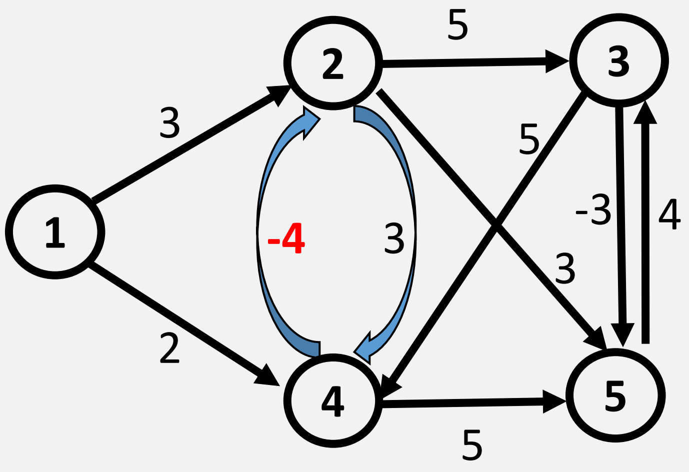
Ελάχιστο κόστος διαδρομής = 4

Η βέλτιστη διαδρομή είναι:

$$\mathbf{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4}$$

Άσκηση

Να βρεθεί η διαδρομή ελάχιστου κόστους από τον κόμβο **1** στον **5**, **με 4 το πολύ βήματα**. Οι τιμές στα τόξα παριστάνουν κόστος.



Λύση

Βέλτιστη συνάρτηση για $\boldsymbol{k} = \mathbf{1, 2, 3, .., N}$

$\boldsymbol{f_i(k)} = \{$το ελάχιστο κόστος διαδρομής από τον κόμβο **1** στον κόμβο $\boldsymbol{k}$, με $\boldsymbol{i}$ το πολύ βήματα$\}$

Επαναληπτική σχέση

$$\boxed{\boldsymbol{f_i(k) = min_{j \neq k}\{f_{i-1}(j) + a_{jk}\}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f_i(1) = min\{f_{i-1}(j) + a_{j1}\}}}$$

Οριακές συνθήκες

$$\boxed{\boldsymbol{f_0(k)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \alpha\nu \;\; k = 1 \\ \infty, & \alpha\nu \;\; k \neq 1 \end{cases}}$$

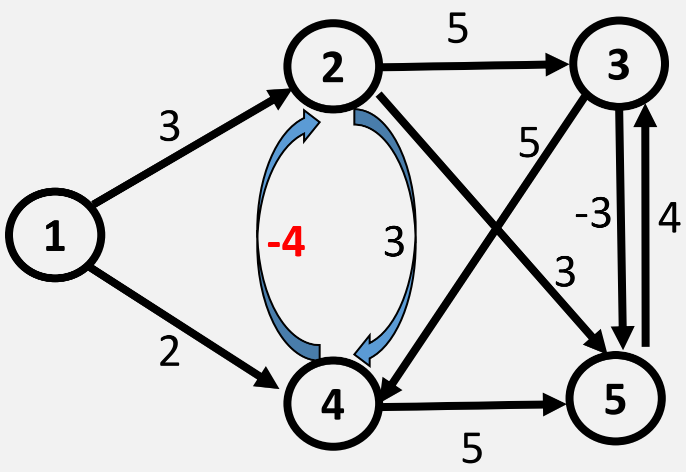
Λύση

- **Οριακές συνθήκες**

  Για $\boldsymbol{i = 0}$ και $\boldsymbol{k = 1, 2, 3, 4, 5}$:

$$f_0(1) = 0$$

$$f_0(2) = f_0(3) = f_0(4) = f_0(5) = \infty$$



- Για $\boldsymbol{i = 1}$:

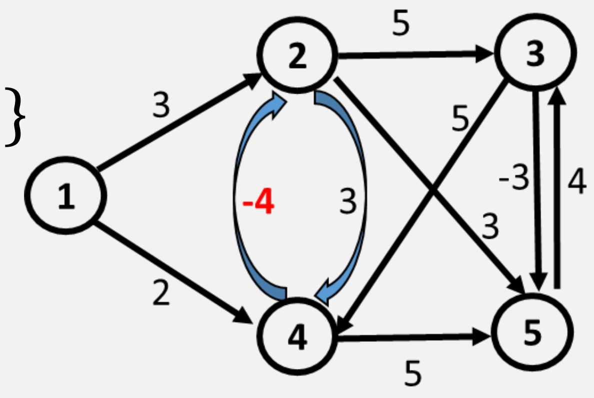
$$f_1(1) = \min\{f_0(1) + a_{11}, f_0(2) + a_{21}, f_0(3) + a_{31}, f_0(4) + a_{41}, f_0(5) + a_{51}\}$$
$$= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

$$f_1(2) = \min\{f_0(1) + a_{12}, f_0(3) + a_{32}, f_0(4) + a_{42}, f_0(5) + a_{52}\}$$
$$= \min\{3, \infty, \infty, \infty\} = 3$$

$$f_1(3) = \min\{f_0(1) + a_{13}, f_0(2) + a_{23}, f_0(4) + a_{43}, f_0(5) + a_{53}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, \infty, \infty\} = \infty$$

$$f_1(4) = \min\{f_0(1) + a_{14}, f_0(2) + a_{24}, f_0(3) + a_{34}, f_0(5) + a_{54}\}$$
$$= \min\{2, \infty, \infty, \infty\} = 2$$

$$f_1(5) = \min\{f_0(1) + a_{15}, f_0(2) + a_{25}, f_0(3) + a_{35}, f_0(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, \infty, \infty\} = \infty$$



- Για $\boldsymbol{i = 2}$:

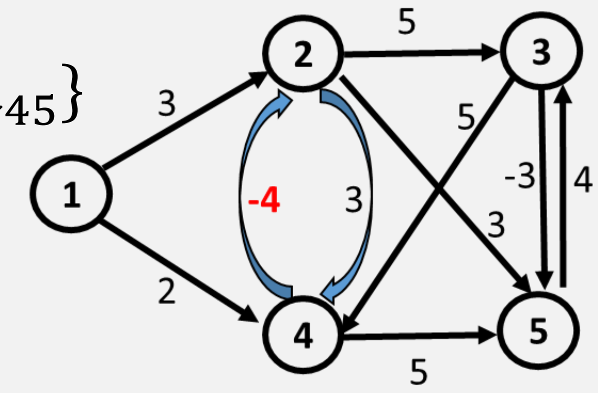
$$f_2(1) = \min\{f_1(1) + a_{11}, f_1(2) + a_{21}, f_1(3) + a_{31}, f_1(4) + a_{41}, f_1(5) + a_{51}\}$$
$$= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

$$f_2(2) = \min\{f_1(1) + a_{12}, f_1(3) + a_{32}, f_1(4) + a_{42}, f_1(5) + a_{52}\}$$
$$= \min\{3, \infty, -2, \infty\} = -2$$

$$f_2(3) = \min\{f_1(1) + a_{13}, f_1(2) + a_{23}, f_1(4) + a_{43}, f_1(5) + a_{53}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, 3 + 5, 2 + \infty, \infty + 4\} = 8$$

$$f_2(4) = \min\{f_1(1) + a_{14}, f_1(2) + a_{24}, f_1(3) + a_{34}, f_1(5) + a_{54}\}$$
$$= \min\{2, 6, \infty, \infty\} = 2$$

$$f_2(5) = \min\{f_1(1) + a_{15}, f_1(2) + a_{25}, f_1(3) + a_{35}, f_1(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{\infty, 6, \infty, 7\} = 6$$



- Για $\boldsymbol{i = 3}$:

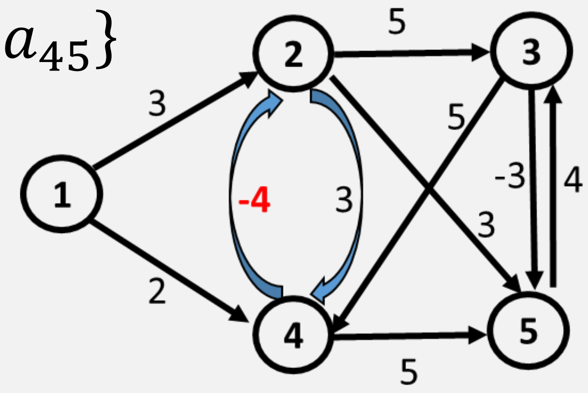
$$f_3(1) = \min\{f_2(1) + a_{11}, f_2(2) + a_{21}, f_2(3) + a_{31}, f_2(4) + a_{41}, f_2(5) + a_{51}\}$$
$$= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

$$f_3(2) = \min\{f_2(1) + a_{12}, f_2(3) + a_{32}, f_2(4) + a_{42}, f_2(5) + a_{52}\}$$
$$= \min\{3, \infty, -2, \infty\} = -2$$

$$f_3(3) = \min\{f_2(1) + a_{13}, f_2(2) + a_{23}, f_2(4) + a_{43}, f_2(5) + a_{53}\}$$
$$= \min\{\infty, 3, \infty, 10\} = 3$$

$$f_3(4) = \min\{f_2(1) + a_{14}, f_2(2) + a_{24}, f_2(3) + a_{34}, f_2(5) + a_{54}\}$$
$$= \min\{2,1,13, \infty\} = 1$$

$$f_3(5) = \min\{f_2(1) + a_{15}, f_2(2) + a_{25}, f_2(3) + a_{35}, f_2(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{\infty, 1,5,7\} = 1$$



- Για $i = 4$:

$$f_4(5) = min\{f_3(1) + a_{15}, f_3(2) + a_{25}, f_3(3) + a_{35}, f_3(4) + a_{45}\}$$
$$= min\{\infty, 1,0,6\} = 0$$

Συνολικό κόστος ελάχιστης διαδρομής = 0

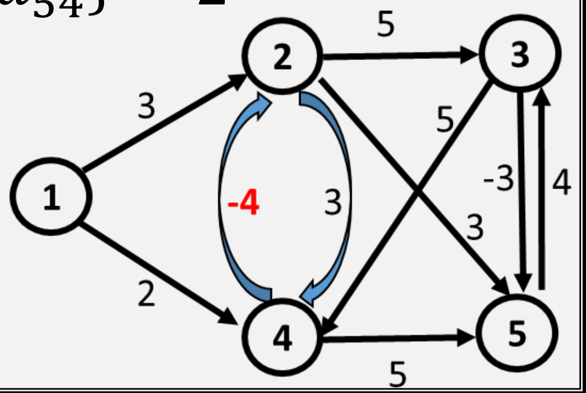
Για να βρούμε την ελάχιστη διαδρομή:

$$\boldsymbol{f_4(5)} = min\{f_3(1) + a_{15}, f_3(2) + a_{25}, \boldsymbol{f_3(3)} + \boxed{\boldsymbol{a_{35}}}, f_3(4) + a_{45}\} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{f_3(3)} = \min\{f_2(1) + a_{13}, \boldsymbol{f_2(2)} + \boxed{\boldsymbol{a_{23}}}, f_2(4) + a_{43}, f_2(5) + a_{53}\} = 3$$

$$\boldsymbol{f_2(2)} = \min\{f_1(1) + a_{12}, f_1(3) + a_{32}, \boldsymbol{f_1(4)} + \boxed{\boldsymbol{a_{42}}}, f_1(5) + a_{52}\} = -2$$

$$\boldsymbol{f_1(4)} = \min\{\boldsymbol{f_0(1)} + \boxed{\boldsymbol{a_{14}}}, f_0(2) + a_{24}, f_0(3) + a_{34}, f_0(5) + a_{54}\} = 2$$

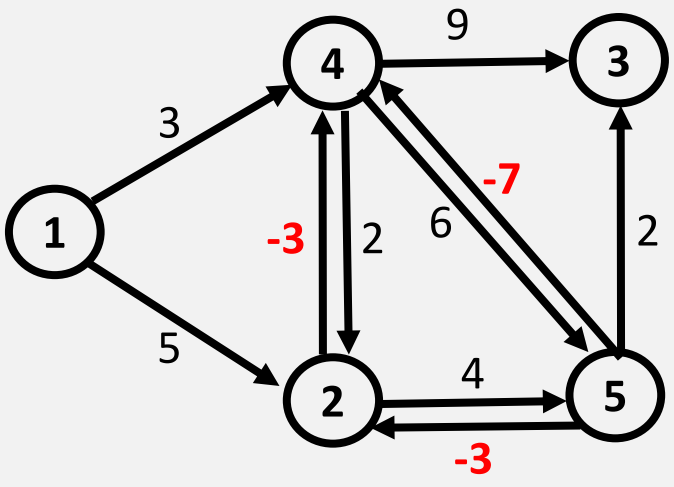


Άρα η διαδρομή ελάχιστου κόστους είναι:

$$\mathbf{1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5}$$

Άσκηση

Να βρεθεί η διαδρομή ελάχιστου κόστους από τον κόμβο **1** στον κόμβο **3**, **σε 5 το πολύ βήματα, περνώντας το πολύ μια φορά από τον κόμβο 5.** Οι τιμές στα τόξα παριστάνουν κόστος.



Λύση

Βέλτιστη συνάρτηση για $k = 1, 2, 3, 4, 5$

$f_i(k) = \{$το ελάχιστο κόστος διαδρομής από τον κόμβο $\mathbf{1}$ στον κόμβο k, με i το πολύ βήματα$\}$

Επαναληπτική σχέση

$$\boxed{f_i(k) = min_{j \neq k}\{f_{i-1}(j) + a_{jk}\}}$$

$$\boxed{f_i(1) = min\{f_{i-1}(j) + a_{j1}\}}$$

Οριακές συνθήκες

$$\boxed{f_0(k) = \begin{cases} 0, & \alpha\nu \;\; k = 1 \\ \infty, & \alpha\nu \;\; k \neq 1 \end{cases}}$$

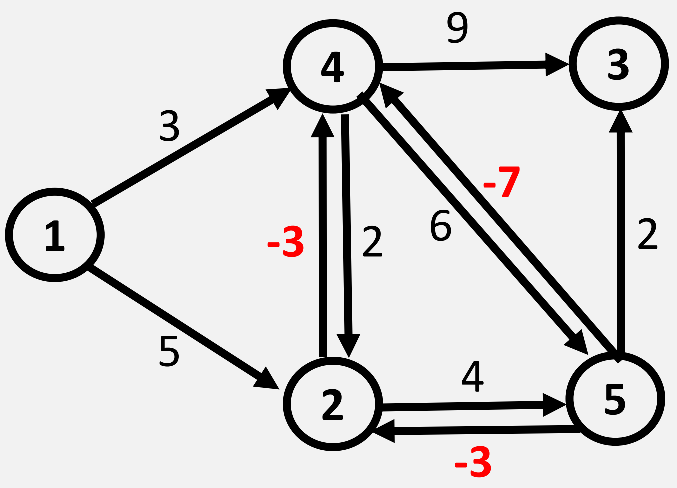
Λύση

- **Οριακές συνθήκες**

Για $\boldsymbol{i = 0}$ και $\boldsymbol{k = 1, 2, 3, 4, 5}$:

$$f_0(1) = 0$$

$$f_0(2) = f_0(3) = f_0(4) = f_0(5) = \infty$$



- Για $\boldsymbol{i = 1}$:

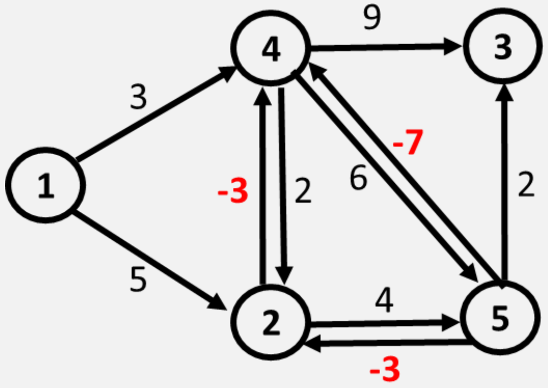
$$f_1(1) = \min\{f_0(1) + a_{11}, f_0(2) + a_{21}, f_0(3) + a_{31}, f_0(4) + a_{41}, f_0(5) + a_{51}\}$$
$$= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

$$f_1(2) = \min\{f_0(1) + a_{12}, f_0(3) + a_{32}, f_0(4) + a_{42}, f_0(5) + a_{52}\}$$
$$= \min\{5, \infty, \infty, \infty\} = 5$$

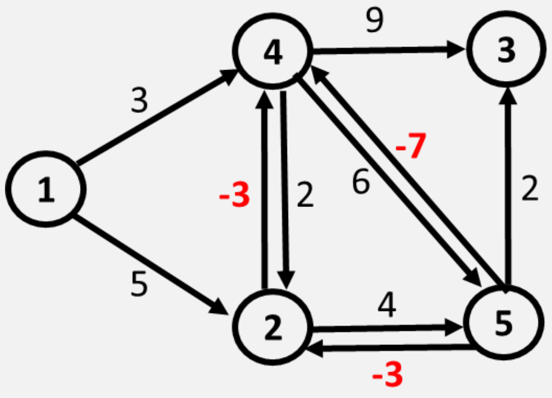
$$f_1(3) = \min\{f_0(1) + a_{13}, f_0(2) + a_{23}, f_0(4) + a_{43}, f_0(5) + a_{53}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, \infty, \infty\} = \infty$$

$$f_1(4) = \min\{f_0(1) + a_{14}, f_0(2) + a_{24}, f_0(3) + a_{34}, f_0(5) + a_{54}\}$$
$$= \min\{3, \infty, \infty, \infty\} = 3$$

$$f_1(5) = \min\{f_0(1) + a_{15}, f_0(2) + a_{25}, f_0(3) + a_{35}, f_0(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, \infty, \infty\} = \infty$$



- Για $\boldsymbol{i = 2}$:



$$f_2(1) = 0$$

$$\begin{aligned} f_2(2) &= \min\{f_1(1) + a_{12}, f_1(3) + a_{32}, f_1(4) + a_{42}, f_1(5) + a_{52}\} \\ &= \min\{5, \infty, 5, \infty\} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(3) &= \min\{f_1(1) + a_{13}, f_1(2) + a_{23}, f_1(4) + a_{43}, f_1(5) + a_{53}\} \\ &= \min\{\infty, \infty, 12, \infty\} = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(4) &= \min\{f_1(1) + a_{14}, f_1(2) + a_{24}, f_1(3) + a_{34}, f_1(5) + a_{54}\} \\ &= \min\{3, 2, \infty, \infty\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(5) &= \min\{f_1(1) + a_{15}, f_1(2) + a_{25}, f_1(3) + a_{35}, f_1(4) + a_{45}\} \\ &= \min\{\infty, 9, \infty, 9\} = 9 \end{aligned}$$

- Για $\boldsymbol{i = 3}$:

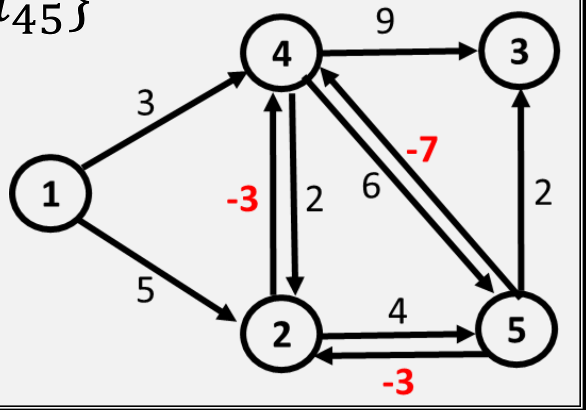
$$f_3(1) = \min\{f_2(1) + a_{11}, f_2(2) + a_{21}, f_2(3) + a_{31}, f_2(4) + a_{41}, f_2(5) + a_{51}\}$$
$$= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

$$f_3(2) = \min\{f_2(1) + a_{12}, f_2(3) + a_{32}, f_2(4) + a_{42}, f_2(5) + a_{52}\}$$
$$= \min\{5, \infty, 4,6\} = 4$$

$$f_3(3) = \min\{f_2(1) + a_{13}, f_2(2) + a_{23}, f_2(4) + a_{43}, f_2(5) + a_{53}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, 11,11\} = 11$$

$$f_3(4) = \min\{f_2(1) + a_{14}, f_2(2) + a_{24}, f_2(3) + a_{34}, f_2\,(5) + a_{54}\}$$
$$= \min\{3,2, \infty, 2\} = 2$$

$$f_3(5) = \min\{f_2(1) + a_{15}, f_2(2) + a_{25}, f_2(3) + a_{35}, f_2\,(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{\infty, 9, \infty, 8\} = 8$$



- Για $\boldsymbol{i = 4}$:

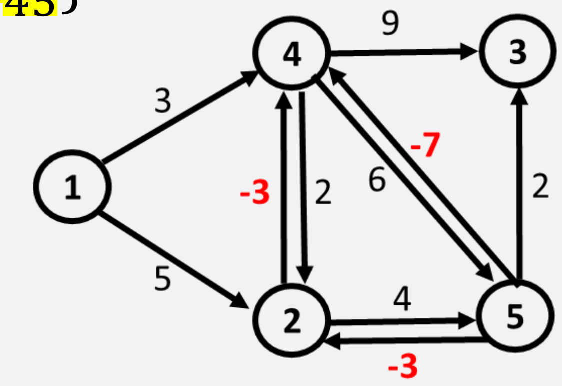
$$f_4(1) = 0$$

$$f_4(2) = \min\{f_3(1) + a_{12}, f_3(3) + a_{32}, f_3(4) + a_{42}, f_3(5) + a_{52}\}$$
$$= \min\{5, \infty, 4{,}5\} = 4$$

$$f_4(3) = \min\{f_3(1) + a_{13}, f_3(2) + a_{23}, f_3(4) + a_{43}, f_3(5) + a_{53}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, 11{,}10\} = 10$$

$$f_4(4) = \min\{f_3(1) + a_{14}, f_3(2) + a_{24}, f_3(3) + a_{34}, f_3(5) + a_{54}\}$$
$$= \min\{3{,}1, \infty, 1\} = 1$$

$$f_4(5) = \min\{f_3(1) + a_{15}, f_3(2) + a_{25}, f_3(3) + a_{35}, f_3(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{\infty, 8, \infty, 8\} = 8$$



- Για $i = 5$:

$$f_5(3) = \min\{f_4(1) + a_{13}, f_4(2) + a_{23}, f_4(4) + a_{43}, f_4(5) + a_{53}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, 10, 10\} = 10$$

Ελάχιστο κόστος διαδρομής = 10

Υπάρχουν 5 διαδρομές με συνολικό κόστος 10:

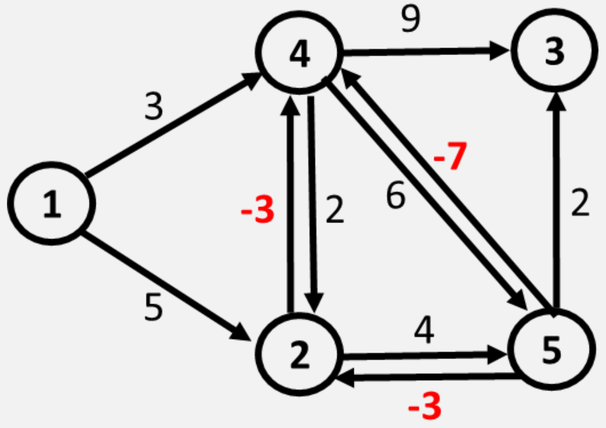
$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3$

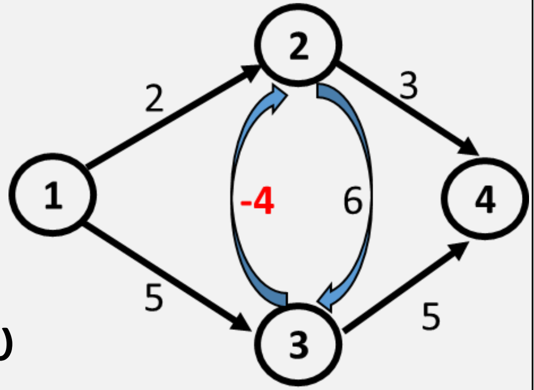


Οι διαδρομές με κόστος 10 που <u>απορρίπτονται</u> είναι: $1 \rightarrow 4 \rightarrow \boxed{5} \rightarrow 4 \rightarrow \boxed{5} \rightarrow 3$ **και** $1 \rightarrow 2 \rightarrow \boxed{5} \rightarrow 4 \rightarrow \boxed{5} \rightarrow 3$

(εμφανίζεται 2 φορές ο κόμβος 5)

3) Η μέθοδος των μειώσεων

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις όπου έχει σημασία η διεύθυνση μετάβασης από κόμβο σε κόμβο και υπάρχει περιορισμός στο πλήθος των μεταβάσεων από μεγαλύτερους σε μικρότερους κόμβους (αλλιώς μπορώ να κάνω ατέρμονα κύκλους μεταξύ συγκεκριμένων κόμβων).



Ορισμός

Λέμε ότι έχουμε μια **μείωση** κατά την μετάβαση από τον κόμβο i στον κόμβο j ($i \rightarrow j$) αν $i > j$.

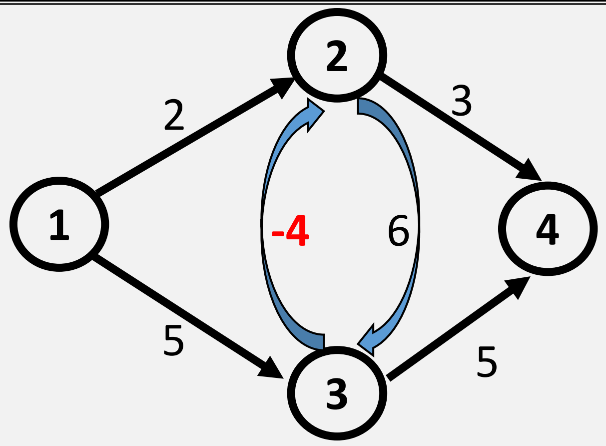
π.χ. στην διαδρομή $\mathbf{1} \rightarrow \boxed{\mathbf{4} \rightarrow \mathbf{2}} \rightarrow \mathbf{3} \rightarrow \mathbf{5}$ έχουμε μια **μείωση** αφού από τον κόμβο **4** μεταβαίνουμε στον κόμβο **2**.

Το πρόβλημα

Να βρεθεί η βέλτιστη διαδρομή από τον κόμβο **1** στον κόμβο N με **μια** το πολύ **μείωση (ή γενικά το πολύ i μειώσεις)**.

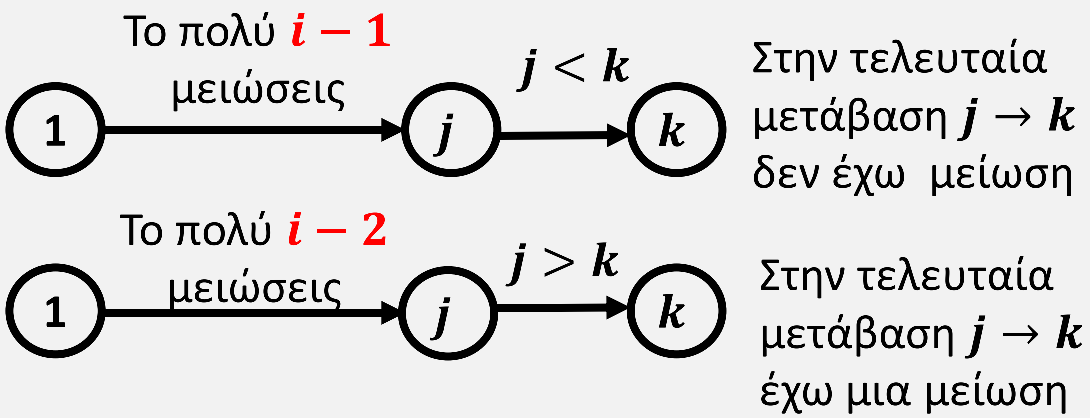
Βέλτιστη συνάρτηση

$g_i(k) = \{$το ελάχιστο κόστος διαδρομής από τον κόμβο 1 στον κόμβο k, μεταξύ όλων των διαδρομών που έχουν $i-1$ ή λιγότερες μειώσεις$\}$



Επαναληπτική σχέση

$$\boxed{g_i(k) = min \begin{cases} min_{j<k}\{g_i(j) + a_{jk}\} \\ min_{j>k}\{g_{i-1}(j) + a_{jk}\} \end{cases}}$$



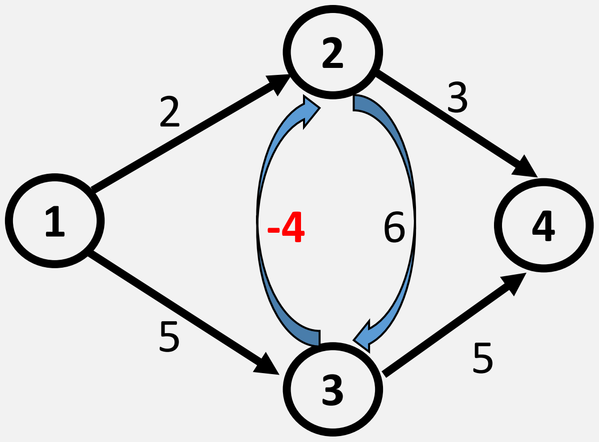
για $i = 1, 2, 3, .., L$, όπου $L \in \mathbb{N}^*$,

L: ο μέγιστος αριθμός μειώσεων

$k = 1, 2, 3, .., N$

Για $k = 1$: (επιτρέπεται $j = k$)

$$\boxed{g_i(1) = min_{j\geq 1}\{g_{i-1}(j) + a_{j1}\}}$$



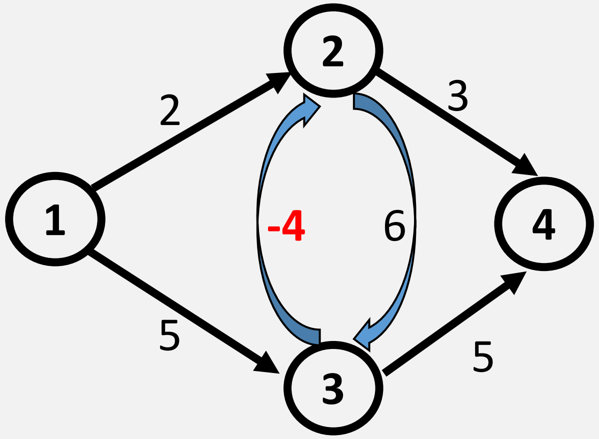
Οριακές συνθήκες

$$g_0(k) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \alpha\nu \;\; k = 1 \\ \infty, & \alpha\nu \;\; k \neq 1 \end{cases}$$

Οριακές συνθήκες: Ορίζονται για $i = 0$ όπου ουσιαστικά έχουμε μηδέν μεταβάσεις από τον κόμβο 1 στον κόμβο k και επιτρέπονται το πολύ $i - 1 = 0 - 1 = -1$ μειώσεις (δηλ. καμία μείωση)

Άσκηση

Στο δικτυωτό του σχήματος, να βρεθεί η βέλτιστη διαδρομή από τον κόμβο **1** στον κόμβο **4** με **μια** το πολύ **μείωση**.



Λύση

Βέλτιστη συνάρτηση

$\boldsymbol{g_i(k)} = \{$το ελάχιστο κόστος διαδρομής από τον κόμβο $\mathbf{1}$ στον κόμβο $\boldsymbol{k}$, μεταξύ όλων των διαδρομών που έχουν $\boldsymbol{i-1}$ ή λιγότερες μειώσεις$\}$

Μια το πολύ μείωση σημαίνει:

$$\boldsymbol{i - 1 = 1} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{i = 2}}$$

- **Οριακές συνθήκες**

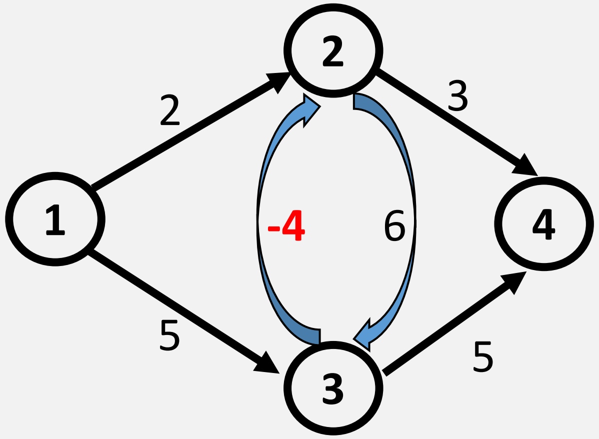
Για $\boldsymbol{i = 0}$ και $\boldsymbol{k = 1, 2, 3, 4}$:

$g_0(1) = 0$

$g_0(2) = \infty$

$g_0(3) = \infty$

$g_0(4) = \infty$



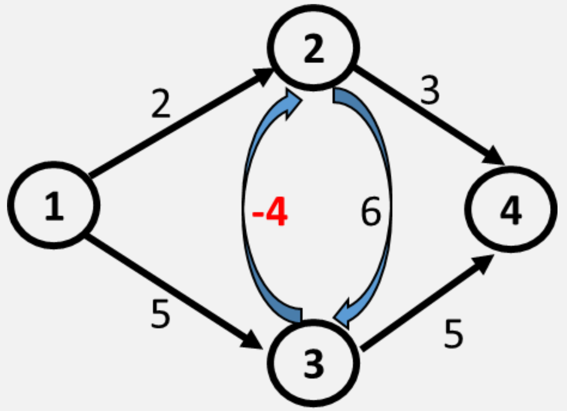
- Για $\boldsymbol{i = 1}$ και $\boldsymbol{k = 1, 2, 3, 4}$:

$$g_1(1) = \min\{g_0(1) + a_{11}, g_0(2) + a_{21}, g_0(3) + a_{31}, g_0(4) + a_{41}\}$$
$$= \min\{0 + 0, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty\} = 0$$

$$g_1(2) = \min\begin{cases}\min\{g_0(3) + a_{32}, g_0(4) + a_{42}\} \\ g_1(1) + a_{12}\end{cases} = \min\begin{cases}\min\{\infty - 4, \infty + \infty\} \\ 0 + 2\end{cases} = 2$$

$$g_1(3) = \min\begin{cases}g_0(4) + a_{43} \\ \min\{g_1(1) + a_{13}, g_1(2) + a_{23}\}\end{cases} = \min\begin{cases}\infty + \infty \\ \min\{0 + 5, 2 + 6\}\end{cases} = 5$$

$$g_1(4) = \min\{g_1(1) + a_{14}, g_1(2) + a_{24}, g_1(3) + a_{34}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, 2 + 3, 5 + 5\} = 5$$



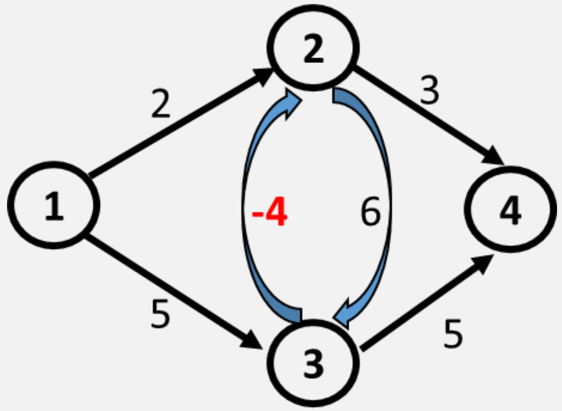
- Για $\boldsymbol{i = 2}$ και $\boldsymbol{k = 1, 2, 3, 4}$:

$$g_2(1) = \min\{g_1(1) + a_{11}, g_1(2) + a_{21}, g_1(3) + a_{31}, g_1(4) + a_{41}\}$$
$$= \min\{0 + 0, 2 + \infty, 5 + \infty, 5 + \infty\} = 0$$

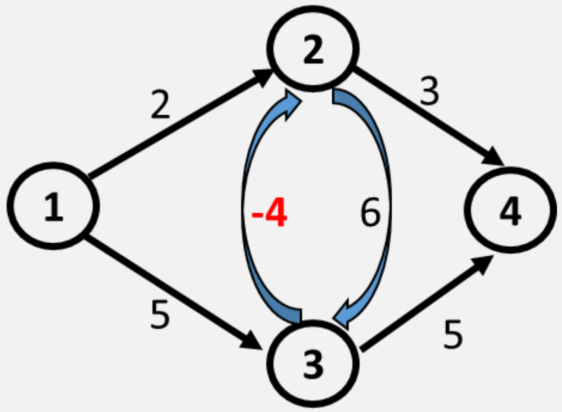
$$g_2(2) = \min\begin{cases} \min\{g_1(3) + a_{32}, g_1(4) + a_{42}\} \\ g_2(1) + a_{12} \end{cases} = \min\begin{cases} \min\{5 - 4, 5 + \infty\} \\ 0 + 2 \end{cases} = 1$$

$$g_2(3) = \min\begin{cases} g_1(4) + a_{43} \\ \min\{g_2(1) + a_{13}, g_2(2) + a_{23}\} \end{cases} = \min\begin{cases} 5 + \infty \\ \min\{0 + 5, 1 + 6\} \end{cases} = 5$$

$$g_2(4) = \min\{g_2(1) + a_{14}, g_2(2) + a_{24}, g_2(3) + a_{34}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, 1 + 3, 5 + 5\} = 4$$



Είναι:



$$\boldsymbol{g_2(4)} = \min\{g_2(1) + a_{14}, \boldsymbol{g_2(2) + a_{24}}, g_2(3) + a_{34}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, \boldsymbol{1 + 3}, 5 + 5\} = \boldsymbol{4}$$

$$\boldsymbol{g_2(2)} = \min \begin{cases} min\{\boldsymbol{g_1(3) + a_{32}}, g_1(4) + a_{42}\} \\ g_2(1) + a_{12} \end{cases} = \boldsymbol{1}$$

$$\boldsymbol{g_1(3)} = \min \begin{cases} g_0(4) + a_{43} \\ min\{\boldsymbol{g_1(1) + a_{13}}, g_1(2) + a_{23}\} \end{cases} = \boldsymbol{5}$$

Άρα η βέλτιστη διαδρομή με μια το πολύ μείωση είναι:

$\boldsymbol{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4}$

με κόστος διαδρομής **4.**

Βιβλιογραφία

1) Π.-Χ. Βασιλείου (2001) Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Ζήτη.
2) Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Ν. Τσάντας (1998) Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη.