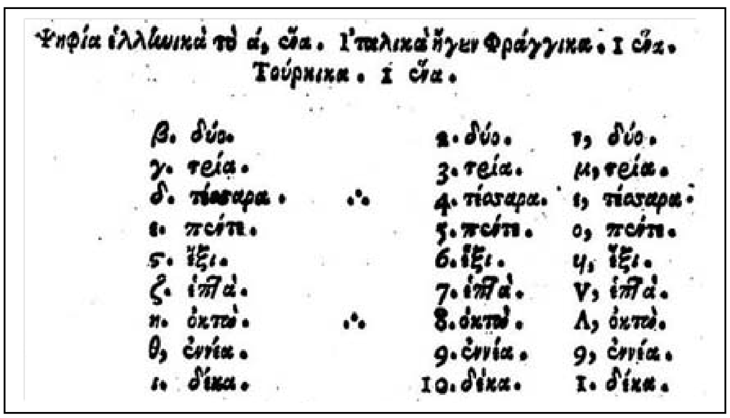
2. ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ *“ΛΟΓΑΡΙΑΣΤΙΚΗΣ”*

Το *“Βιβλίον Πρόχειρον τοις Πασι Περιέχον την Τετρακτικήν Αριθμητικήν ή μαλλον ειπειν την Λογαριαστικήν…”*, που εν συντομία αναφέρεται ως *“**Λογαριαστική**”*, περιλαμβάνει τις εξής ενότητες:

- α. Την αρίθμηση, δηλ. τη σημειογραφία των αριθμών.
- β. Τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις, δηλ. τις διαδικασίες πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης των αριθμών.
- γ. Τα κλάσματα και οι πράξεις τους.
- δ. Τις αριθμητικές μέθοδοι, δηλ. η μέθοδος των τριών, των πέντε και των επτά.
- ε. Τις αριθμητικές εφαρμογές σε περιπτώσεις ποσοτικών υπολογισμών στα πλαίσια συνεταιρισμών, όπως και σε διάφορες μετρήσεις.
- στ. Κάποια αριθμητικά “πνευματώδη” προβλήματα, δηλ. αριθμητικά προβλήματα που έχουν ένα πνεύμα σπαζοκεφαλιάς ή αινίγματος.
- ζ. Κάποια υπολογιστικά ζητήματα για τον προσδιορισμό του Πάσχα και των κινητών εορτών των Χριστιανών.

α. Η αρίθμηση

Η εισαγωγή των πρώτων αριθμητικών ψηφίων γίνεται με τον εξής πίνακα[51]:


Ψηφία ἑλληνικὰ τὸ α, ἕνα. Ἰταλικὰ ἤγουν Φράγγικα. 1 ἕνα. Τούρκικα. ١ ἕνα.

β. δύο.	2. δύο.	٢, δύο.
γ. τρία.	3. τρία.	٣, τρία.
δ. τέσσαρα.	4. τέσσαρα.	٤, τέσσαρα.
ε. πέντε.	5. πέντε.	٥, πέντε.
ϛ. ἕξι.	6. ἕξι.	٦, ἕξι.
ζ. ἑπτά.	7. ἑπτά.	٧, ἑπτά.
η. ὀκτώ.	8. ὀκτώ.	٨, ὀκτώ.
θ, ἐννέα.	9. ἐννέα.	٩, ἐννέα.
ι. δέκα.	10. δέκα.	١٠ δέκα.

Έτσι παρουσιάζονται τα νέα σύμβολα των πρώτων δέκα αριθμών ανάμεσα σε δύο ομάδες αναπαράστασής τους που ήταν, λίγο-πολύ, σε χρήση και γνώριμες στον ελληνικό πληθυσμό της περιόδου εκείνης. Από τη μια η αλφαβητική γραφή τους, αρκετά οικεία στους έλληνες από τη βυζαντινή και την αρχαία ελληνική παράδοση. Και από την άλλη η τουρκική απόδοσή τους, που ήταν μέσα στην καθημερινότητά τους στις Οθωμανικές περιοχές και αρκετά γνωστή στους εμπόρους των βενετοκρατούμενων περιοχών. Με τον τρόπο αυτό δινόταν η ευκαιρία να αντιστοιχηθούν τα νέα σύμβολα των αριθμητικών ψηφίων με τις ήδη ενσωματωμένες και αποδεκτές αναπαραστάσεις τους.

---

[51] Βλ. Βιβλίον Πρόχειρον τοις Πασι Περιέχον την Τετρακτικήν Αριθμητικήν, ή μαλλον ειπειν την Λογαριαστικήν…In Venetia, Appresso Francesco Rampazetto, Ad instantia M. Manoli Glizoni, M D LXIX, φ. 1δ.

Στην πρώτη αυτή επαφή με τα νέα σημάδια των αριθμών, όπως και στη τουρκική παράστασή τους, διαφαίνεται η ιδιαιτερότητα της γραφής του δέκα με δύο σύμβολα, αυτό που εξέφραζε τη μονάδα και δίπλα του ένα καινούργιο σύμβολο. Εύκολα μάλιστα μπορούσε να παρατηρηθεί ότι ενώ στο αλφαβητικό τρόπο γραφής των αρχικών αριθμών, τα σύμβολα τους ήταν δέκα διαφορετικά και αυτόνομα σημάδια, στην αντίστοιχη νέα αναπαράστασή τους, όπως και στην τουρκική, υπήρχε μια επαναχρησιμοποίηση του συμβόλου της μονάδας στο δέκα. Οπότε έπρεπε να δοθούν οι απαραίτητες διευκρινήσεις για τη σημασία του νέου συμβόλου και το ρόλο του. Για το σκοπό αυτό εισάγεται ένας νέος όρος η *νούλα* ως όνομα του νέου σύμβολου, που χρησιμοποιήθηκε σε συνδυασμό με το σύμβολο της μονάδας για την αναπαράσταση του δέκα και είναι παρόμοιο με το γράμμα όμικρον. Ταυτόχρονα περιγράφεται ο ρόλος του ως εξής[52]:

> Γίνωσκε ὅτι ἡ λεγομένη νοῦλα ἥτινα βάζομεν, ἔμπροσθεν εἰς τὸ ἕνα καὶ λογίζεται δέκα αὐτὸ τὸ λέγουσιν ἑλληνικὰ οὐδὲν καὶ δὲν τοῦτο πληροῖ μόνον τόπον ψηφίου, ἢ μονάδος, ἢ δεκάδος, ἢ ἑκατοντάδος, καὶ τῶν χιλιάδων ὥσαν τὸ θέλομεν δείξει καθαρώτερα παρεμπρός.

Γίνεται αμέσως φανερό, από το απόσπασμα αυτό, ότι η νούλα εκλαμβάνεται ως βοηθητικό σημάδι για την αναπαράσταση των θέσεων εκείνων σ' έναν πολυψήφιο αριθμό που εκφράζουν την απουσία μονάδων στις αντίστοιχες τάξεις μονάδων, δηλαδή την έλλειψη από έναν πολυψήφιο αριθμό των μονάδων της πρώτης τάξης, που είναι οι απλές μονάδες, ή της δεύτερης τάξης, που είναι οι δεκάδες, ή της τρίτης τάξης, που είναι οι εκατοντάδες, κ.τ.λ. Δηλαδή το σύμβολό της νούλας δηλώνει το κενό κάποιας κατηγορίας μονάδων σ' ένα πολυψήφιο αριθμό. Π.χ. στον αριθμό εκατόν τρία, που αποτελείται από μια εκατοντάδα, καμία δεκάδα και τρεις απλές μονάδες, η απουσία δεκάδων παριστάνεται με το σύμβολο της νούλας, ως εξής: 103. Με αυτό το σκεπτικό γίνεται κατανοητός ο συμβολισμός 10 για το δέκα, γιατί εκφράζει μια δεκάδα και καμία απλή μονάδα.

Αξίζει να επισημανθεί ότι ο όρος νούλα προέρχεται από τον ιταλικό όρο nulla και ήταν σε χρήση σε βιβλία Πρακτικής Αριθμητικής της περιόδου εκείνης, όπως στο αντίστοιχο βιβλίο του Piero Borghi, ή αυτό του Tartaglia[53]. Αν μάλιστα ληφθεί υπ' όψη ότι δεν γίνεται καμία μνεία στον αντίστοιχο αρχαιοελληνικό όρο ουδέν ή στον αρκετά διαδεδομένο στη Δυτική Ευρώπη όρο τζίφρα, που είχε μια απήχηση και στη βυζαντινή μαθηματική παιδεία με το έργο *Ψηφοφορία κατ' Ινδούς η Λεγόμενη Μεγάλη* του Μάξιμου Πλανούδη, διαπιστώνεται μια ασυμβατότητα με την μέχρι τότε ελληνική αριθμητική παράδοση και μια προσκόλληση στην ιταλική αριθμητική παιδεία της Αναγέννησης.

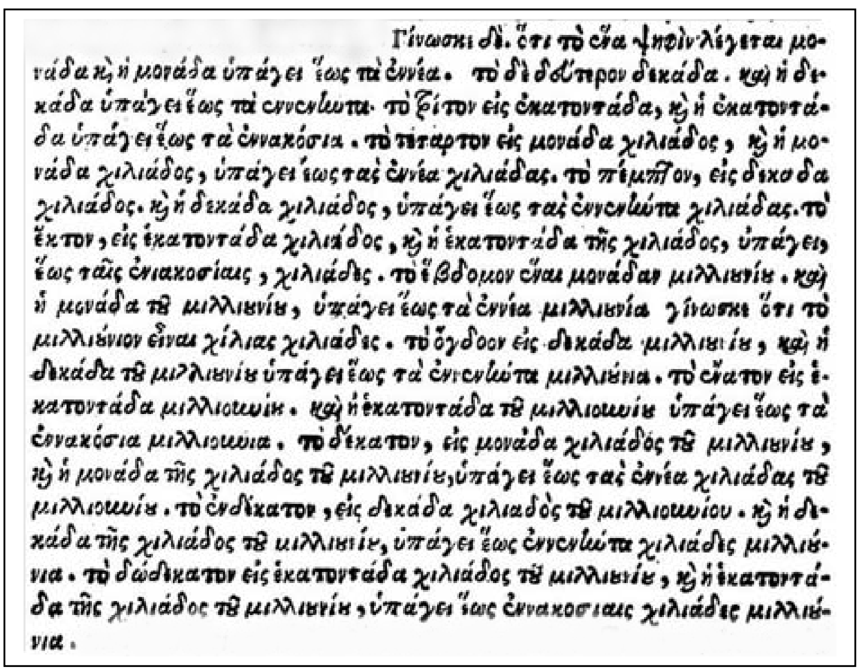
Από τις διευκρινήσεις που δόθηκαν για το νέο όρο και το σύμβολο της νούλας, στην αναπαράσταση των αριθμών, γίνεται φανερό ότι αυτός είναι διαπλεκόμενος με τη γενικότερη λογική της σύνταξης των συμβολικών

[52] Στο ίδιο.

[53] Βλ. Jackson, L.L.: *The Educational Significance of Sixteenth Century Arithmetic*, Publ. by Teachers College of Columbia University, 1906 (repr. 1972), σελ.31.

αναπαραστάσεων ενός πολυψήφιου αριθμού, κατά την Ινδο-Αραβική σημειογραφία τους. Δηλαδή η νούλα κατανοείται μόνο σε σχέση με τη συμβολική διάταξη των μερών ενός αριθμού στη σειρά, με τις απλές μονάδες στην τελευταία θέση, τις δεκάδες αριστερότερα τους, τις εκατοντάδες αριστερότερα των δεκάδων, κ.ο.κ. Αυτή η διάταξη στηρίζεται στην αρχή της <u>θεσιακής εξάρτησης</u>, σύμφωνα με την οποία το κάθε ψηφίο, στην αναπαράσταση ενός πολυψήφιου αριθμού, προσδιορίζει τη δική του τιμή σ' αυτόν, με το γινόμενο των μονάδων που δηλώνει επί την τιμή της κατηγορίας των μονάδων που αντιπροσωπεύει η θέση του. Π.χ. το ψηφίο 2 στον αριθμό 123 εκφράζει το 2 (η τιμή των μονάδων που συμβολίζει) επί 10 (η τιμή της κατηγορίας των μονάδων που αντιστοιχεί στη δεύτερη θέση από τα αριστερά της αναπαράστασης του συγκεκριμένου αριθμού και είναι αυτή των δεκάδων), δηλ. 20. Διαφαίνεται ότι η Ινδο-Αραβική σημειογραφία ενός αριθμού χαρακτηρίζεται από μια πολλαπλασιαστική συντακτική υποδομή. Αντίθετα το αλφαβητικό ή το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης στηρίζεται σε μια αθροιστική (συσσωρευτική) μορφή αναπαράστασης. Αυτό φαίνεται πολύ καθαρά στο παράδειγμα του εκατόν είκοσι τρία, που στο Ινδο-Αραβικό σύστημα γράφεται ως 123 και αντιπροσωπεύει το $1\times 100+2\times 10+3$, ενώ στο αλφαβητικό σύστημα αποδίδεται ως ΡΚΓ και αντιστοιχεί στο 100+20+3. Στην περίπτωση αυτή το 2 μέσα στο 123 παριστάνει το 20, δηλαδή εξαρτάται από τις μονάδες που δηλώνει και από τη θέση του στην αναπαράσταση του συγκεκριμένου αριθμού. Όμοια το 2 στον αριθμό 213 παριστάνει το 200. Αντίθετα στον αριθμό ΡΚΓ το Κ παριστάνει το 20 είτε είναι συστατικό του συγκεκριμένου αριθμού, είτε είναι μόνο του. Σ' αυτή την περίπτωση το Κ δεν εξαρτάται από τη θέση του μέσα στην σημειογραφία του συγκεκριμένου αριθμού.

Στη *Λογαριαστική* η θεσιακή εξάρτηση παρουσιάζεται μ' έναν περιγραφικό τρόπο. Αρχικά παρουσιάζεται η διάταξη των θέσεων των ψηφίων ενός αριθμού σε σχέση με τις αντίστοιχες κατηγορίες μονάδων, ως εξής[54]:



Γίνωσκε δὲ. ὅτι τὸ ἕνα ψηφὶν λέγεται μονάδα καὶ ἡ μονάδα ὑπάγει ἕως τὰ ἐννέα. τὸ δὲ δεύτερον δεκάδα. καὶ ἡ δεκάδα ὑπάγει ἕως τὰ ἐνενήντα. τὸ τρίτον εἰς ἑκατοντάδα, καὶ ἡ ἑκατοντάδα ὑπάγει ἕως τὰ ἐννακόσια. τὸ τέταρτον εἰς μονάδα χιλιάδος, καὶ ἡ μονάδα χιλιάδος, ὑπάγει ἕως ταὶς ἐννέα χιλιάδας. τὸ πέμπτον, εἰς δεκάδα χιλιάδος. καὶ ἡ δεκάδα χιλιάδος, ὑπάγει ἕως ταὶς ἐνενήντα χιλιάδας. τὸ ἕκτον, εἰς ἑκατοντάδα χιλιάδος, καὶ ἡ ἑκατοντάδα τῆς χιλιάδος, ὑπάγει, ἕως ταῖς ἐννιακοσίαις, χιλιάδαις. τὸ ἕβδομον εἶναι μονάδαν μιλλιουνίου. καὶ ἡ μονάδα τοῦ μιλλιουνίου, ὑπάγει ἕως τὰ ἐννέα μιλλιούνια. γίνωσκε ὅτι τὸ μιλλιούνιον εἶναι χίλιαις χιλιάδαις. τὸ ὄγδοον εἰς δεκάδα μιλλιουνίου, καὶ ἡ δεκάδα τοῦ μιλλιουνίου ὑπάγει ἕως τὰ ἐνενήντα μιλλιούνια. τὸ ἔνατον εἰς ἑκατοντάδα μιλλιουνίου. καὶ ἡ ἑκατοντάδα τοῦ μιλλιουνίου ὑπάγει ἕως τὰ ἐννακόσια μιλλιούνια. τὸ δέκατον, εἰς μονάδα χιλιάδος τοῦ μιλλιουνίου, καὶ ἡ μονάδα τῆς χιλιάδος τοῦ μιλλιουνίου, ὑπάγει ἕως ταὶς ἐννέα χιλιάδας τοῦ μιλλιουνίου. τὸ ἑνδέκατον, εἰς δεκάδα χιλιάδος τοῦ μιλλιουνίου. καὶ ἡ δεκάδα τῆς χιλιάδος τοῦ μιλλιουνίου, ὑπάγει ἕως ἐνενήντα χιλιάδαις μιλλιούνια. τὸ δωδέκατον εἰς ἑκατοντάδα χιλιάδος τοῦ μιλλιουνίου, καὶ ἡ ἑκατοντάδα τῆς χιλιάδος τοῦ μιλλιουνίου, ὑπάγει ἕως ἐννακοσίαις χιλιάδαις μιλλιούνια.

[54] Βλ. πρ. παρ. 51, φ. 2α.

Έτσι τακτοποιήθηκε η ονοματολογική ιεράρχηση των ψηφιακών θέσεων ενός πολυψήφιου αριθμού και η εσωτερική διαβάθμιση της κάθε θέσης του. Στη συνέχεια διατυπώνεται η τριαδική ομαδοποίηση της σειράς των ονομάτων των ψηφιακών θέσεων σε μονάδα, δεκάδα, εκατοντάδα που επαναλαμβάνεται σε μονάδα χιλιάδας, δεκάδα χιλιάδας και εκατοντάδα χιλιάδας κ.ο.κ. Και με την παρατήρηση αυτή αρθρώνεται ο αριθμού στη βάση της τριαδικής ομαδοποίησης. Οι "γενικές" αυτές αρχές χρησιμοποιούνται σε μια πληθώρα συγκεκριμένων παραδειγμάτων, με σκοπό την εξοικείωση στον συγκεκριμένο τρόπο αναπαράστασης των αριθμών, όπως και την ανάπτυξη της ικανότητας για την αναγνώριση τους.

β. Οι αριθμητικές πράξεις

Ως αφετηρία των αριθμητικών πράξεων αποτελεί, για τη *Λογαριαστική*, ο πίνακας της προπαίδειας, ο οποίος δίνεται με την εξής μορφή[55]:

Μία 1	ἢ 1	γίνεται 1		4	οἱ 4	γίνεται 16
2	2	4		4	5	20
3	3	9		4	6	24
4	4	16		4	7	28
5	5	25		4	8	32
6	6	36		4	9	36
7	7	49		4	10	40
8	8	64		5	5	25
9	9	81		5	6	30
10	10	100		5	7	35
2	2	4		5	8	40
2	3	6		5	9	45
2	4	8		5	10	50
2	5	10		6	6	36
2	6	12		6	7	42
2	7	14		6	8	48
2	8	16		6	9	54
2	9	18		6	10	60
2	10	20		7	7	49
3	4	12		7	8	56
3	5	15		7	9	63
3	6	18		7	10	70
3	7	21		8	8	64
3	8	24		8	9	72
3	9	27		8	10	80
3	10	30				

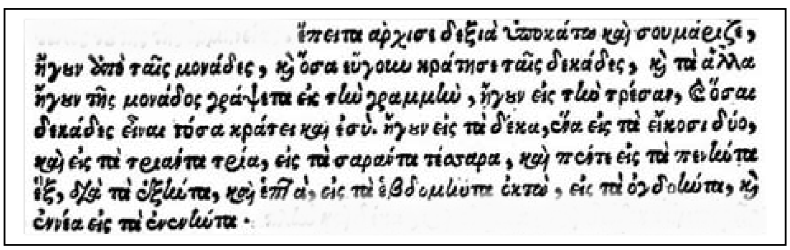
[55] Στο ίδιο, φ. 4α.

Η μορφή αυτή του πίνακα της προπαίδειας στηρίζεται στην αρχή της απομνημονευτικής οικονομίας. Πρόκειται για μια μορφή που συνηθίζονταν την εποχή εκείνη.

Η πρόταξη του πίνακα αυτού δεν είναι καθόλου τυχαία. Όπως επισημαίνεται, η αποστήθιση του είναι απαραίτητη για την εκμάθηση των αριθμητικών υπολογισμών και για την απρόσκοπτη ικανότητα χειρισμών τους[56].

Ακολουθεί μια μικρή παράγραφος για την πρόσθεση, η οποία ονομάζεται *σύναψις* και το αποτέλεσμα της πρόσθεσης, δηλαδή το άθροισμα, αποδίδεται ως *σουμάρ*. Οι όροι αυτοί είναι καινούργιοι στην ελληνική παιδεία. Στα αντίστοιχα κείμενα της τελευταίας βυζαντινής περιόδου, οι όροι αυτοί παρουσιάζονταν ως *σύνθεσις* και *συγκεφαλαίωσις*.

Για τη διαδικασία εκτέλεσης της πράξης ακολουθείται η μέθοδος που ήταν τότε γνωστή ως πρόσθεση κατά στήλες. Έτσι δίνονται οι γενικές οδηγίες της τακτοποίησης των ψηφίων των προσθετέων κατά την “τάξιν τους” και της εκτέλεσης των επιμέρους προσθέσεων με αφετηρία τη δεξιά στήλη των μονάδων. Στο ίδιο πνεύμα επισημαίνονται οι περιπτώσεις που το άθροισμα μιας στήλης είναι διψήφιος αριθμός, υποδεικνύοντας την εγγραφή των μονάδων ως το μερικό αποτέλεσμα και τη μεταφορά του αριθμού των δεκάδων στο άθροισμα της επόμενης στήλης, δηλ. της διπλανής από τα αριστερά. Η συγκεκριμένη διαδικασία περιγράφεται ως εξής[57]:

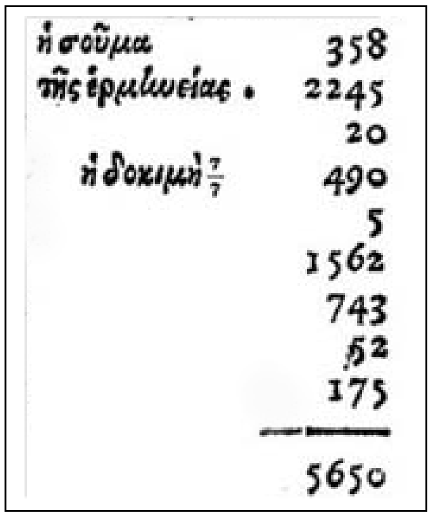

ἔπειτα ἄρχισε δεξιὰ ὑποκάτω καὶ σουμάριζε,
ἤγουν ἀπὸ ταῖς μονάδες, καὶ ὅσα εὕγουν κράτησε ταῖς δεκάδες, καὶ τὰ ἄλλα
ἤγουν τῆς μονάδος γράψετα εἰς τὴν γραμμήν, ἤγουν εἰς τὴν τρέσαν, καὶ ὅσαι
δεκάδες εἶναι τόσα κράτει καὶ ἐσύ. ἤγουν εἰς τὰ δέκα, ἕνα εἰς τὰ εἴκοσι δύο,
καὶ εἰς τὰ τριάντα τρία, εἰς τὰ σαράντα τέσσαρα, καὶ πέντε εἰς τὰ πενῆντα
ἕξ, εἰς τὰ ἑξῆντα, καὶ ἑπτά, εἰς τὰ ἑβδομῆντα ὀκτώ, εἰς τὰ ὀγδοῆντα, καὶ
ἐννέα εἰς τὰ ἐνενῆντα.

Αξιοσημείωτη είναι η παρατήρηση ότι τα “κρατούμενα” στην πρόσθεση μιας στήλης μπορεί να είναι και ένας αριθμός μεγαλύτερος από διψήφιο, δηλαδή ένα μερικό αποτέλεσμα σε μια πρόσθεση μπορεί να υπερβαίνει το 99. Σ’ αυτή την περίπτωση προτείνεται να χωριστεί η πρόσθεση σε δύο μικρότερες, για να αποφευχθεί η περίπτωση της υπέρβασης ενός μερικού αποτελέσματος του 99.

Ακολουθούν παραδείγματα πρόσθεσης με αριθμούς γενικά και με χρηματικές ποσότητες ειδικότερα. Οι διαδικασίες της πρόσθεσης στα παραδείγματα περιγράφονται λεκτικά (δηλ. σε πεζό λόγο) και παραδίπλα σχηματικά (δηλ. με κατάταξη των προσθετέων κατά στήλες όμοιων μονάδων). Ο χειρισμός των προσθέσεων ολοκληρώνεται με την υπόδειξη του τρόπου της δοκιμής τους, που είναι, στην προκειμένη περίπτωση, η μέθοδος των 9. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή “αφαιρούνται από τους προσθετέους τα 9”, δηλ. γίνεται η διαίρεση του κάθε προσθετέου με το εννέα, και μένουν τα αντίστοιχα

[56] Στο ίδιο.
[57] Στο ίδιο, φ. 4δ.

υπόλοιπα, τα οποία προσθέτονται και απ' αυτό το άθροισμα τους "αφαιρούνται τα 9" και μένει τελικά ένας μονοψήφιος αριθμός. Αυτός ο μονοψήφιος αριθμός σημειώνεται σ' ένα σημείο δίπλα στην κατάταξη της συγκεκριμένης πρόσθεσης. Στη συνέχεια "αφαιρούνται τα 9" από το αποτέλεσμα της πρόσθεσης (υπό δοκιμή) και ο μονοψήφιος αριθμός που προκύπτει τοποθετείται κάτω από τον μονοψήφιο αριθμό που προέκυψε από την "αφαίρεση των 9" των προσθετέων. Αν αυτοί οι δύο μονοψήφιοι είναι ίδιοι, τότε η πρόσθεση είναι σωστή. Αν δεν είναι ίδιοι, τότε πρέπει να επαναληφθεί η διαδικασία της πρόσθεσης, που σημαίνει ότι ο αρχικός χειρισμός ήταν λάθος. Ένα από τα παραδείγματα πρόσθεσης της *Λογαριαστικής* είναι το εξής[58]:


ἡ σοῦμα 358
τῆς ἑρμηνείας. 2245
20
ἡ δοκιμὴ 7/7 490
5
1562
743
52
175
5650

Είναι αλήθεια ότι η διαδικασία αυτή της δοκιμής ήταν συνυφασμένη με τη δυτικο-ευρωπαϊκή αριθμητική παιδεία της εποχής και αποτελεί κληρονομιά της αντίστοιχης ισλαμικής παράδοσης. Σε κάποιες περιπτώσεις εκτός από τη μέθοδο της "αφαίρεσης των 9" ήταν σε χρήση και αυτή της "αφαίρεσης των 7" και πιο σπάνια της "αφαίρεσης κάποιου άλλου αριθμού". Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η μέθοδος της "αφαίρεσης των 9" (όπως και των άλλων εκδοχών) είναι η αντιστοίχηση των παραγόντων και του αποτελέσματος μιας πρόσθεσης με αυτά των moduli τους. Στο προηγούμενο παράδειγμα η δοκιμή με "αφαίρεση των 9" μπορεί να αντιστοιχηθεί στη γλώσσα της Θεωρίας Αριθμών ως εξής[59]:

$$(358 \bmod 9+2245 \bmod 9+20 \bmod 9+490 \bmod 9+5 \bmod 9+1562 \bmod 9+ 743 \bmod 9+52 \bmod 9+175 \bmod 9) \bmod 9 =5650 \bmod 9.$$

Η αφαίρεση, που ακολουθεί, παρουσιάζει ανάλογες ομοιότητες με την πρόσθεση. Και εδώ ο όρος που χρησιμοποιείται δεν έχει καμία σχέση με την μέχρι τότε ελληνική παράδοση. Ονομάζεται *υφειλμός*[60].

[58] Στο ίδιο, φ. 5α.

[59] Βλ. σχετικά Bruckheimer, M., Ofir, O., Archavi, A.: The Case For and Against "Casting out Nines", *For the Learning of Mathematics*, 15 (2), 1995, σελ. 23-28. Όπως σημειώνεται στην εργασία αυτή η συγκεκριμένη μέθοδος της δοκιμής είναι επισφαλής.

[60] Στη *Ψηφοφορία* του Πλανούδη ονομάζεται *αφαίρεσις*.

Η διαδικασία της συγκεκριμένης πράξης μεθοδεύεται με παραδείγματα από την εμπορική ζωή και ειδικότερα σε ζητήματα χρέους. Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στα παραδείγματα όπου κάποια ψηφία του αφαιρετέου είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα του μειωτέου. Σ΄ αυτές τις περιπτώσεις ακολουθείται η τεχνική του δανεισμού μιας μεγαλύτερης μονάδας από το ψηφίο της αμέσως μεγαλύτερης τάξης του μειωτέου και προστίθεται ως δέκα στο ψηφίο της μικρότερης βαθμίδας που δεν μπορούσε να γίνει η αφαίρεση. Η ίδια δηλαδή τεχνική που εφαρμόζεται και σήμερα.

Παρουσιάζεται όμως και μια παραλλαγή αυτού του τεχνάσματος, που είναι η εξής: όταν κατά την αφαίρεση δύο πολυψήφιων αριθμών ένα ψηφίο του μειωτέου είναι μικρότερο του αντίστοιχου ψηφίου του αφαιρετέου, τότε λαμβάνεται η διαφορά της τιμής του ψηφίου του αφαιρετέου από το δέκα και προστίθεται η τιμή του αντίστοιχου ψηφίου του μειωτέου και αυτό θα είναι το αποτέλεσμα της αφαίρεσης στη συγκεκριμένη θέση των ψηφίων. Στη συνέχεια απλώς προστίθεται μια μονάδα στη τιμή του ψηφίου της αμέσως μεγαλύτερης βαθμίδας του αφαιρετέου. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το εξής[61]:

Θέτον εἷς ἄνθρωπος ἐχρεώστη φλωρία, 45348 καὶ ἔδωσεν 36259 τί χρεωστεῖ ἀκόμι. γράφομεν τὰ ψηφία εἰς τὴν τάξιν τους. ἔπειτα θέλομεν νὰ κάμωμεν ὑφειλμόν, νὰ βγάλομεν τὰ 9 ἀπὸ τὰ 8 καὶ δὲν ἠμποροῦμεν, τὸ λοιπὸν λέγομεν 9 ἕως τὰ δέκα, θέλομεν ἕνα, καὶ 8 τὸ ψηφίον ποῦ εἶναι ἀπάνωτι γίνονται 9 καὶ τὰ γράφομεν ὑποκάτω τῆς γραμμῆς, καὶ κρατοῦμεν ἕνα διατὶ εἴπαμεν ἕως τὰ δέκα. καὶ πάλιν λέγομεν, ἕνα ποῦ κρατοῦμεν, καὶ 5 γίνονται 6 ἕως τὰ δέκα, θέλομεν 4 καὶ 4 τὸ ψηφίον ποῦ εἶναι ἀπάνωτου γίνονται 8 καὶ τὰ γράφομεν, καὶ αὐτὰ καὶ κρατοῦμεν πάλιν ἕνα, καὶ πάλιν λέγομεν ἕνα ποῦ κρατοῦμεν, καὶ δύο τὸ τρίτον ψηφίον, γίνονται 3 βγάζομεν 3 ἀπὸ 3 δὲν μένουσιν τίποτα γράφομεν μίαν νοῦλαν ὑποκάτω τῆς γραμμῆς καὶ δὲν κρατοῦμεν τίποτε διατὶ εἰς τοῦτο τὸ ψηφίον δὲν εἴπαμεν ἕως τὰ δέκα πάλιν λέγομεν 6 ἕως τὰ δέκα θέλομεν 4 καὶ 5 τὸ ἐπάνω ψηφίον γίνονται 9 καὶ τὰ γράφομεν πάλιν καὶ αὐτά, καὶ κρατοῦμεν ἕνα πάλιν ἕνα ποῦ κρατοῦμεν καὶ τρία τὸ ἄλλον ψηφίον, γίνονται 4 ὑφείλομεν 4 ἀπὸ 4 δὲ μένουν τίποτα, καὶ γράφομεν καὶ αὐτοῦ μίαν νοῦλαν. τὸ λοιπὸν ἐβγῆκαν ὑποκάτω τῆς γραμμῆς 9089 καὶ αὐτὰ χρεωστεῖ νὰ φέρει νὰ πληρώσῃ ὡσὰν βλέπῃς εἰς τὰ ψηφία.

τῆς ἑρμηνείας. 45348 τὰ ἐχρεώστει,
36259 τὰ ἔδωσεν.
09089 τὰ χρεωστεῖ.
45348 ἡ δοκιμή.

Στην αφαίρεση η δοκιμή δεν γίνεται με την "αφαίρεση των 9", αλλά με την αντίστροφη διαδικασία, δηλ. προσθέτοντας το αποτέλεσμα της αφαίρεσης στον αφαιρετέο που πρέπει να δώσει τον μειωτέο.

Ο πολλαπλασιασμός, παραδόξως, δεν παρουσιάζει εκπλήξεις. Ο όρος "πολυπλασιασμός" που χρησιμοποιείται είναι ίδιος με τον αντίστοιχο όρο που χρησιμοποιούσαν οι Βυζαντινοί, π.χ. στη Ψηφοφορία του Πλανούδη.

[61] Βλ. πρ. παρ. 51, φφ. 6α-6δ.

Όσον αφορά την τεχνική της πράξης του πολλαπλασιασμού, αυτή είναι ίδια με τη σημερινή. Η σύμπτωση αυτή είναι αξιοσημείωτη γιατί την περίοδο της Αναγέννησης υπήρχε μια ποικιλία μεθόδων πολλαπλασιασμού και η σημερινή διαδικασία δεν ήταν και η πιο δημοφιλής. Ωστόσο δεν ήταν και τελείως περιθωριοποιημένη[62]. Στην ελληνική παράδοση η ίδια ακριβώς στάση με τη *Λογαριαστική* παρατηρείται στο χειρόγραφο της Συλλογής των 100 προβλημάτων, που ήταν χρονικά προγενέστερη της, όπως και στο χειρόγραφο Αριθμητικής που φυλάσσεται στην Εθνική Βιβλιοθήκη της Ελλάδας (με κωδικό: ΕΒΕ 1107) και θεωρείται ότι είναι και αυτό προγενέστερο της. Αντίθετα στην *Ψηφοφορία* του Πλανούδη δεν υπάρχει η μέθοδος αυτή, αλλά τρεις διαφορετικές τεχνικές πολλαπλασιασμού.

Η δοκιμή του πολλαπλασιασμού που χρησιμοποιείται στη *Λογαριαστική* είναι η “μέθοδος των 9”. Παρουσιάζεται και η “μέθοδος των 7”, σημειώνεται όμως ότι απ’ όλες τις μεθόδους δοκιμής η ασφαλέστερη είναι η διαδικασία της αντίστροφης πράξης, δηλαδή της διαίρεσης.

Η τέταρτη πράξη της Αριθμητικής, η διαίρεση, ήταν ένα από τα δυσκολότερα ζητήματα της υπολογιστικής δραστηριότητας, την περίοδο της Αναγέννησης. Υπήρχε μια ποικιλία αλγοριθμικών διαδικασιών που η πολυπλοκότητα τους ήταν πολύ πιο σύνθετη των προηγούμενων πράξεων.

Στην *Λογαριαστική* χρησιμοποιείται ο όρος *μερισμός* για τη διαίρεση και ήταν αυτός που κυριαρχούσε στην μέχρι τότε ελληνική παράδοση. Από την άλλη μεριά, όμως, η τεχνική της διαίρεσης δεν ήταν ίδια σ’ όλα τα ελληνικά υπολογιστικά κείμενα που υπήρχαν μέχρι τότε. Π.χ. η *Ψηφοφορία* του Πλανούδη δεν είχε την ίδια μέθοδο της διαίρεσης μ΄ αυτήν της *Λογαριαστικής*, που ήταν λεγόμενη μέθοδος galley, η οποία μπορεί να αποδοθεί στα ελληνικά ως η μέθοδος της διαγραφής. Η μέθοδος αυτή ήταν αρκετά διαδεδομένη στην Ευρώπη εκείνη την εποχή. Η συγκεκριμένη τεχνική θα παρουσιαστεί στη συνέχεια αναλυτικά με βάση το παράδειγμα της διαίρεσης 87854:468 που περιέχεται στη *Λογαριαστική*.

$1^{ο}$ βήμα   8 7 8 5 4 $\leftarrow$ η θέση του διαιρετέου
4 6 8 $\leftarrow$ η θέση του διαιρέτη

$2^{ο}$ βήμα   8 7 8 5 4 | **1** $\leftarrow$ [878:468] $\simeq$ 1
4 6 8 |____   Η θέση του πηλίκου

$3^{ο}$ βήμα   **4** $\leftarrow$ [8-(4 $\times$ 1)]=4
~~8~~ 7 8 5 4 | 1
~~4~~ 6 8 |____

---

[62] Αξίζει να σημειωθεί ότι περιέχεται στην Αριθμητική *Algorismus de integris* (1410) του Prosdocimo de Beldamandi. Ήταν η κύρια μέθοδος πολλαπλασιασμού στο *Elementa Arithmetica Algorithmus de Numeris* του Georg Peurbach, που γράφτηκε στα μέσα του $15^{ου}$ αιώνα, τυπώθηκε το 1492 και είχε πλατιά διάδοση στα σχολεία και τα Πανεπιστήμια στις γερμανόφωνες περιοχές. Επίσης περιλαμβάνονταν μεταξύ άλλων στην πρώτη τυπωμένη Αριθμητική (1470) που εκδόθηκε στο Treviso της Ιταλίας, στην Αριθμητική (1491) του Calandri, στο μαθηματικό έργο *Suma de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita…*(1494) του Lucas Paciuoli και στη δημοφιλή αγγλική Αριθμητική *Ground of Arts* (1543) του Robert Recorde.

4^{o} βήμα

4 1 ← [47-(6×1)]=41
$\cancel{8}\cancel{7}$ 8 5 4 | 1
$\cancel{4}\cancel{6}$ 8

5^{o} βήμα

4 1 0 ← [418-(8×1)]=410
$\cancel{8}\cancel{7}\cancel{8}$ 5 4 | 1
$\cancel{4}\cancel{6}\cancel{8}$

6^{o} βήμα

4 1 0
$\cancel{8}\cancel{7}\cancel{8}$ 5 4 | 1
$\cancel{4}\cancel{6}\cancel{8}$ **8**
4 6 ← η νέα θέση του διαιρέτη

7^{o} βήμα

4 1 0
$\cancel{8}\cancel{7}\cancel{8}$ 5 4 | 1**8** ← [4105:468] $\simeq$ 8
$\cancel{4}\cancel{6}\cancel{8}$ 8
4 6

8^{o} βήμα

0 **9** ← [41-(4×8)]=9
$\cancel{4}\cancel{1}$ 0
$\cancel{8}\cancel{7}\cancel{8}$ 5 4 | 18
$\cancel{4}\cancel{6}\cancel{8}$ 8
$\cancel{4}$ 6

9^{o} βήμα

4 ← [90-(6×8)]=42
$\cancel{0}\cancel{9}$ **2**
$\cancel{4}\cancel{1}\cancel{0}$
$\cancel{8}\cancel{7}\cancel{8}$ 5 4 | 18
$\cancel{4}\cancel{6}\cancel{8}$ 8
$\cancel{4}\cancel{6}$

10^{o} βήμα

3 ← [425-(8×8)]=361
$\cancel{4}$ **6**
$\cancel{0}\cancel{9}\cancel{2}$
$\cancel{4}\cancel{1}\cancel{0}$ **1**
$\cancel{8}\cancel{7}\cancel{8}\cancel{5}$ 4 | 18
$\cancel{4}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{8}$
$\cancel{4}\cancel{6}$

11^{o} βήμα

3
$\cancel{4}$ 6
$\cancel{0}\cancel{9}\cancel{2}$
$\cancel{4}\cancel{1}\cancel{0}$ 1
$\cancel{8}\cancel{7}\cancel{8}\cancel{5}$ 4 | 18
$\cancel{4}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{8}$ **8**
$\cancel{4}\cancel{6}$ **6** ← η νέα θέση του διαιρέτη
4

12ο βήμα

$$\begin{array}{r|l}
3 & \\
\cancel{4}\,6 & \\
\cancel{0}\cancel{9}\cancel{2} & \\
\cancel{4}\cancel{1}\cancel{0}\,1 & \\
\cancel{8}\cancel{7}\cancel{8}\cancel{5}\,4 & 18\mathbf{7} \\
\cancel{4}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{8}\,8 & \overline{} \\
\cancel{4}\cancel{6}\,6 & \\
4 &
\end{array}
\qquad \leftarrow [3614:468] \simeq 7$$

13ο βήμα

$$\begin{array}{r|l}
\cancel{3}\,\mathbf{8} & \\
\cancel{4}\cancel{6} & \\
\cancel{0}\cancel{9}\cancel{2} & \\
\cancel{4}\cancel{1}\cancel{0}\,1 & \\
\cancel{8}\cancel{7}\cancel{8}\cancel{5}\,4 & 187 \\
\cancel{4}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{8}\,8 & \overline{} \\
\cancel{4}\cancel{6}\,6 & \\
\cancel{4} &
\end{array}
\qquad \leftarrow [36-(4\times 7)]=8$$

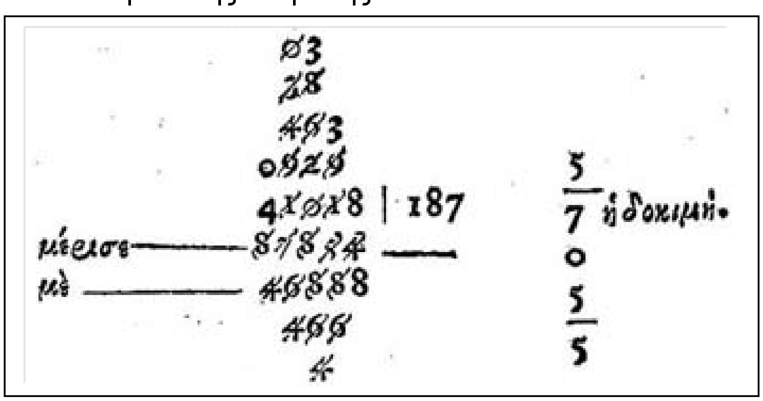
14ο βήμα

$$\begin{array}{r|l}
\mathbf{3} & \\
\cancel{3}\cancel{8} & \\
\cancel{4}\cancel{6} & \\
\cancel{0}\cancel{9}\cancel{2}\,\mathbf{9} & \\
\cancel{4}\cancel{1}\cancel{0}\cancel{1} & \\
\cancel{8}\cancel{7}\cancel{8}\cancel{5}\,4 & 187 \\
\cancel{4}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{8}\,8 & \overline{} \\
\cancel{4}\cancel{6}\cancel{6} & \\
\cancel{4} &
\end{array}
\qquad \leftarrow [81-(6\times 7)]=39$$

15ο βήμα

$$\begin{array}{r|l}
\mathbf{3} & \\
\cancel{3} & \\
\cancel{3}\cancel{8} & \\
\cancel{4}\cancel{6}\,\mathbf{3} & \\
\cancel{0}\cancel{9}\cancel{2}\cancel{9} & \\
\cancel{4}\cancel{1}\cancel{0}\cancel{1}\,\mathbf{8} & \\
\cancel{8}\cancel{7}\cancel{8}\cancel{5}\cancel{4} & 187 \\
\cancel{4}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{8}\cancel{8} & \overline{} \\
\cancel{4}\cancel{6}\cancel{6} & \\
\cancel{4} &
\end{array}
\qquad \leftarrow [394-(8\times 7)]=338$$

Έτσι το πηλίκο της διαίρεσης 87854:468 είναι 187 και το υπόλοιπο 338.



Το τελικό βήμα της διαίρεσης 87854:468, όπως παρουσιάζεται στο φ. 13δ της *Λογαριαστικής*.

Αξίζει να σημειωθεί, στο σημείο αυτό, ότι στη συγκεκριμένη διαδικασία της διαίρεσης τα ψηφία των μερικών υπολοίπων τοποθετούνται στις αντίστοιχες στήλες των θεσιακών μονάδων απ' όπου προέρχονται. Διαφαίνεται έτσι ότι το υπόβαθρο αυτής της μεθόδου είναι η αντίστοιχη μεταφορά των επιμέρους χειρισμών της διαίρεσης από τον άβακα στη γραπτή μορφή.

Η δοκιμή της διαίρεσης γίνεται με τη "μέθοδο των 9" ως εξής: α) "αφαιρούνται τα 9" από το υπόλοιπο, δηλ. το 338, μ' αποτέλεσμα 5 και σημειώνεται και υπογραμμίζεται, β) στη συνέχεια "αφαιρούνται τα 9" του πηλίκου, δηλ. του 187, μ' αποτέλεσμα 7 και σημειώνεται κάτω από την προηγούμενη υπογράμμιση, γ) μετά "αφαιρούνται τα 9" του διαιρέτη, δηλ. του 468, μ' αποτέλεσμα 0 και σημειώνεται κάτω από το 7 που προηγούμενα βρέθηκε, δ) έπειτα πολλαπλασιάζεται το 7 με το 0 και προστίθεται το 5 και σημειώνεται κάτω από το 0 [αν το αποτέλεσμα του προηγούμενου πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης ήταν διψήφιος αριθμός, τότε έπρεπε να "αφαιρεθούν τα 9" απ' αυτό και ότι περίσσευε θα έπαιρνε τη θέση του κάτω από το προηγούμενο αποτέλεσμα, δηλ. το 0], ε) φέρεται μια γραμμή κάτω από το 5 και "αφαιρούνται τα 9" του διαιρετέου, δηλ. του 87854, με αποτέλεσμα 5, το οποίο γράφεται κάτω από το προηγούμενο αποτέλεσμα, δηλ. το προηγούμενο 5. Επειδή τα τελευταία αποτελέσματα συμπίπτουν, θεωρείται ότι η πράξη είναι σωστή. Όλη αυτή η διαδικασία της δοκιμής μπορεί να γραφεί με τα moduli ως εξής:

$$[338\text{mod}9+(187\text{mod}9\times 486\text{mod}9)]\text{mod}9=87854\text{mod}9.$$

γ. Τα κλάσματα

Η ενότητα αυτή είναι αρκετά σημαντική για την ιστορία της ελληνικής μαθηματικής παιδείας, γιατί για πρώτη φορά παρουσιάζεται συστηματικά ο λογισμός των κλασμάτων. Είναι αλήθεια ότι η *Συλλογή των 100 προβλημάτων*, που χρονολογικά προηγείται της *Λογαριαστικής*, χρησιμοποιείται ο ίδιος λογισμός. Όμοια και στο χειρόγραφο Αριθμητικής που φυλάσσεται στην Εθνική Βιβλιοθήκη της Ελλάδας (με κωδικό: ΕΒΕ 1107), που θεωρείται ότι είναι προγενέστερο της *Λογαριαστικής*, θίγεται ο λογισμός των κλασμάτων. Η συστηματική, όμως, παρουσίασή του πρωτο-αναπτύχθηκε και καθιερώθηκε στην ελληνική ιστορία με την *Λογαριαστική*.

Το 21^{o} κεφάλαιό της, με τίτλο *τι εστί τζάκισμα και πως γράφεται*, αρχίζει ως εξής:

> *"Λέγομεν ότι τό τζάκισμα είναι μέρος, ή μέρη του ακεραίου, ήγουν εάν κόψης ένα ακέραιον εις μέρη, καί απ' αυτά τά μέρη νά πάρεις τινά, αυτό λέγεται τζάκισμα. ήγουν μέρος. τό λοιπόν εάν μερίσωμεν τό ακέραιον, εις δύο μέρη, τό ένα μέρος λέγεται μισόν, και γράφεται ούτως $\frac{1}{2}$ ήγουν ένα μέρος από τά δύο του ακέραιου. Πάλιν εάν μερίσωμεν τό ακέραιον εις τρία μέρη, τό ένα μέρος λέγεται τρίτον, καί γράφεται ούτως $\frac{1}{3}$ ήγουν ένα μέρος από τά τρία του ακέραιου…Ειδέ και το μερίσωμεν εις 8 καί απ'*

αυτά πάρωμεν τά τρία μέρη λέγονται τρία όγδοα καί γράφεται $\frac{3}{8}$ *ήγουν 3 μέρη από τά 8 του ακέραιου…”*[63]

Το πρώτο που παρατηρείται είναι το ασυνήθιστο όνομα που χρησιμοποιείται για το κλάσμα. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι στην ελληνική και βυζαντινή παράδοση ο όρος για το κλάσμα ήταν το μόριον. Αυτό σημαίνει ότι η λέξη τζάκισμα ήταν νεολογισμός στην ελληνική μαθηματική ορολογία, που εμφανίστηκε εκείνη την εποχή στην ελληνική παιδεία με τη *Λογαριαστική*, τη *Συλλογή των 100 προβλημάτων* και το χειρόγραφο ΕΒΕ 1107 της Εθνικής Βιβλιοθήκης. Χωρίς δυσκολία διαφαίνεται ότι αυτή η λέξη προέρχεται, πιθανόν λόγω λαϊκής παραφθοράς, από το τσάκισμα, που ετυμολογικά σημαίνει το σπάσιμο, και στην προκειμένη περίπτωση υπονοεί το σπασμένο. Η σημασιολογική αυτή ρίζα είναι πλήρως συμβατή με την ιστορική καταγωγή του συγκεκριμένου όρου. Και αυτό γιατί ο αντίστοιχος αραβικός όρος ήταν al-kasr, που διαμορφώθηκε από το ρήμα σπάω. Όταν ο συγκεκριμένος αραβικός όρος μεταφέρθηκε στα λατινικά αποδόθηκε ως fractio, που προέρχεται από το fractus και είναι παθητική μετοχή του λατινικού ρήματος frango, το οποίο σημαίνει θραύω, σπάζω. Στα πρώτα λοιπόν λατινικά αριθμητικά χειρόγραφα του 13^ου^ αιώνα χρησιμοποιήθηκε ο όρος fractio για τα κλάσματα. Ο Fibonacci (ή Leonard της Pisa,13^ος^ αιώνας) και ο Jean de Meurs (14^ος^ αιώνας) χρησιμοποιούσαν παράλληλα με τον όρο fractio και τον ruptus[64], που είναι η παθητική μετοχή του λατινικού ρήματος rumpo, το οποίο επίσης σημαίνει θραύω. Χαρακτηριστική περίπτωση είναι ότι ο άγγλος Rober Recorde (16^ος^ αιώνας) επισήμανε: “Θεωρώ ότι το κλάσμα (Fraction) είναι ένας σπασμένος αριθμός (a broken number), που σημαίνει ότι δεν είναι αριθμός, αλλά μέρος ενός αριθμού”[65]. Αξίζει επίσης να αναφερθεί ότι στα χειρόγραφα της αριθμητικής των αμπακιστών ήταν σε χρήση ο όρος rotti (ή numeri rotti)[66] για τα κλάσματα, που σημαίνει σπασμένο ή ψιλά χρήματα και προέρχεται από το rotto, παθητική μετοχή του rompere.

Η δεύτερη αξιοσημείωτη παρατήρηση στην εισαγωγή των κλασμάτων της *Λογαριαστικής* έχει σχέση με τον ορισμό τους. Το ενδιαφέρον είναι ότι ενώ πρωτοπαρουσιάζεται ως *μέρος ή μέρη ενός ακεραίου*, αμέσως συνδέεται με τη διαίρεση ενός ακεραίου σε μέρη (υπονοείται ίσα μέρη) και ο προσδιορισμός ενός πλήθους απ’ αυτά να διαμορφώνει το κλάσμα. Με αυτό τον τρόπο γίνεται μια συγκόλληση, μάλλον βεβιασμένη και ανάρμοστη, των δύο αντιλήψεων για την έννοια του κλάσματος, που ήταν διαθέσιμοι στα βιβλία Αριθμητικής του 16^ου^ αιώνα[67].

Επίσης ενδεικτικός είναι και ο περιγραφικός τρόπος παρουσίασης των κλασμάτων, με τη δημιουργία συγκεκριμένων κλασμάτων που εμφανίζονται επαγωγικά από τα πιο απλά σε πιο σύνθετα. Δεν υπάρχει γενική διαμόρφωση

[63] Βλ. πρ. παρ. 51, φφ. 17α-17δ.
[64] Βλ. Karpinski, L.Ch.: *The History of Arithmetic*, Russell & Russel, 1965, σελ. 126-127.
[65] Βλ. Sanford, V.: *A Sort History of Mathematics*, Houghton Mifflin Company, 1958, σελ. 102.
[66] Βλ. Egmond, W. van: *The Commercial Revolution and the Beginnings of Western Mathematics in Renaissance Florence, 1300-1500*, Ph. D. in Indiana University, 1976, σελ. 162.
[67] Βλ. Jackson, L.L., πρ. παρ. 53, σελ. 85 κ. ε.

και αναπαράσταση των κλασμάτων. Στην εισαγωγή απουσιάζουν οι όροι αριθμητής και παρονομαστής. Η έμφαση δίνεται στον τρόπο γραφής των κλασμάτων με τον αριθμό που διαμερίζεται σε μέρη να γράφεται κάτω από τη γραμμή και το πλήθος των μερών που λαμβάνονται πάνω από τη γραμμή. Επίσης δίνεται προσοχή στον τρόπο ονομασίας τους, επισημαίνοντας κάθε φορά τη συγκεκριμένη ονοματολογική απόδοση και επιμένοντας σ' ένα είδος σχετικής εξοικείωσης αφήνοντας να νοηθεί η οποιαδήποτε άλλη περίπτωση. Πολύ χαρακτηριστική είναι η τελευταία περίπτωση κλάσματος που αναφέρεται σ' αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο για τα κλάσματα, σημειώνεται σχετικά:

> *"…ήγουν τά μέν επάνω ψηφία τής γραμμης, δείχνουν πόσον τζάκισμα είναι. τά δέ υποκάτω δείχνουντην φύσιν του τζακίσματος. Ήγουν πόσα μέρη από τά άνωθεν της γραμμής είναι τό ακέραιον. Ήγουν εάν μερίσωμεν ένα ακέραιον εις 146 κομάτια, καί θέλομεν νά πάρομεν τά 101…λοιπόν θέλομεν νά τά γράψομεν, καί τά γράφομεν εις τουτον τόν τρόπον οπου βλέπεις* $\frac{101}{145}$ *καί αυτά λογίζονται εκατόν ένα, της εκατόν σαρανταπέντε. ομοίως γράφονται καί όλα τά άλλα τζακίσματα."*[68]

Στο τέλος της εισαγωγής παρατίθεται και ο εξής πίνακάς κατάταξης των κλασμάτων:


Ἰδὲ καὶ ἡ γνῶσις τῶν τζακισμάτων.

$\frac{1}{2}$ μισόν.
$\frac{1}{3}$ ἕνα τρεῖτον.
$\frac{2}{3}$ δύο τρεῖτα.

$\frac{1}{4}$ ἕνα τέταρτον.
$\frac{2}{4}$ δύο τέταρτα.
$\frac{3}{4}$ τρεία τέταρτα.

$\frac{1}{5}$ ἕνα πέμπτον.
$\frac{2}{5}$ δύο πέμπτα.
$\frac{3}{5}$ τρία πέμπτα.
$\frac{4}{5}$ τέσσαρα πέμ.

$\frac{1}{6}$ ἕνα ἕκτον.
$\frac{2}{6}$ δύο ἕκτα.
$\frac{3}{6}$ τρεία ἕκτα.
$\frac{4}{6}$ τέσσαρα ἕκτα.
$\frac{5}{6}$ πέντε ἕκτα.

$\frac{1}{7}$ ἕνα ἕβδομον.
$\frac{2}{7}$ δύο ἕβδομα.
$\frac{3}{7}$ τρεία ἕβδομα.
$\frac{4}{7}$ τέσσαρα ἕβδο.
$\frac{5}{7}$ πέντε ἕβδομα.
$\frac{6}{7}$ ἕξι ἕβδομα.

$\frac{1}{8}$ ἕνα ὄγδοον.
$\frac{2}{8}$ δύο ὄγδοα.
$\frac{3}{8}$ τρεία ὄγδοα.
$\frac{4}{8}$ τέσσαρα ὄγδοα.
$\frac{5}{8}$ πέντε ὄγδοα.
$\frac{6}{8}$ ἕξι ὄγδοα.
$\frac{7}{8}$ ἑπτὰ ὄγδοα.

$\frac{1}{9}$ ἕνα ἔννατον.
$\frac{2}{9}$ δύο ἔννατα.
$\frac{3}{9}$ τρεία ἔννατα.
$\frac{4}{9}$ τέσσαρα ἔννατα.
$\frac{5}{9}$ πέντε ἔννατα.
$\frac{6}{9}$ ἕξι ἔννατα.
$\frac{7}{9}$ ἑπτὰ ἔννατα.
$\frac{8}{9}$ ὀκτὼ ἔννατα.

$\frac{1}{10}$ ἕνα δεκακόματον.
$\frac{2}{10}$ δύο δεκακόματα.
$\frac{3}{10}$ τρεία δεκακόματα.
$\frac{4}{10}$ τέσσαρα δεκακόματα.
$\frac{5}{10}$ πέντε δεκακόματα.
$\frac{6}{10}$ ἕξι δεκακόματα.
$\frac{7}{10}$ ἑπτὰ δεκακόματα.
$\frac{8}{10}$ ὀκτὼ δεκακόματα.
$\frac{9}{10}$ ἐννέα δεκακόματα.

$\frac{1}{2}$ μισόν.
$\frac{2}{4}$ καὶ αὐτὸ μισόν.
$\frac{3}{6}$ καὶ αὐτὸ μισόν.
$\frac{4}{8}$ καὶ αὐτὸ μισόν.
$\frac{5}{10}$ καὶ αὐτὸ μισόν.

$\frac{1}{3}$ ἕνα τρεῖτον.
$\frac{2}{6}$ καὶ αὐτὸ ἕνα τρεῖτον.
$\frac{3}{9}$ καὶ αὐτὸ ἕνα τρεῖτον.

$\frac{1}{4}$ ἕνα τέταρτον.
$\frac{2}{8}$ καὶ αὐτὸ ἕνα τέταρτον.

$\frac{3}{4}$ τρεία τέταρτα.
$\frac{6}{8}$ καὶ αὐτὸ τρεία τέταρτα.

$\frac{1}{5}$ ἕνα πέμπτον.
$\frac{2}{10}$ καὶ αὐτὰ ἕνα πέμπτον.

Στην τελευταία στήλη επισημαίνονται κάποια ισοδύναμα κλάσματα, π.χ.

[68] Βλ. πρ. παρ. 51, φ. 17δ.

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}.$$

Είναι όμως μια πλάγια, παράπλευρη, νύξη. Μια αυθαίρετη αναφορά, χωρίς καμία δικαιολόγηση.

Ακολουθούν οι πράξεις με τα κλάσματα και με μικτούς αριθμούς. Αρχικά εξετάζεται η πρόσθεση δύο μικτών αριθμών, που ονομάζεται σύναψις των ειλημάτων, η “σούμα ρίτε ρότοι” κατά τους ιταλούς. Δίνονται οι εξής γενικές οδηγίες στην άθροιση ακεραίου και τζακίσματος με άλλα “ακέραια με τζακίσματα”: πρώτα μετατρέπονται όλα σε κλάσματα, “κάμετα μίαν φύσιν, ήγουν κάμε όλα τα ακέραια και τα τζακίσματα, μίας φύσεως τζάκισμα”. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται οι όροι “ρίζα” για τον παρονομαστή και “κορυφή” για τον αριθμητή. Και ο κανόνας, για να μετασχηματιστεί ο μικτός σε κλάσμα, είναι: “πολυπλασίασε τα ακέραια με την ρίζαν του τζακίσματος, πρόσθεσε και την κορυφήν του”. Έτσι στο παράδειγμα της πρόσθεσης του $9\frac{1}{2}$ και $7\frac{3}{4}$, που χρησιμοποιείται, οι μικτοί γίνονται $\frac{19}{2}$ και $\frac{31}{4}$. Αυτά τοποθετούνται ως εξής:

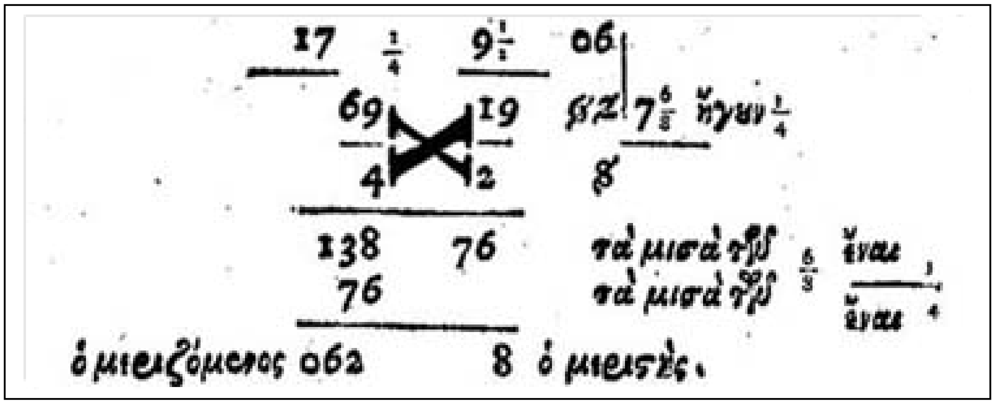
$$\begin{array}{cc}
9\frac{1}{2} & 7\frac{3}{4} \\
\hline
\frac{19}{2} & \frac{31}{4}
\end{array}$$

Για την πρόσθεση τώρα των δύο αυτών κλασμάτων πολλαπλασιάζεται η “κορυφή” του πρώτου με την “ρίζα” του δευτέρου και το αποτέλεσμα γράφεται κάτω από το πρώτο κλάσμα, στη συνέχεια πολλαπλασιάζεται η “ρίζα” του πρώτου με την “κορυφή” του δευτέρου και το αποτέλεσμα γράφεται κάτω από το δεύτερο κλάσμα. Προσθέτονται στη συνέχεια τα δύο αυτά αποτελέσματα. Παραδίπλα του αθροίσματος αυτού γράφεται το γινόμενο των δύο “ριζών”.

$$\begin{array}{cc}
9\frac{1}{2} & 7\frac{3}{4} \\
\hline
\frac{19}{2} & \frac{31}{4} \\
\hline
76 & 62 \\
62 & \\
\hline
138 & 8
\end{array}$$

Στο επόμενο βήμα γίνεται η διαίρεση μεταξύ των δυο τελευταίων αποτελεσμάτων, δηλαδή του αποτελέσματος που προέκυψε από τον χιαστή πολλαπλασιασμό και την πρόσθεση των επιμέρους γινομένων με το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού των δύο “ριζών”, στην προκειμένη περίπτωση του 138 με το 8. Έτσι προκύπτει το τελικό άθροισμα των μικτών αριθμών, που είναι $17\frac{2}{8}$ και επειδή τα “δύο όγδοα είναι $\frac{1}{4}$” συνεπάγεται ότι το άθροισμα του $9\frac{1}{2}$ και του $7\frac{1}{4}$ είναι $17\frac{1}{4}$.

Η αφαίρεση γίνεται με ανάλογο τρόπο. Το παράδειγμα που χρησιμοποιείται είναι η αφαίρεση του $9\frac{1}{2}$ από τον $17\frac{1}{4}$. Η κατάταξη της πράξης αυτής παρουσιάζεται ως εξής[69]:



Να διευκρινιστεί μόνο ότι στην επάνω δεξιά πλευρά γίνεται η διαίρεση του 62 με το 8, που έχει ως αποτέλεσμα το $17\frac{6}{8}$. Αμέσως από κάτω σημειώνεται πως το $\frac{6}{8}$ γίνεται $\frac{3}{4}$.

Στα προηγούμενα παραδείγματα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης χρησιμοποιήθηκε η απλοποίηση κλασμάτων, αυθόρμητα, ανεξήγητα. Το θέμα όμως διευκρινίζεται αμέσως μετά, με δύο ενότητες. Εδώ η συγκεκριμένη διαδικασία ονομάζεται “σχισμός ή σχίσις” και παρουσιάζεται ως εξής:

> “Σχίσις των τζακισμάτων, έναι μία μέθοδος, η οποια φέρνει τα τζακίσματα από μεγάλην ονομασία εις μικρήν.”[70]

Ο τρόπος απλοποίησης που προτείνεται είναι ο μετασχηματισμός ενός κλάσματος σε άλλο ισοδύναμο με ταυτόχρονους και συνεχείς υποδιπλασιασμούς του αριθμητή και του παρανομαστή του αρχικού κλάσματος ή γενικότερα τη διαίρεση τους με τον ίδιο αριθμό, π.χ.

$$\frac{32}{48} \to \frac{16}{24} \to \frac{8}{12} \to \frac{4}{6} \to \frac{2}{3},$$

$$\frac{28}{49} \to \frac{4}{7}.$$

---

[69] Στο ίδιο, φ. 19δ.

[70] Στο ίδιο. Αξίζει να αναφερθεί ότι ο όρος *σχίσις*, χρησιμοποιήθηκε για την ίδια πράξη από τον Pietro Borghi, με το ιταλικό όνομα “schisano”, στην δημοφιλή *Αριθμητική* του (1484), βλ. Smith, D.E.: The First Great Commercial Arithmetic, *Isis*, 8, 1926, σελ. 41-49, ειδ. σελ. 46.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια άλλη μέθοδος η “πλέον βεβαιωτέρα”. Πρόκειται για τον αλγόριθμο του Ευκλείδη, σύμφωνα με τον οποίο διαιρείται ο παρονομαστής με τον αριθμητή, με το υπόλοιπο της διαίρεσης διαιρείται ο αριθμητής που αν η διαίρεση είναι χωρίς υπόλοιπο, τότε το προηγούμενο υπόλοιπο είναι ο αριθμός που θα απλοποιήσει το αρχικό κλάσμα, αν όχι, τότε με το δεύτερο υπόλοιπο διαιρείται το πρώτο υπόλοιπο, με το υπόλοιπο που μένει διαιρείται το πρώτο υπόλοιπο και αν η διαίρεση αυτή είναι χωρίς υπόλοιπο, τότε το δεύτερο υπόλοιπο είναι ο αριθμός που θα απλοποιήσει το αρχικό κλάσμα, αν όχι επαναλαμβάνεται η προηγούμενη διαδικασία μέχρι να καταλήξει σε μηδενικό υπόλοιπο, π.χ. για το κλάσμα $\frac{945}{1260}$ το υπόλοιπο της διαίρεσης 1260:945 είναι 315, το υπόλοιπο της διαίρεσης 945:315 είναι 3 και το υπόλοιπο της διαίρεσης 315:3 είναι μηδέν, οπότε ο αριθμός 315 θα απλοποιήσει το αρχικό κλάσμα, με αποτέλεσμα ο νέος αριθμητής θα είναι ο 3=945:315 και ο νέος παρονομαστής θα είναι 1260:315=4, δηλ.

$$\frac{945}{1260} \to \frac{3}{4}.$$

Δύο ακόμη περιπτώσεις πρόσθεσης κλασμάτων εξετάζονται. Η πρώτη έχει να κάνει με την πρόσθεση τριών κλασμάτων, όπου εκτός από την προφανή αντιμετώπιση, δηλ. την πρόσθεση των δύο πρώτων και στη συνέχεια στο προηγούμενο άθροισμα προστίθεται και το τρίτο κλάσμα, παρουσιάζεται και η μέθοδος του κοινού πολλαπλασίου των παρανομαστών. Η μέθοδος αυτή παρουσιάζεται με το παράδειγμα της πρόσθεσης των κλασμάτων $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{5}$. Αρχίζει με την εύρεση του γινομένου των παρανομαστών, που στην προκειμένη περίπτωση είναι ο αριθμός 30 και ονομάζεται το γινόμενο αυτό “μέτρος”. Στη συνέχεια υπολογίζεται το άθροισμα των αριθμητών με βάση το “μέτρος”. Έτσι για το πρώτο κλάσμα λαμβάνεται το μισό του 30, δηλ. το 15, για το δεύτερο τα δύο τρίτα του 30, δηλ. 20 και για το τρίτο τα τρία πέμπτα του 30, δηλ. 18. Όλα μαζί κάνουν 53. Οπότε το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει από τη διαίρεση του 53 με το 30, που είναι $1\frac{23}{30}$.

Η δεύτερη περίπτωση αναφέρεται στη πρόσθεση μικτών αριθμών και παρουσιάζεται μια εναλλακτική διαδικασία σε σχέση με εκείνη της μετατροπής τους σε κλάσματα. Εδώ προτείνεται η πρόσθεση των ακεραίων, μετά των κλασμάτων και στο τέλος όλα μαζί.

Αξίζει να αναφερθεί ότι δεν εξετάζονται οι περιπτώσεις πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίου με κλάσμα. Στην πρόσθεση το αποτέλεσμα είναι αυτονόητο: το κλάσμα απλά θα “συγκολληθεί” στον ακέραιο και θα δημιουργηθεί ένας μικτός. Στην αφαίρεση όμως ο συγκεκριμένος χειρισμός παρουσιάζει μια ιδιομορφία, γιατί πουθενά δεν αναφέρεται ότι ένας ακέραιος μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με αριθμητή τον ίδιο και παρονομαστή τη μονάδα.

Ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων είναι η επόμενη πράξη που εξετάζεται. Εδώ διακρίνονται, από την αρχή, διάφορες περιπτώσεις, όπως ο πολλαπλασιασμός μικτού με μικτό, ακέραιου με μικτό και μικτού με κλάσμα. Για την πρώτη περίπτωση ο κανόνας που δίνεται είναι:

> *"αν θέλης να πολυπλασιάσης ακέραια καί τζακίσμα, με άλλα ακέραια και τζάκισμα ποίησον ούτως στρώσε τα ψηφία εις την τάξιν τους…έπειτα πολυπλασίασε του κάθε μερτικου τα ακέραια με την ρίζαν του, και πρόσθεσε και την κορυφήν του. έπειτα τα πολυπλασίασε αντάμα, και όσα γίνουν τά μέρισε, και ο μεριστής ευγένει πολυπλασιάζοντας τάς δύο ρίζες, και είτι εύγη εις το μέρος τόσον έγινεν."*[71]

Ενδεικτικό είναι το παράδειγμα του πολλαπλασιασμού του $5\frac{1}{2}$ με τον $4\frac{1}{2}$. Για το σκοπό αυτό μετατρέπονται οι μικτοί σε κλάσματα και γίνονται αντίστοιχα $\frac{11}{2}$, $\frac{9}{2}$. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους οι αριθμητές, με αποτέλεσμα 99 και οι παρονομαστές, με αποτέλεσμα 4. Δεν γράφεται όμως ως κλάσμα με αριθμητή το 99 και παρονομαστή το 4, γιατί πουθενά δεν αναφέρονται κλάσματα με αριθμητή μεγαλύτερο του παρονομαστή, που σημαίνει ότι δεν θεωρούνται αυτές οι περιπτώσεις ότι είναι κλάσματα. Έτσι το αποτέλεσμα διαμορφώνεται μετά τη διαίρεση 99:4, απ' όπου προκύπτει ο μικτός $24\frac{3}{4}$.

Οι άλλες παραλλαγές του πολλαπλασιασμού με τον ένα ή άλλο τρόπο ανάγονται στην προηγούμενη λογική, δηλ. στο γινόμενο των αριθμητών προς το γινόμενο των παρονομαστών. Στην περίπτωση που ο ένας παράγοντας είναι ακέραιος και ο άλλος κλάσμα, τότε η διαδικασία που προτείνεται είναι: το γινόμενο του ακεραίου με τον αριθμητή του κλάσματος ως νέος αριθμητής (δηλ. ο διαιρετέος) και ο παρονομαστής (δηλ. ο διαιρέτης) μένει ο ίδιος.

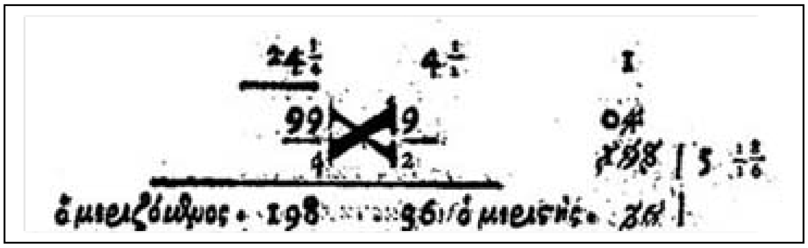
Η διαίρεση μικτών και κλασμάτων ακολουθεί ή πιο σωστά διαπλέκεται με τον χειρισμό των αντίστοιχων πολλαπλασιασμών. Οι οδηγίες για την πραγματοποίηση μιας διαίρεσης με μικτούς αριθμούς, που δίνονται, είναι οι εξής:

> *"άν θέλης νά μερίσης ακέραια καί τζάκισμα, μέ άλλα ακέραια, καί τζάκισμα, ποίησον ούτως,…ανάλυσον αυτά καί τά κάμε μίας φύσεως, ωσάν καί εις τον σουμαρισμόν ήγουν πολυπλασίασον τά ψηφία του μεριστού μέ τήν ρίζαν του καί πρόσθες καί τήν κορυφήν του, καί είτι εύγη καί γράφε. έπειτα πάλιν πολυπλασίασον καί τόν μεριζόμενον ποσόν μέ τήν ρίζαν του, καί πρόσθες καί τήν κορυφήν, καί είτι εύγη τά γράφε. έπειτα έπαρε τήν ρίζαν του μεριστου καί πολυπλασίασε, τόν μεριζόμενον. καί πάλιν έπαρε τήν ρίζαν του μεριζόμενου καί πολυπλασίασε,τόν μεριστήν, καί ούτως έγιναν μίας φύσεως. Έπειτα μέρισε τόν μεριζόμενον μέ τόν μεριστήν, και είτι εύγη τόσον έναι."*[72]

Φαίνεται ότι μερικά σημεία είναι μάλλον ασαφή. Στο παράδειγμα, όμως, που ακολουθεί όλα γίνονται πιο ξεκάθαρα. Πρόκειται για τη διαίρεση του $24\frac{3}{4}$ με

[71] Στο ίδιο, φ. 23δ.
[72] Στο ίδιο, φ. 24α.

τον $4\frac{1}{2}$. Σύμφωνα, λοιπόν, με τις οδηγίες οι μικτοί πρέπει να γίνουν κλάσματα, με την ίδια διαδικασία που αναφέρθηκε στην πρόσθεση μικτών και κλασμάτων. Στην προκειμένη περίπτωση μετασχηματίζονται αντίστοιχα σε $\frac{99}{4}$, $\frac{9}{2}$. Στη συνέχεια για τη διαίρεση αυτών των κλασμάτων, πολλαπλασιάζεται ο παρονομαστής του διαιρέτη με τον αριθμητή του διαιρετέου, δηλ. $2\times 99=198$, και ο παρονομαστής του διαιρετέου με τον αριθμητή του διαιρέτη, δηλ. $4\times 9=36$. Το ζητούμενο αποτέλεσμα θα προκύψει από τη διαίρεση 198:36, που είναι $5\frac{18}{36}$. Η σχηματική αναπαράσταση της συγκεκριμένης διαίρεσης εμφανίζεται ως εξής[73]:



Και εδώ οι διάφορες παραλλαγές της διαίρεσης αριθμών που περιέχουν και κλάσματα αντιμετωπίζονται με την ίδια λογική, όπως και στον πολλαπλασιασμό. Αυτή η συσχέτιση των διαδικασιών του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με κλάσματα έχει και μια ακόμη διασύνδεση, αυτή των δοκιμών. Συγκεκριμένα για τη δοκιμή του πολλαπλασιασμού προτείνεται η αντίστοιχη διαίρεση και αντίστροφα.

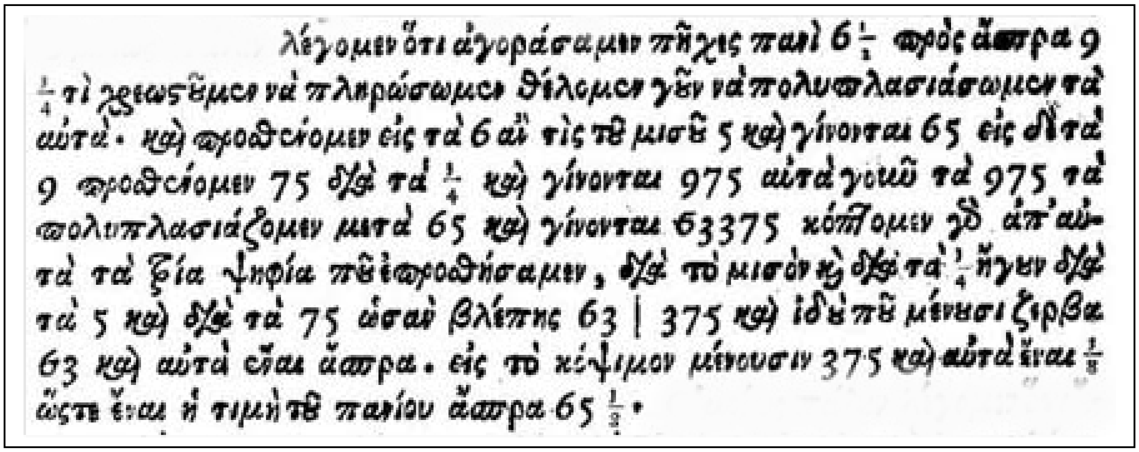
Στην ενότητα αυτή των αριθμητικών πράξεων με αριθμούς που περιέχουν και κλάσματα περιλαμβάνεται και μια παράγραφος, το κεφ. 46 (μς΄), όπου εισάγονται οι δεκαδικοί αριθμοί (ή τα δεκαδικά κλάσματα). Το γεγονός αυτό είναι ιστορικά αξιοσημείωτο, γιατί την περίοδο εκείνη, δηλ. πριν τα τέλη του $16^{ου}$ αιώνα, δεν ήταν διαδεδομένοι αυτού του είδους οι αριθμοί (ή τα κλάσματα). Στη *Λογαριαστική* για λόγους διευκόλυνσης της διαδικασίας πολλαπλασιασμού και διαίρεσης αξιοποιήθηκαν κάποιες ειδικές περιπτώσεις κλασμάτων, έτσι ώστε να παρακαμφθούν οι σύνθετοι χειρισμοί με τα κλάσματα. Συγκεκριμένα για τα κλάσματα

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8} \text{ και } \frac{7}{8}$$

αντιστοιχίζονται οι αριθμοί 5, 25, 75, 125, 375, 625 και 875, με την εξής έννοια: αν σ' ένα μικτό αριθμό το κλάσμα είναι $\frac{1}{2}$, τότε στο ακέραιο μέρος προσαρτάται το 5 αντί για το κλάσμα, π.χ. το $6\frac{1}{2}$ γράφεται ως 65 και είναι στα υπ' όψη ότι επισυνάφτηκε ένα ψηφίο, έτσι ώστε μετά την εκτέλεση μιας σχετικής πράξης θα πρέπει να αποκοπεί το τελευταίο ψηφίο και να

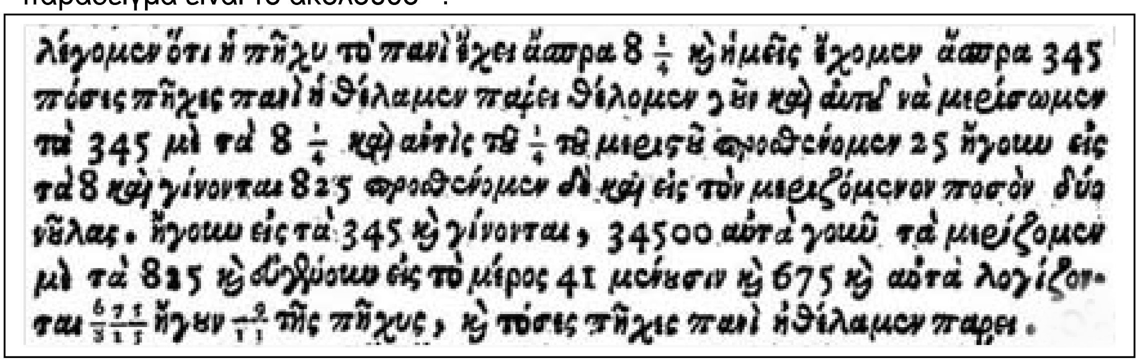
[73] Στο ίδιο, φ. 25α.

αναπαρασταθεί ως κλάσμα, π.χ. ο πολλαπλασιασμός $6\frac{1}{2}\times 3$ αντιστοιχίζεται στον $65\times 3=195$, αποκόπτεται το τελευταίο ψηφίο και γίνεται 19|5 και μετατρέπεται το αποκομμένο ψηφίο σε κλάσμα μ’ αποτέλεσμα $19\frac{1}{2}$. Με την ίδια λογική γίνονται οι αντικαταστάσεις και των άλλων “ισοδυναμιών”. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα πολλαπλασιασμού, όπου χρησιμοποιούνται αυτές οι “ισοδυναμίες”, είναι το εξής[74]:


λέγομεν ὅτι ἀγοράσαμεν πῆχις πανὶ 6 $\frac{1}{2}$ πρὸς ἄσπρα 9 $\frac{1}{4}$ τί χρεωστοῦμεν νὰ πληρώσωμεν. θέλομεν γοῦν νὰ πολυπλασιάσωμεν τὰ αὐτά. καὶ προσθέτομεν εἰς τὰ 6 αὐτὶς τοῦ μισοῦ 5 καὶ γίνονται 65 εἰς δὲ τὰ 9 προσθέτομεν 75 διὰ τὰ $\frac{1}{4}$ καὶ γίνονται 975 αὐτὰ γοῦν τὰ 975 τὰ πολυπλασιάζομεν μετὰ 65 καὶ γίνονται 63375 κόπτομεν γοῦν ἀπ’ αὐτὰ τὰ τρία ψηφία ποῦ ἐπροσθήσαμεν, διὰ τὸ μισὸν καὶ διὰ τὰ $\frac{1}{4}$ ἤγουν διὰ τὰ 5 καὶ διὰ τὰ 75 ὡσὰν βλέπης 63 | 375 καὶ ἰδοὺ ποῦ μένουσι ζερβὰ 63 καὶ αὐτὰ εἶναι ἄσπρα. εἰς τὸ κέψιμον μένουσιν 375 καὶ αὐτὰ εἶναι $\frac{3}{8}$ ὥστε εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ πανίου ἄσπρα 65 $\frac{3}{8}$.

Γίνεται φανερό ότι χρησιμοποιείται ένα βοηθητικό είδος αριθμού, δηλ. ο 63|375 και υπονοούνται άλλοι δύο δηλ. ο 6|5 και ο 9|75. Και ο ρόλος τους είναι να γίνει η διαδικασία του πολλαπλασιασμού παρακάμπτοντας τα κλάσματα, δηλ. μόνο με τη διαδικασία του πολλαπλασιασμού ακεραίων. Όπως μάλιστα φαίνεται αυτοί οι βοηθητικοί αριθμοί δεν έχουν υπόσταση, παρά ένα είδος βοηθητικού καταλύτη.

Ανάλογα αξιοποιούνται οι βοηθητικοί αυτοί αριθμοί και στη διαίρεση. Ένα παράδειγμα είναι το ακόλουθο[75]:


λέγομεν ὅτι ἡ πῆχυ τὸ πανὶ ἔχει ἄσπρα 8 $\frac{1}{4}$ καὶ ἡμεῖς ἔχομεν ἄσπρα 345 πόσες πῆχες πανὶ ἠθέλαμεν πάρει θέλομεν γοῦν καὶ αὐτὰ νὰ μερίσωμεν τὰ 345 μὲ τὰ 8 $\frac{1}{4}$ καὶ αὐτὶς τοῦ $\frac{1}{4}$ τοῦ μερισμοῦ προσθέτομεν 25 ἤγουν εἰς τὰ 8 καὶ γίνονται 825 προσθέτομεν δὲ καὶ εἰς τὸν μεριζόμενον ποσὸν δύο νοῦλας. ἤγουν εἰς τὰ 345 καὶ γίνονται, 34500 αὐτὰ γοῦν τὰ μερίζομεν μὲ τὰ 825 καὶ ἐβγαίνουν εἰς τὸ μέρος 41 μένουσιν καὶ 675 καὶ αὐτὰ λογίζονται $\frac{675}{825}$ ἤγουν $\frac{9}{11}$ τῆς πῆχυς, καὶ πόσες πῆχες πανὶ ἠθέλαμεν πάρει.

Η μέθοδος αυτή δεν μπορεί, σύμφωνα με τη *Λογαριαστική*, να γενικευτεί, έτσι ώστε οι μικτοί αριθμοί να διαμορφώνονται, με κάποιο τρόπο, σε ακεραίους, όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις[76]. Η δυνατότητα αυτή υπάρχει μόνο

[74] Στο ίδιο, φ. 29α.
[75] Στο ίδιο, φ. 29β.
[76] Στο ίδιο, φφ. 29β-30α.

στις περιπτώσεις που ο παρονομαστή του κλάσματος είναι 10, 100,1000 ή τα προηγούμενα κλάσματα γιατί

$$\frac{1}{2}=\frac{5}{10},\ \frac{1}{4}=\frac{25}{100},\ \frac{3}{4}=\frac{75}{100},\ \frac{1}{8}=\frac{125}{1000},\ \frac{3}{8}=\frac{375}{1000},\ \frac{5}{8}=\frac{625}{1000}\ \text{και}\ \frac{7}{8}=\frac{875}{1000}.$$

Γιατί όμως επιλέγονται μόνο αυτά τα κλάσματα; Γιατί δεν είναι αξιοποιήσιμα και άλλα κλάσματα με παρονομαστές το 10, 100 και 1000, π.χ. το $\frac{2}{10}$; Η απάντηση δίνεται και είναι αρκετά ρεαλιστική. Σημειώνονται σχετικά τα εξής:

> "*Επειδή εις τόν τόπον της τουρκίας δέν πολιτεύονται άλλα τζακίσματα μόνον μισό, καί τέταρτον, καί όγδοον, διότι το ένα άσπρον έναι οκτώ κουκκία, ομοίως και η πηχυ αυτων έναι οκτώ όγδοα, τά οποια λέγουσιν ρουπία. διατουτο ερεύνησαν καί ευρήκαν αυτήν την μέθοδον των τζακισμάτων…*"[77]

Αυτή η πραγματιστική και ταυτόχρονα περιοριστική σκοπιά βοήθησε στο να γίνει ένα βήμα για την πρόωρη εισαγωγή των δεκαδικών αριθμών (δηλ. των δεκαδικών κλασμάτων) στην ελληνική μαθηματική παιδεία. Δεν βοήθησε, όμως, να αναπτυχθεί μια ευρύτερη οπτική γωνία και έτσι να καλλιεργηθεί ένα γενικότερο πλαίσιο για τις περιπτώσεις αυτές και τον αριθμητικό τους λογισμό. Είναι αλήθεια ότι διεθνώς δεν είχε αναπτυχθεί, μέχρι την εποχή της πρωτοέκδοσης της *Λογαριαστικής*, μια γενική θεώρηση και ένας ολοκληρωμένος λογισμός των δεκαδικών κλασμάτων. Είχαν ωστόσο μια περιστασιακή παρουσία σε κάποια εγχειρίδια Αριθμητικής ή σε κάποιες υπολογιστικές τεχνικές που χρησιμοποιούνταν την εποχή εκείνη. Αξίζει μια σύντομη αναδρομή της ιστορικής εξέλιξης των δεκαδικών κλασμάτων και έτσι να γίνει δυνατή η ένταξη του αντίστοιχου θέματος της *Λογαριαστικής* μέσα στο ιστορικό του πλαίσιο.

Διάφορες ιδέες και νύξεις σχετικές με δεκαδικά κλάσματα ή με προκαταρτικές τους ιδιότητες[78] και τεχνικές[79] εμφανίστηκαν, περιστασιακά και μεμονωμένα, σε κινεζικά, αραβικά, εβραϊκά και λατινικά κείμενα από τον 3^{ο} μέχρι τον 14^{ο} αιώνα[80]. Το 1427 ο al-Kashi, περσικής καταγωγής, έδωσε μια ισχυρή ώθηση στα δεκαδικά κλάσματα. Συγκεκριμένα στο βιβλίο του *Κλειδί της Αριθμητικής (Miftah al hisab)* εξέτασε τα δεκαδικά κλάσμα μεθοδικά, στην προσπάθεια του να τα εδραιώσει ως ένα υπολογιστικό σύστημα, στο οποίο οι αριθμητικές πράξεις να εκτελούνται με τον ίδιο τρόπο όπως αυτές των ακεραίων. Για την

---

[77] Στο ίδιο, φ. 30α.

[78] Όπως π.χ. οι ιδιότητες των δυνάμεων $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$, $\alpha^{\mu}:\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$.

[79] Όπως π.χ. η υπολογιστική τεχνική $\sqrt{\alpha}=\dfrac{\sqrt{\alpha\cdot 10^{2\nu}}}{10^{\nu}}$.

[80] Όπως στα κείμενα των κινέζων Liu Hui (3^{ος} αιώνας μ.Χ.), Yang Hui (13^{ος} αιώνας μ.Χ.), των αράβων al-Uqlidisi (10^{ος} αιώνας μ.Χ.), al-Nasawi (11^{ος} αιώνας μ.Χ.), των εβραίων Ibn al-Samawal (12^{ος} αιώνας μ.Χ.), Immanuel Bonfils από την Tarascon (14^{ος} αιώνας μ.Χ.) και οι δυτικο-ευρωπαίοι χριστιανοί Jordanus Nemorarius (13^{ος} αιώνας μ.Χ.), Johannes de Muris (14^{ος} αιώνας μ.Χ.).

αναπαράστασης τους χρησιμοποίησε διάφορους τρόπους. Π.χ. τον 17,28 τον έγραφε[81] ως 17 28 ή 17 28 δεύτερη δεκάδα ή

Ακέραιοι	1η δεκάδα	2η δεκάδα	ή	ακέραιοι	κλάσματα
17	2	8		17	28

Στο δεύτερο μισό του 15ου αιώνα και στο πρώτο μισό του 16ου αιώνα άρχισε να εμφανίζονται τα δεκαδικά κλάσματα στα τυπωμένα βιβλία Αριθμητικής. Όπως στην *Αριθμητική του Treviso*[82] (1478), που είναι το πρώτο τυπωμένο βιβλίο *Αριθμητικής*, όπου χρησιμοποιήθηκε[83] η εγκάρσια κεραία για να διαχωριστεί το ακέραιο από το δεκαδικό μέρος ενός αριθμού, π.χ. 20 |16.

Όμοια στην *Αριθμητική* (*Novel opera de arithmetica,* 1484) του Pietro Borghi, που ήταν το πιο δημοφιλές βιβλίο του είδούς του στη Βενετία και στην Ιταλία γενικότερα την περίοδο 1484-1560.[84] Επίσης η *Τέχνη της Αριθμητικής* (*Art de arithmeticha*, 1492) του Francesco Pellizzati (ή Pellos) περιλάμβανε δεκαδικά κλάσματα, στα οποία αντί την εγκάρσια κεραία χρησιμοποιούσε την τελεία.[85] Εκτός από τα ιταλικά βιβλία Αριθμητικής που αναφέρθηκαν[86], τα δεκαδικά κλάσματα, με τη χρήση της εγκάρσιας κεραίας, διαδόθηκαν και στη Γερμανία. Δύο τέτοια παραδείγματα είναι η *Αριθμητική* (*Eyn Newe Vnnd wolgegründte vnderweysung aller Kauffmanss Rechnung*, 1527) του Peter Apian και η Αριθμητική (*Exempel Büchlin Rechnung*, 1530) του Christoff Rundolff. Στις αναφορές αυτές θα πρέπει να προστεθεί και η *Αριθμητική* (*Sefer ha-mispar*, 1533) του Elijah ben Abraham Mizrahi, αρχιραβίνου της Κωνσταντινούπολης στο γύρισμα του 15ου αιώνα. Πρόκειται για μια επισήμανση με ιδιαίτερη ιστορική σημασία για τη *Λογαριαστική*, λόγω της γεωγραφικής συγκυρίας της με την εβραϊκή αυτή *Αριθμητική*. Μια συγκυρία που εμπεριείχε και την τουρκική διάσταση του θέματος, όπως προκύπτει, τουλάχιστον, από τη μαρτυρία της *Λογαριαστικής*. Και δεν αποκλείεται η διάδοση των δεκαδικών κλασμάτων στην Τουρκία να οφείλεται στον Ali Qushji, συνεργάτη του al-Kashi στο αστεροσκοπείο της Σαμαρκάνδης, που εγκαταστάθηκε στη Κωνσταντινούπολη το δεύτερο μισό του 15ου αιώνα.[87]

Η περίπτωση των δεκαδικών κλασμάτων της *Λογαριστικής* σχετίζεται άμεσα με τη *Συλλογή των 100 προβλημάτων*, που είναι προγενέστερή της, και αναφέρεται ρητά στη σχετική τουρκική συμπεριφορά.[88] Διαφαίνεται λοιπόν ότι

---

[81] Βλ. Saidan, A.S.: *The Arithmetic of Al-Uqlidisi*, D. Reidel Publ. Comp., 1978, σελ. 483.

[82] Είναι πόλη της Βόρειας Ιταλίας, κοντά στη Βενετία.

[83] Βλ. Swetz, F.J.: *Capitalism & Arithmetic*, Open Court, 1987, σελ. 117.

[84] Βλ. Smith, D.E.: The First Great Commercial Arithmetic, *Isis*, 8, 1926, σελ. 41-49, ειδ. σελ. 41.

[85] Βλ. Sarton. G.:The first explanation of decimal fractions and measures (1585)….*Isis*, 23, 1935, σελ. 153-244, ειδ. σελ. 172.

[86] Μεταξύ αυτών ήταν και η *Πρακτική Αριθμητική* (*Practica arithmetice,* 1539) του Girolamo Cardano, όπως και η *Αριθμητική* (*Le Pratiche delle dve Prime Mathematiche. Libro d' Albaco e Geometria,* 1546) του Pietro Cataneo.

[87] Βλ. Youschkevitch, A.P./Rosenfeld, B.A.: Al-Kashi, *Dictionary of Scientific Biography,* ed. by C.C. Gillispie, Publ. by Charles Scribner's Sons, 1970-1980, Vol. 7, σελ. 255-262, ειδ. σελ. 257.

[88] Βλ. Hunger, H./Vogel, K.: *Ein Byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts*, Der Oesterreichischen Akademie der Wissenschaften in Wien, 1963, σελ. 30. Βλ. επίσης

η ελληνική αυτή στάση ήταν ένα είδος διαπολιτισμικής όσμωσης. Ωστόσο η ιστορική της πρωτοτυπία είναι αξιοσημείωτη, όπως φαίνεται από τις επισημάνσεις σύγχρονων ιστορικών των Μαθηματικών.[89]

δ. Οι αριθμητικές μέθοδοι

Η μέθοδος των τριών, που ήταν πολύ δημοφιλής στα βιβλία Πρακτικής ή Εμπορικής Αριθμητικής της Αναγέννησης, παρουσιάζεται στη *Λογαριαστική* αμέσως μετά την εξέταση των κλασμάτων. Θεωρείται ότι είναι η βασικότερη μέθοδος όλων των άλλων. Είναι αυτή που "*την λέγουν οι ιταλοί, ρέγουλα ντελτρέ*"[90], δηλ. regola delle tre.

Σύμφωνα με τη γενική περιγραφή του βιβλίου η μέθοδος αυτή "*γίνεται*" με τρεις αριθμούς εκ των οποίων δύο είναι "*μίας φύσεως και ομοία*", δηλ. ο πρώτος και ο τρίτος, ενώ ο δεύτερος δεν είναι όμοιος. Απ' αυτούς τους αριθμούς βρίσκεται ένας τέταρτος ως πηλίκο του γινομένου του δεύτερου και τρίτου με διαιρέτη τον πρώτο. Και ο τέταρτος αριθμός που προκύπτει με τη μέθοδο των τριών είναι "*μίας φύσεως μέ τό δεύτερον* ".[91] Με άλλα λόγια: αν α, β, γ είναι τρεις αριθμοί, με τον α και β να εκφράζουν ποσότητες του ίδιου είδους, τότε βρίσκεται ένας τέταρτος δ ως $\frac{\beta\times\gamma}{\alpha}$ ο οποίος θα είναι του ίδιου είδους με τον β. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην ιδιότητα των αναλογιών:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Rightarrow\delta\times\alpha=\beta\times\gamma\Rightarrow\delta=\frac{\beta\times\gamma}{\alpha}.$$

Για το υπόβαθρο αυτό δεν γίνεται καμία νύξη, μ' αποτέλεσμα η συγκεκριμένη μέθοδος να εμφανίζεται ως μια χονδροειδής πρακτική, ως υπολογιστικός τυφλοσούρτης. Είναι ωστόσο αλήθεια ότι το ίδιο συνέβαινε και στα αντίστοιχα βιβλία της εποχής.[92] Το πνεύμα της Πρακτικής ή Εμπορικής Αριθμητικής, τότε, ήταν "πρακτικίστικο". Και η *Λογαριαστική* ήταν διαποτισμένη μ' αυτό το πνεύμα.

Η θεωρητική αυτή ανεπάρκεια καλύπτονταν, κατά κανόνα, με την παρουσίαση μιας ποικιλίας συγκεκριμένων παραδειγμάτων όπου εφαρμόζονταν η εν λόγω μέθοδος. Η προσέγγιση αυτή απέβλεπε στην εξάσκηση των ενδιαφερόμενων με την άμεση εφαρμογή της σε πραγματικά ή "πραγματικοφανή" προβλήματα. Ήταν δηλαδή μια τακτική εμπειρικής εξάσκησης ενός υποψήφιου εμπειροτέχνη για λογιστική ή υπολογιστική δραστηριότητα. Και η *Λογαριαστική* ήταν πλήρως ενταγμένη σ΄ αυτή τη νοοτροπία. Έτσι μια σειρά παραδειγμάτων έπρεπε να βοηθήσουν στον χειρισμό και την εμπέδωση της συγκεκριμένης μεθόδου.

Καστάνη, Ν.: *Όψεις της Νεοελληνικής Μαθηματικής Παιδείας*, εκδ. Μαθηματική Βιβλιοθήκη Χ. Βαφειάδη, 1998, σελ. 42-43, 53-54.

[89] Βλ. Youschkevitch, A.P.: *Les Mathématiques Arabes (VIII-XV siècles)*, Librairie J. Vrin, 1976, σελ. 75 και Rashed, R.: *Entre Arithmétique et Algébre*, Les Belles Lettres, 1984, σελ. 137.

[90] Βλ. πρ. παρ. 51, φ. 30δ.

[91] Στο ίδιο.

[92] Βλ. Jackson, L.L., πρ. παρ. 53, σελ. 133.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της μεθόδου των τριών στη *Λογαριαστική* είναι το εξής[93]:

ἐὰν τὰ 8 ῥούπια ὁ καμουχὰς μᾶς ἔδωσαν ἄσπρα 75 τί θέλουν μᾶς δώση τὰ 5 καὶ πολυπλασιάζομεν τὰ δεύτερα ψηφία μὲ τὰ τρίτα, ἤγουν τὰ 75 μὲ τὰ 5 καὶ γίνονται 375 καὶ αὐτὰ τὰ μοιράζομεν μὲ τὰ πρῶτα, ἤγουν μὲ τὰ 8 καὶ εὐγαίνουν 46 $\frac{7}{8}$ καὶ τόσον ἔχει νὰ πληρώση, διὰ τὰ 5 ῥούπια, ἤγουν ἄσπρα 46 φόλες 35 ὡσὰν βλέπεις καὶ εὐγῆκαν εἰς τὰ ψηφία.

Ἐὰν τὰ 8——75——5

75	0		40	0	
5	0$\cancel{3}$7	ἄσπρα	7	040	φόλες
375	$\cancel{37}\cancel{8}$	46	280	$\cancel{28}$0	35
	$\cancel{8}\cancel{8}$			$\cancel{8}\cancel{8}$	

Διευκρινιστικά να αναφερθεί ότι το ρούπι είναι μονάδα μήκους και αντιστοιχεί στο ένα όγδοο του πήχη [ο οποίος είναι 0,64 του μέτρου]. Το άσπρο ήταν νομισματική μονάδα των Οθωμανών με υποδιαίρεση τις φόλες και ένα άσπρο αντιστοιχούσε σε 40 φόλες. Ο καμουχάς είναι είδος μεταξωτού υφάσματος. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι για την αναπαράσταση της μεθόδου των τριών συνηθίζονταν, τότε, να χρησιμοποιούν τη γραμμική διάταξη των δεδομένων με τη μορφή: α — β — γ, όπου α, γ είναι όμοιες ποσότητες και ο β άλλου είδους, όμοιο όμως με το ζητούμενο.

Μετά την εφαρμογή της μεθόδου των τριών σε περιπτώσεις με διαφορετικά μέτρα και σταθμά, όπως και την μικτούς αριθμούς, εισάγεται η αντίστροφη μέθοδος των τριών. Σύμφωνα με τον κανόνα, η διαδικασία που ακολουθείται είναι ο πολλαπλασιασμός του πρώτου με το δεύτερο και η διαίρεση του γινομένου τους με τον τρίτο.[94] Δεν διευκρινίζεται πότε εφαρμόζεται η μέθοδος αυτή. Αντί γι' αυτό παρουσιάζονται διάφορα συγκεκριμένα παραδείγματα, όπως το εξής[95]:

ὅταν ἐπουλίετον τὸ πιπέρι ἄσπρα 12 ἡ κάθε λίτρα, ἔδιδαν 8 δράμια εἰς τὸ κάθεν ἄσπρον. τώρα ἔχει ἡ λίτρα ἄσπρα 9 πόσα δράμια, νὰ δώσουν εἰς τὸ ἄσπρον; κάμε καὶ αὐτήν, ὡσὰν βλέπης εἰς τὰ ψηφία. καὶ οὕτως κάμε πάντα καὶ ποτὲ νὰ μὴν σφάλης.

12——8——9

12	0	
8	$\cancel{9}$6	10 $\frac{2}{3}$
96	$\cancel{9}\cancel{9}$	

93 Βλ. πρ. παρ. 51, φ. 31δ.
94 Στο ίδιο, φ. 35α.
95 Στο ίδιο, φ. 35δ. Στο παράδειγμα χρησιμοποιούνται τα *δράμια* που είναι μονάδα βάρους, με το ένα *δράμι* να αντιστοιχεί στο ένα τετρακοσιοστό της οκάς, η οποία είναι 1282 γραμμάρια. Επίσης χρησιμοποιείται η *λίτρα* που είναι μονάδα βάρους και αντιστοιχούσε σε 400 δράμια.

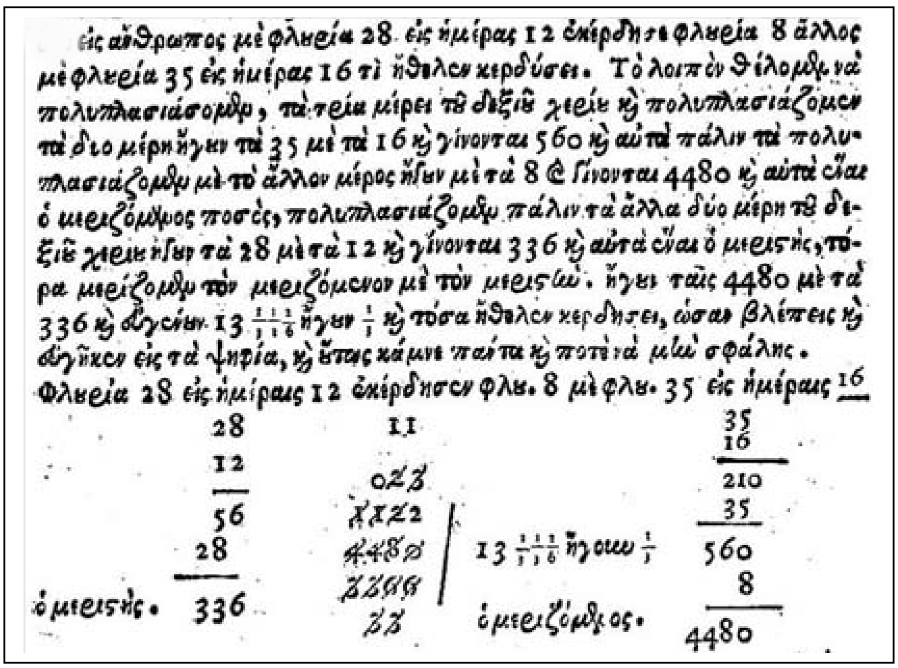
Σ' αυτή την περίπτωση η αναλογία που συνδέει τους τρεις δοσμένους αριθμούς α — β — γ με τον ζητούμενο τέταρτο, δ, είναι:

$$\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta}} = \frac{\gamma}{\frac{1}{\delta}} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha \times \beta}{\gamma}$$ [96].

Μέσα σ' αυτό το πλαίσιο της επίλυσης προβλημάτων με την αξιοποίηση της θεωρίας των αναλογιών, η μέθοδος των τριών επεκτείνεται σε δύο πιο σύνθετες μεθόδους: τη μέθοδο των πέντε και τη μέθοδο των επτά. Στη μέθοδο των πέντε δίνονται 5 αριθμοί α — β — γ — δ — ε και ζητείται ένας έκτος αριθμός ζ. Σύμφωνα με τις οδηγίες της *Λογαριαστικής*

> "*πολυπλασίασον αντάμα τα τρία μέρη, του δεξιου χερίου, καί όσον γένουν αυτά έναι ο μεριζόμενος ποσός. καί πάλιν πολυπλασίασον τά δύο μέρη του ζερβου χερίου καί όσα γένουν αυτά έναι ο μεριστής, έπειτα μέρισον μέ τόν μεριστήν τόν μεριζόμενον καί όσα εύγουν τόσον έναι.*"[97]

Το πρώτο παράδειγμα όπου εφαρμόζεται ο κανόνας αυτός είναι το εξής[98]:


εἷς ἄνθρωπος μὲ φλωρία 28 εἰς ἡμέρας 12 ἐκέρδησε φλωρία 8 ἄλλος μὲ φλωρία 35 εἰς ἡμέρας 16 τί ἤθελεν κερδίσει. Τὸ λοιπὸν θέλομεν νὰ πολυπλασιάσομεν, τὰ τρία μέρη τοῦ δεξιοῦ χεριοῦ καὶ πολυπλασιάζομεν τὰ δύο μέρη ἤγουν τὰ 35 μὲ τὰ 16 καὶ γίνονται 560 καὶ αὐτὰ πάλιν τὰ πολυπλασιάζομεν μὲ τὸ ἄλλον μέρος ἤγουν μὲ τὰ 8 καὶ γίνονται 4480 καὶ αὐτὰ εἶναι ὁ μεριζόμενος ποσός, πολυπλασιάζομεν πάλιν τὰ ἄλλα δύο μέρη τοῦ δεξιοῦ χεριοῦ ἤγουν τὰ 28 μὲ τὰ 12 καὶ γίνονται 336 καὶ αὐτὰ εἶναι ὁ μεριστής, τώρα μερίζομεν τὸν μεριζόμενον μὲ τὸν μεριστήν. ἤγουν τὰς 4480 μὲ τὰ 336 καὶ ἐβγαίνει 13 $\frac{1}{1}\frac{1}{1}\frac{1}{6}$ ἤγουν $\frac{1}{3}$ καὶ τόσα ἤθελεν κερδήσει, ὡσὰν βλέπεις καὶ ἀπῆκεν εἰς τὰ ψηφία, καὶ οὕτως κάμνε πάντα καὶ ποτὲ νὰ μηδὲ σφάλλῃς.

Φλωρία 28 εἰς ἡμέρας 12 ἐκέρδησεν φλω. 8 μὲ φλω. 35 εἰς ἡμέρας 16

28	11		35
12	023		16
56	2222		210
28	4480	13 $\frac{1}{1}\frac{1}{1}\frac{1}{6}$ ἤγουν $\frac{1}{3}$	35
ὁ μεριστής. 336	3366		560
	33	ὁ μεριζόμενος.	8
			4480

Η αναλογία που στηρίζεται η μέθοδος των πέντε, με δοσμένους τους πέντε αριθμούς α — β — γ — δ — ε και να ζητείται ο ζ, είναι:

$$\frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{\beta} = \frac{\frac{\zeta}{\delta}}{\varepsilon} \Rightarrow \zeta = \frac{\gamma \times \delta \times \varepsilon}{\alpha \times \beta}.$$

Η μέθοδος των επτά έχει τα ίδια χαρακτηριστικά. Εδώ δίνονται 7 αριθμοί

α — β — γ — δ — ε — ζ — η

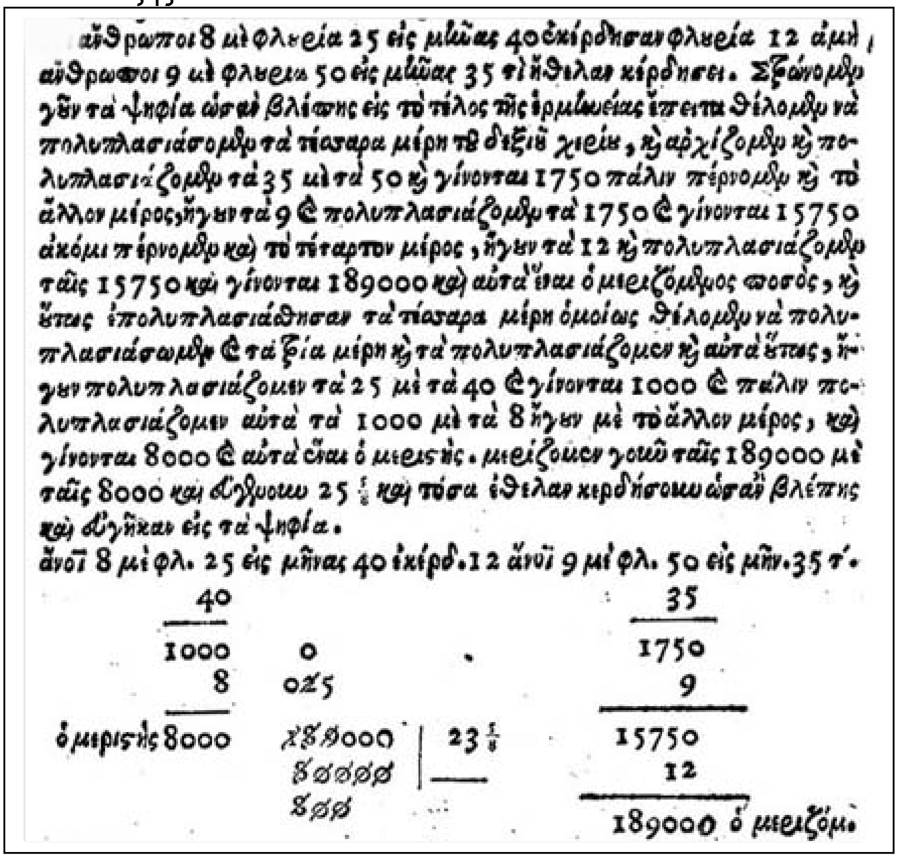
---

[96] Βλ. Swetz, F.J., πρ. παρ. 83, σελ. 230.
[97] Βλ. πρ. παρ. 51, φ. 36α.
[98] Στο ίδιο.

και ζητείται ο θ. Στη περίπτωση αυτή η μέθοδος στηρίζεται στην αναλογία:

$$\frac{\frac{\delta}{\alpha}}{\beta\times\gamma}=\frac{\frac{\theta}{\varepsilon}}{\zeta\times\eta}\Rightarrow\theta=\frac{\delta\times\varepsilon\times\zeta\times\eta}{\alpha\times\beta\times\gamma}\ .$$

Και το παράδειγμα της *Λογαριαστικής*, όπου πρωτο-εφαρμόζεται η μέθοδος των 7 είναι το εξής[99]:


ἄνθρωποι 8 μὲ φλωρία 25 εἰς μῆνας 40 ἐκέρδησαν φλωρία 12 ἀμή, ἄνθρωποι 9 μὲ φλωρία 50 εἰς μῆνας 35 τί ἤθελαν κέρδησει. Σβάνομεν γοῦν τὰ ψηφία ὡσὰν βλέπεις εἰς τὸ τέλος τῆς ἑρμηνείας ἔπειτα θέλομεν νὰ πολυπλασιάσομεν τὰ τέσσαρα μέρη τοῦ δεξιοῦ χερίου, καὶ ἀρχίζομεν καὶ πολυπλασιάζομεν τὰ 35 μὲ τὰ 50 καὶ γίνονται 1750 πάλιν παίρνομεν καὶ τὸ ἄλλον μέρος, ἤγουν τὰ 9 καὶ πολυπλασιάζομεν τὰ 1750 καὶ γίνονται 15750 ἀκόμι παίρνομεν καὶ τὸ τέταρτον μέρος, ἤγουν τὰ 12 καὶ πολυπλασιάζομεν ταῖς 15750 καὶ γίνονται 189000 καὶ αὐτὰ εἶναι ὁ μερειζόμενος ποσός, καὶ ὥστε ἐπολυπλασιάσθησαν τὰ τέσσαρα μέρη ὁμοίως θέλομεν νὰ πολυπλασιάσωμεν καὶ τὰ τρία μέρη καὶ τὰ πολυπλασιάζομεν καὶ αὐτὰ ὥστε, ἤγουν πολυπλασιάζομεν τὰ 25 μὲ τὰ 40 καὶ γίνονται 1000 καὶ πάλιν πολυπλασιάζομεν αὐτὰ τὰ 1000 μὲ τὰ 8 ἤγουν μὲ τὸ ἄλλον μέρος, καὶ γίνονται 8000 καὶ αὐτὰ εἶναι ὁ μερειστής. μερείζομεν γοῦν ταῖς 189000 μὲ ταῖς 8000 καὶ εὑγαίνουν 23 $\frac{5}{8}$ καὶ τόσα ἤθελαν κερδήσουν ὡσὰν βλέπεις καὶ εὑγῆκαν εἰς τὰ ψηφία.

ἄνοι 8 μὲ φλ. 25 εἰς μῆνας 40 ἐκέρδ. 12 ἄνοι 9 μὲ φλ. 50 εἰς μῆν. 35 τί.

40			35
1000	0		1750
8	025		9
ὁ μεριστὴς 8000	189000	23 $\frac{5}{8}$	15750
	80000		12
	800		189000 ὁ μερειζόμ.

Οι μέθοδοι αυτοί που ήταν αρκετά διαδεδομένες στα εγχειρίδια Πρακτικής ή Εμπορικής Αριθμητικής, την περίοδο της Αναγέννησης, στη Δυτική Ευρώπη[100], αναπτύχθηκαν ως υπολογιστικές τεχνικές, αρχικά, στον Ινδικό και Κινέζικο Πολιτισμό κατά τον πρώιμο Μεσαίωνα και προωθήθηκαν σημαντικά στον Ισλαμικό Πολιτισμό και την εβραϊκή παιδεία την περίοδο του ύστερου Μεσαίωνα[101]. Στην ελληνική παιδεία φαίνεται ότι εισάγεται στα μέσα του 16^{ου} αιώνα με το χειρόγραφο της *Συλλογής των 100 προβλημάτων*[102] όπως και στο χειρόγραφο *Αριθμητικής* που φυλάσσεται στην Εθνική Βιβλιοθήκη της Ελλάδας (με κωδικό: ΕΒΕ 1107)[103].

[99] Στο ίδιο, φ. 37δ.

[100] Βλ. Jackson, L.L., πρ. παρ. 53, σελ. 131-139. Επίσης βλ. Egmond, W. Van, πρ. παρ. 66, σελ. 247-252.

[101] Βλ. Tropfke, J.: *Geschichte der Elementarmathematik*, Band 1 *Arithmetik und Algebra*, 4. Auflage, Walter de Gruyter, 1980, σελ. 359-363. Επίσης βλ. Smith, D.E.: *History of Mathematics*, Vol.II, Dover Publ., 1958, σελ. 483-492 και Gandz, S.: The Rule of Three in Arabic and Hebrew Sources, *Isis*, 22, 1934-1935, σελ. 220-222.

[102] Βλ. Hunger, H./Vogel, K., πρ. παρ. 88, σελ. 105.

[103] Βλ. Σωτηράκη, Ν.Δ.: Συμβολή στην Έρευνα του Νεοελληνικού Διαφωτισμού. Τα Μαθηματικά επί Τουρκοκρατίας (αναδημ.), *Διάσταση*, 2-3, 1989, σελ. 25-50, ειδ. σελ. 35-36.

ε. Αριθμητικές εφαρμογές

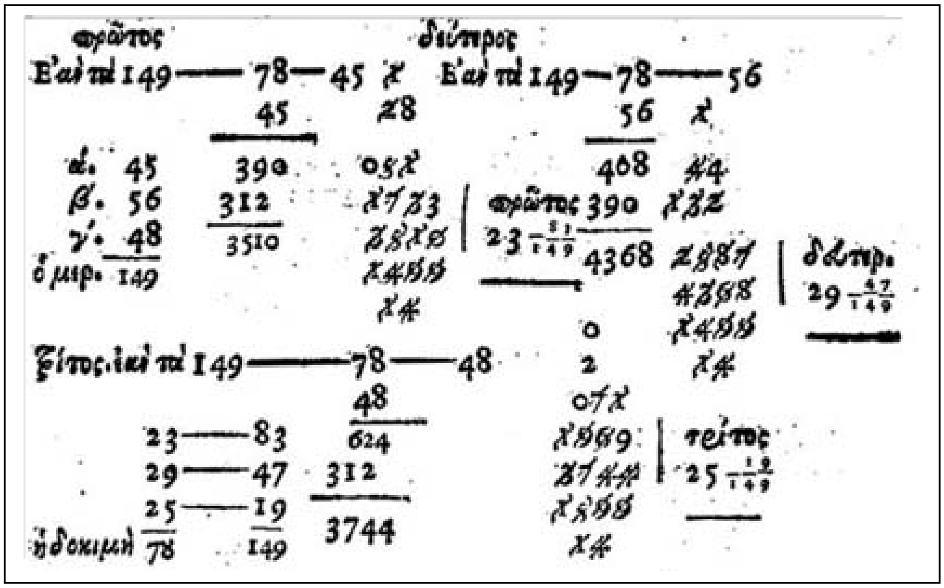
Η αξιοποίηση των υπολογιστικών διαδικασιών σε εμπορικά και οικονομικά προβλήματα ήταν το κέντρο βάρους όλων των εγχειριδίων Πρακτικής ή Εμπορικής Αριθμητικής την περίοδο της Αναγέννησης. Έτσι και στη *Λογαριαστική* δινόταν ιδιαίτερη έμφαση σ' αυτού του είδους τα προβλήματα. Στην προκειμένη περίπτωση τα προβλήματα αυτά πρόβαλαν ως εφαρμογές των αριθμητικών μεθόδων.

Η πρώτη ομάδα προβλημάτων, που παρουσιάζονται μετά τις αριθμητικές μεθόδους, ήταν αυτά των συνεταιρισμών. Στην αρχή εξετάζονται οι απλές περιπτώσεις του κέρδους μιας ομάδας συνεταίρων (μετόχων) και στη συνέχεια αντιμετωπίζονται πιο σύνθετες περιπτώσεις με τη συσχέτιση και του χρόνου συμμετοχής του κάθε μετόχου. Ένα παράδειγμα "απλού" συνεταιρισμού είναι το εξής[104]:

> Θέτοντας οἱ τρεῖς ἔκαμαν συντροφίαν, καὶ ὁ πρῶτος ἔβαλεν φλωρ. 45· καὶ ὁ δεύτερος 56 καὶ ὁ τρίτος 48 καὶ αὐτὰ τὰ ἐδῶσαν εἰς πραγματείαν καὶ ἐκέρδησαν φλωρ. 78 ἐρωτῶσι πόσον διάφορον ἐγγίζει τοῦ καθ' ἑνὸς διὰ τὸ μερτικόν του. Ἂν θέλης νὰ εὕρης τί ἐγγίζει τοῦ κάθε ἑνὸς ποίησον οὕτως, ἔπαρε ἐκεῖνα ποῦ ἔβαλεν ὁ κάθε εἷς ἤγουν τοῦ πρώτου τὰ 45 τοῦ δευτέρου τὰ 56 καὶ τοῦ τρίτου τὰ 48 καὶ τὰ συμμάζευσε, καὶ γίνονται 149 καὶ αὐτὰ εἶναι ὁ μεριστής, ἤγουν βάλετα εἰς τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, καὶ εἰπὲ ἐὰν τὰ 149 τὸ κεφάλαιον, μοῦ ἔδωσαν διάφορον 78 τὰ 45 τοῦ πρώτου, τί θέλουν μοῦ δώση. Ὁμοίως καὶ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου. Ἤγουν πολυπλασίασε τοῦ καθ' ἑνὸς τὸ μερτικὸν μὲ τὸ διάφορον καὶ μέρισε μὲ τὴν σοῦμαν, ἤγουν τὸν μεριστήν, καὶ ἐκεῖ τι εὕγη αὐτὸ τοῦ ἐγγίζει. Λοιπὸν πολυπλασιάζομεν τοῦ πρώτου τὰ 45 μὲ τὸ διάφορον, ἤγουν μὲ τὰ 78 καὶ γίνονται 3510 καὶ αὐτὰ τὰ μερίζομεν μὲ τὸν μεριστήν, καὶ εὐγαίνουν 23 $\frac{83}{149}$ καὶ τόσον διάφορον τοῦ ἐγγίζει. Πάλιν πολυπλασιάζομεν τοῦ δευτέρου τὰ 56 μὲ τὰ 78 ἤγουν μὲ τὸ διάφορον καὶ γίνονται 4368 καὶ αὐτὰ τὰ μερίζομεν μὲ τὸν μεριστὴν ἤγουν μὲ 149 καὶ εὐγαίνει 29 $\frac{47}{149}$ καὶ τόσον διάφορον τὸν ἐγγίζει καὶ αὐτοῦ. Ὁμοίως πολυπλασιάζομεν καὶ τοῦ τρίτου τὰ 48 μὲ τὰ 78 καὶ γίνονται 3744 καὶ αὐτὰ τὰ μερίζομεν μὲ τὸν μεριστήν, ἤγουν μὲ 149 καὶ εὐγαίνει 25 $\frac{19}{149}$ καὶ τόσον διάφορον ἐγγίζει καὶ αὐτουνοῦ ὡσὰν βλέπης καὶ εὕγηκαν εἰς τὰ ψηφία. καὶ οὕτως κάμνε πάντα καὶ ποτὲ νὰ μὴν σφάλλεις. Εἰδὲ καὶ θέλεις νὰ κάμης τὴν δοκιμήν, συμμάζευσε τὸ διάφορον τοῦ καθ' ἑνός, καὶ ἂν εὑρήσῃς αὐτὸ ὅσον εἶναι ὅλον τὸ διάφορον εἶναι σωστή, εἰδὲ ξανὰ κάμε την. Τὸ λοιπὸν συμμαζώνομεν τὰ τζακίσματα οὕτως καὶ λέγομεν 83 τοῦ πρώτου. καὶ 47 τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου 19 γίνονται 149 ποῦ εἶναι ἕνα ἀκέραιον, καὶ λέγομεν νὰ τὰ τζακίσματα καὶ κρατοῦμεν ἕνα ἀκέραιον. Ἔσοντας καὶ 149 ἤτοι ὁ μεριστής, τὸ λοιπὸν ἕνα ποῦ κρατοῦμεν καὶ 23 τοῦ πρώτου γίνονται 24 καὶ 29 τοῦ δευτέρου γίνονται 53 καὶ 25 τοῦ τρίτου γίνονται 78 καὶ ἰδὲ ποῦ εὕγηκαν 78 καὶ εἶναι σωστὰ ὅσον εἶναι τὸ διάφορον.

---

[104] Βλ. πρ. παρ. 51, φφ. 38α-38δ.



Ως παραλλαγές αυτών των περιπτώσεων παρουσιάζονται παραδείγματα εργολαβιών με τη σύμπραξη εργαζομένων, π.χ.

> "*Άνθρωποι πέντε έκαμαν συντροφίαν ήγουν δουλευτάδες. και αυτοί επηγαν καί έκαναν σιασμόν μέ έναν άνθρωπο νά δουλεύσουν έναν μυναν* (sic) *εις τό αμπέλιν του καί νά τους δώση άσπρα 600 καί ο μέν προτος* (sic) *εργάτης εδούλευσεν ημέρας 10 έπειτα εμίσεψεν. ο δεύτερος εδούλυσεν ημέρας 15 καί ασθένησε καί πλέον δέν εδούλευσεν. ο τρίτος εδούλευσεν ημέρας 20 έπειτα δέν εδούλευσε πλέον. καί ο τέταρτος εδούλευσεν ημέρας 25 καί ο πέμπτος εδούλευσε καί ταις 30 σωσταίς, θέλω νά μάθω πόσα εγγίζει του καθ' ένος νά πάρη διά ταις ημέραις που εδούλευσεν καί νά μήν ευρεθη γελασμένος καί ο αυθέντης του αμπελίου.*"[105]

Επίσης στο ίδιο πνεύμα διατυπώνονται και λύνονται προβλήματα δανεισμού με κέρδος ή ζημιά[106], όπως και προβλήματα σχετικά με μοιρασιές[107] ή με διαθήκες[108].

Είναι αλήθεια ότι τα προβλήματα από την εμπορική ζωή δέσποζαν στα εγχειρίδια Πρακτικής Αριθμητικής, την περίοδο του ύστερου Μεσαίωνα και της Αναγέννησης. Η *Λογαριαστική* ήταν πλήρως ενταγμένη σ' αυτή τη νοοτροπία. Αυτό ήδη φαίνεται στα χαρακτηριστικά των προηγούμενων παραδειγμάτων. Η σύμπτωση όμως αυτή δεν περιορίζεται μόνο στις πρώτες περιπτώσεις που αναφέρθηκαν. Υπάρχει μια μεγάλη αντιστοιχία μεταξύ της *Λογαριαστικής* και των σχετικών εγχειριδίων της εποχής στις ομοειδείς ομάδες προβλημάτων, όπως π.χ. αυτά των προϊόντων και των τιμών[109], των ποσοστών[110], των

[105] Στο ίδιο, φ. 40δ.
[106] Στο ίδιο, φ. 41δ.
[107] Στο ίδιο, φφ. 44α κ. ε.
[108] Στο ίδιο, φφ. 65α κ. ε.
[109] Στο ίδιο, φφ. 52δ κ. ε.
[110] Στο ίδιο, φφ. 46δ κ. ε.

ανταλλαγών[111] και των μεταλλικών κραμάτων για τα νομίσματα[112]. Ενδεικτικά, δύο τέτοια προβλήματα είναι τα εξής:

> "*Ένας άνθρωπος ειχε μίαν σκάλαν της θάλασσας και έπαιρνεν άσπρα 5 τά κάθε 100. ηλθεν ένα καράβιν καί ειχεν πραγματίαν πολλήν όσον ετιμήθην άσπρα 277850 θέλω νά μάθω τί έχει νά πάρει διά κουμέρκιν.*"[113]
>
> "*δύο έκαμαν αλλαξία. καί ο πρώτος ειχεν πιπέρι, καί ο δεύτερος μίαν πέτρα, ήγουν διαμάντε. καί τό πιπέριν του πρώτου άξιζαν αι κάθε 100 λίτραι φλουρ. 25 καί του δευτέρου η πέτρα ήγουν διαμάντε δέν ηξεύρω πόσον έξιζεν ουδέ ποσόν τό έβαλε εις τήν πραγματίαν πλήν τουτο λέγει ότι επηρεν διά τό διαμάντε λίτρες πιπέρι 1500 και φλουρία 300 διά τό ένα τρίτον που του έταξεν εις μετρητόν. θέλω νά μάθω πόσα έξιζεν τό διαμάντε καί πόσα τά έβαλε είς τήν πραγματίαν. ομοίως πόσον έβαλεν καί ο άλλος ταις100 λίτρες τό πιπέριν, θέλομεν γουν νά ευρουμεν καί αυτήν τήν αλλαξίαν.* "[114]

Μεταξύ αυτών των προβλημάτων υπάρχουν και μερικά που είναι γεωμετρικής φύσης, όπως π.χ. "*περί του πως νά εύρης ύψος πύργου ή άλλου τινός πράγματος*"[115].

Όπως έχει επισημανθεί, η συμβατότητα της *Λογαριαστικής* με τα εγχειρίδια Πρακτικής ή Εμπορικής Αριθμητικής της Αναγέννησης ήταν σε υψηλό βαθμό. Ωστόσο είχε και κάποιες ιδιαιτερότητες ή αποκλίσεις. Και αυτό συνέβαινε , λίγο πολύ, με αρκετά εγχειρίδια του συγκεκριμένου είδους, την εποχή εκείνη. Παρουσίαζαν δηλαδή κάποιες ιδιομορφίες, κάποιες προωθήσεις ή κάποιες περιστολές. Με άλλα λόγια υπήρχαν εγχειρίδια με καινοτομίες σε κάποια θέματα, όπως π.χ. τα δεκαδικά κλάσματα της *Λογαριαστικής*, υπήρχαν όμως και περιπτώσεις περιορισμών στο εύρος της θεματολογίας τους. Είναι λοιπόν ενδιαφέρον να φανούν και οι περιστολές της *Λογαριαστικής* σε σχέση με τα καθιερωμένα θέματα του εν λόγω τομέα των Μαθηματικών και έτσι να αποκαλυφθούν οι ιδιομορφίες της.

Σύμφωνα με τις κωδικοποιήσεις, που είναι διαθέσιμες στην ιστοριογραφία των Μαθηματικών[116], για τις ομάδες προβλημάτων των εγχειριδίων Πρακτικής ή Εμπορικής Αριθμητικής του ύστερου Μεσαίωνα και της Αναγέννησης, διαπιστώνεται ότι η *Λογαριαστική* <u>δεν</u> περιλαμβάνει:

1) προβλήματα τόκων,
2) προβλήματα αντιστοιχιών μεταξύ νομισμάτων,
3) προβλήματα προόδων και
4) προβλήματα που λύνονταν με τη βοήθεια αλγεβρικών μεθόδων.

---

[111] Στο ίδιο, φφ. 48δ κ. ε.
[112] Στο ίδιο, φφ. 61α κ. ε.
[113] Στο ίδιο, φ. 46δ. Κουμέρκιν σημαίνει τελωνιακός δασμός και σκάλα σημαίνει αποβάθρα.
[114] Στο ίδιο, φ. 49δ.
[115] Στο ίδιο, φ. 64δ.
[116] Βλ. Egmond, W. Van, πρ. παρ. 66, σελ. 164 κ.ε., Jackson, L.L., πρ. παρ. 53, σελ. 135 κ.ε. και Hunger, H./Vogel, K., πρ. παρ. 88, σελ. 87 κ.ε.

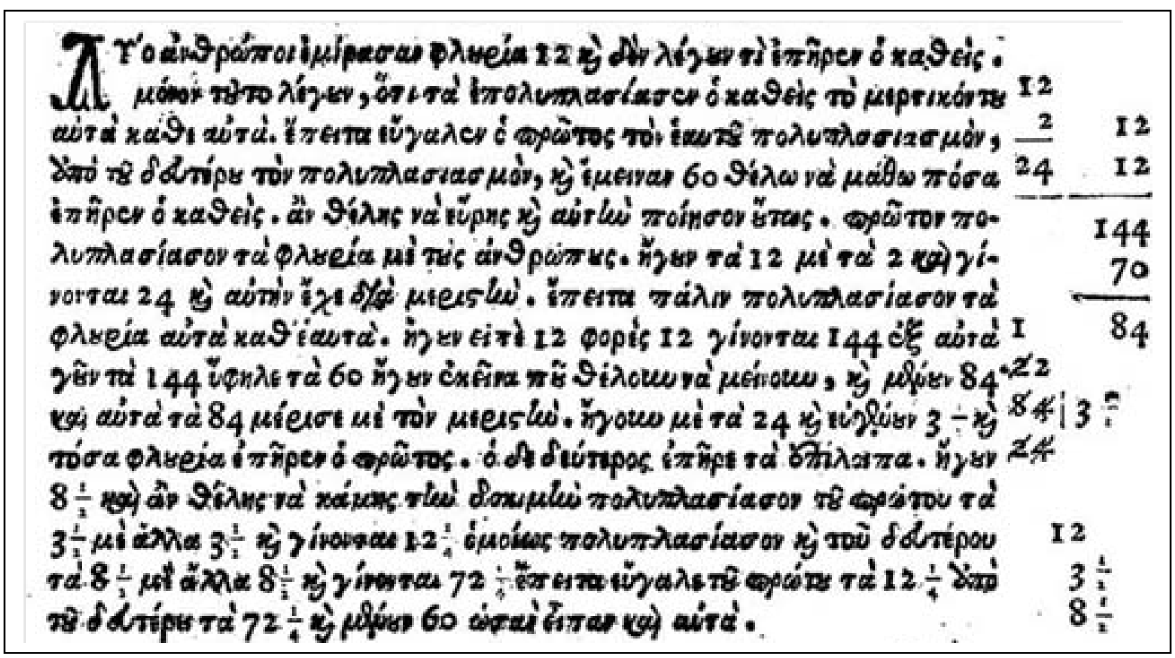
Με αφορμή αυτές τις παρατηρήσεις θα πρέπει να σημειωθεί ότι η *Λογαριαστική* έχει πιο περιορισμένη ποικιλία προβλημάτων σε σχέση με τη *Συλλογή των 100 προβλημάτων.* Αν και τα δύο αυτά κείμενα είναι του ίδιου μαθηματικού είδους, τα προβλήματα τους είναι διαφορετικά. Το πιθανότερο είναι να προέρχονται από διαφορετικούς δασκάλους ή διαφορετικά σχολεία αμπάκι, που ήταν μια πολύ δημοφιλής διδασκαλία Εμπορικής Αριθμητικής στην Ιταλία, εκείνη την εποχή.

στ. "Πνευματώδη" προβλήματα

Αν και κάποιες κατηγορίες προβλημάτων των αμπάκι απουσιάζουν από τη *Λογαριαστική*, ωστόσο ήταν συνεπής με τα "πνευματώδη" ή διασκεδαστικά προβλήματα. Συνολικά 11 τέτοια προβλήματα περιλαμβάνονται στις τελευταίες σελίδες του πρώτου μέρους της *Λογαριαστικής.* Αυτά κατατάσσονται στις εξής περιπτώσεις[117]:

1) "*Περί ευρέσεως αριθμου ο οποιος εμοιράσθη εις δύο μέρη, εις πόσα εμοιράσθη*",
2) "*Περί πως νά εύρης τινάν αριθμόν από τήν διαφοράν*",
3) "*Περί του πως νά εύρης πόσα έβαλε τίς άνθρωπος εις τόν νου του*",
4) "*Περί του πώς νά εύρης τριων ανθρώπων πόσα σταμένα έχει, ο καθείς εις τό πουγγί του*",
5) "*Περί του πώς νά εύρης ένα δακτυλίδιον εις μίαν συντροφίαν ποιος τό επηρε, καί εις ποιον χέρι, καί δάκτυλον, καί αρμόν το βαστά* ",
6) "*Περί του πώς νά εύρεης ανθρώπους που ησαν τρεις γενεαις πόσοι ησαν από κάθε γενεάν εκ της διαφοράς*".

Ενδεικτικά παρουσιάζεται το πρόβλημα της πρώτης περίπτωσης, που είναι το εξής[118]:

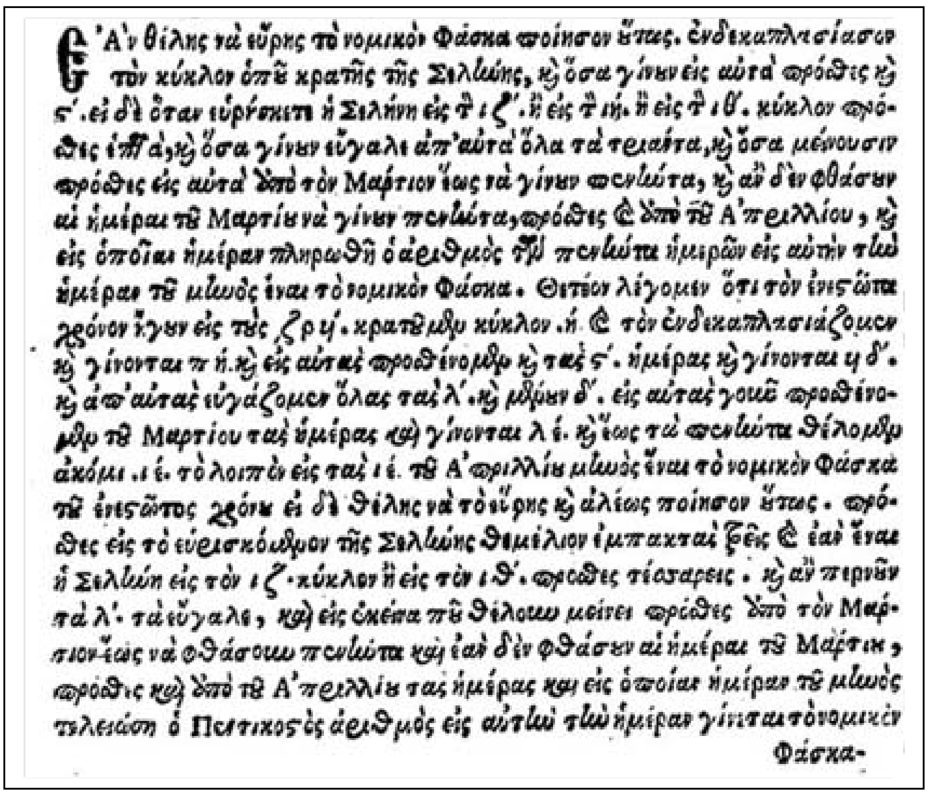

Δύο ἄνθρωποι ἐμίρασαν φλωρία 12 καὶ δὲν λέγουν τί ἐπῆρεν ὁ καθείς. μόνον τοῦτο λέγουν, ὅτι τὰ ἐπολυπλασίασεν ὁ καθεὶς τὸ μερτικόν του αὐτὰ καθ' αὐτά. ἔπειτα ἔβγαλεν ὁ πρῶτος τὸν ἑαυτοῦ πολυπλασιασμόν, ἀπὸ τοῦ δευτέρου τὸν πολυπλασιασμόν, καὶ ἔμειναν 60 θέλω νὰ μάθω πόσα ἐπῆρεν ὁ καθείς. ἂν θέλῃς νὰ εὕρῃς καὶ αὐτήν ποίησον οὕτως. πρῶτον πολυπλασίασον τὰ φλωρία μὲ τοὺς ἀνθρώπους. ἤγουν τὰ 12 μὲ τὰ 2 καὶ γίνονται 24 καὶ αὐτὴν ἔχε διὰ μεριστήν. ἔπειτα πάλιν πολυπλασίασον τὰ φλωρία αὐτὰ καθ' ἑαυτά. ἤγουν εἰπὲ 12 φορὲς 12 γίνονται 144 ἐξ αὐτά γοῦν τὰ 144 ὕφειλε τὰ 60 ἤγουν ἐκεῖνα ποῦ θέλουσιν νὰ μένουσιν, καὶ μένουν 84 καὶ αὐτὰ τὰ 84 μέρισε μὲ τὸν μεριστήν. ἤγουν μὲ τὰ 24 καὶ εὑρίσκεις $3\frac{1}{2}$ καὶ τόσα φλωρία ἐπῆρεν ὁ πρῶτος. ὁ δὲ δεύτερος ἐπῆρε τὰ ἐπίλοιπα. ἤγουν $8\frac{1}{2}$ καὶ ἂν θέλῃς νὰ κάμῃς τὴν δοκιμήν πολυπλασίασον τοῦ πρώτου τὰ $3\frac{1}{2}$ μὲ ἄλλα $3\frac{1}{2}$ καὶ γίνονται $12\frac{1}{4}$ ὁμοίως πολυπλασίασον καὶ τοῦ δευτέρου τὰ $8\frac{1}{2}$ μὲ ἄλλα $8\frac{1}{2}$ καὶ γίνονται $72\frac{1}{4}$ ἔπειτα ἔβγαλε τοῦ πρώτου τὰ $12\frac{1}{4}$ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τὰ $72\frac{1}{4}$ καὶ μένουν 60 ὡσὰν εἴπαμεν καὶ αὐτά.

[117] Βλ. πρ. παρ. 51, φφ. 67δ-71δ.
[118] Στο ίδιο, φ. 67δ.

ζ. Για τον προσδιορισμό του Πάσχα

Σε μερικά εγχειρίδια Πρακτικής ή Εμπορικής Αριθμητικής υπήρχε και μια ενότητα για το ημερολόγιο[119] και ειδικότερα για τον προσδιορισμό του Πάσχα και των κινητών εορτών. Οπότε η ύπαρξη ενός τέτοιου θέματος στη *Λογαριαστική* δεν ήταν κάτι το αφύσικο ή περίεργο. Ωστόσο το συγκεκριμένο κείμενο είναι ασύμβατο με το υπόλοιπο περιεχόμενο του βιβλίου. Και αυτό γιατί χρησιμοποιείται μια λόγια γλώσσα, σ' αντίθεση με τη λαϊκή του πρώτου μέρους και γιατί οι αριθμητικές παραστάσεις είναι στο αλφαβητικό σύστημα, σ' αντίθεση με τα ινδο-αραβικά ψηφία του πρώτου μέρους.

Το ημερολόγιο που αναφέρεται στην *Λογαριαστική* ήταν το Ιουλιανό και ήταν ηλιακό ημερολόγιο, δηλαδή στηρίζονταν στην περιφορά του Ήλιου γύρο από τη Γη. Για τον προσδιορισμό όμως του Πάσχα ήταν αναγκαίος ένας συνδυασμός της διάρκειας του ηλιακού κύκλου μ' αυτήν του σεληνιακού. Συγκεκριμένα το Πάσχα προσδιορίζονταν και προσδιορίζεται στην Ορθόδοξη Εκκλησία ως η πρώτη Κυριακή μετά την πρώτη Πανσέληνο της εαρινής ισημερίας. Στη *Λογαριαστική* "*ο ήλιος έχει κύκλους κη΄….η δε Σελήνη έχει κύκλους ιθ΄*" και το έτος [illegible]φη΄ π.Χ. ήταν η αφετηρία των υπολογισμών[120]. Με αυτές τις προϋποθέσεις προτείνονταν η εξής[121] διαδικασία για τον προσδιορισμό του Πάσχα:


Ἂν θέλης νὰ εὕρης τὸ νομικὸν Φάσκα ποίησον οὕτως. ἐνδεκαπλασίασον τὸν κύκλον ὁποῦ κρατεῖς τῆς Σελήνης, καὶ ὅσα γίνουν εἰς αὐτὰ πρόσθες καὶ ς΄. εἰ δὲ ὅταν εὑρίσκεται ἡ Σελήνη εἰς τὸ ιζ΄. ἢ εἰς τὸ ιη. ἢ εἰς τὸ ιθ΄. κύκλον πρόσθες ἑπτά, καὶ ὅσα γίνουν εὔγαλε ἀπ' αὐτὰ ὅλα τὰ τριάντα, καὶ ὅσα μένουσιν πρόσθες εἰς αὐτὰ ἀπὸ τὸν Μάρτιον ἕως νὰ γίνουν πενήντα, καὶ ἂν δὲν φθάσουν αἱ ἡμέραι τοῦ Μαρτίου νὰ γίνουν πενήντα, πρόσθες καὶ ἀπὸ τοῦ Ἀπριλλίου, καὶ εἰς ὁποίαν ἡμέραν πληρωθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πενήντα ἡμερῶν εἰς αὐτὴν τὴν ἡμέραν τοῦ μηνὸς εἶναι τὸ νομικὸν Φάσκα. Θετέον λέγομεν ὅτι τὸν ἐνεστῶτα χρόνον ἔχομεν εἰς τοὺς ζρη΄. κρατοῦμεν κύκλον ιη΄. καὶ τὸν ἐνδεκαπλασιάζομεν καὶ γίνονται πη΄. καὶ εἰς αὐτὰς προσθένομεν καὶ τὰς ς΄. ἡμέρας καὶ γίνονται ϙδ΄. καὶ ἀπ' αὐτὰς εὐγάζομεν ὅλας τὰς λ΄. καὶ μένουν δ΄. εἰς αὐτὰς γοῦν προσθένομεν τοῦ Μαρτίου τὰς ἡμέρας καὶ γίνονται λε΄. καὶ ἕως τὰ πενήντα θέλομεν ἀκόμη ιε΄. τὸ λοιπὸν εἰς τὰς ιε΄. τοῦ Ἀπριλλίου μηνὸς εἶναι τὸ νομικὸν Φάσκα τοῦ ἐνεστῶτος χρόνου εἰ δὲ θέλης νὰ τὸ εὕρης καὶ ἀλλέως ποίησον οὕτως. πρόσθες εἰς τὸ εὑρισκόμενον τῆς Σελήνης θεμέλιον ἴμπακταὶ ἕξ καὶ ἐὰν εἶναι ἡ Σελήνη εἰς τὸν ιζ΄. κύκλον ἢ εἰς τὸν ιθ΄. πρόσθες τέσσαρεις. καὶ ἂν περνοῦν τὰ λ΄. τὰ εὔγαλε, καὶ εἰς ἐκεῖνα ποῦ θέλουν μείνει πρόσθες ἀπὸ τὸν Μάρτιον ἕως νὰ φθάσουν πενήντα καὶ ἐὰν δὲν φθάσουν αἱ ἡμέραι τοῦ Μαρτίου, πρόσθες καὶ ἀπὸ τοῦ Ἀπριλλίου τὰς ἡμέρας καὶ εἰς ὁποίαν ἡμέραν τοῦ μηνὸς τελειώσῃ ὁ πεντηκοστὸς ἀριθμὸς εἰς αὐτὴν τὴν ἡμέραν γίνεται τὸ νομικὸν Φάσκα.

[119] Βλ. Egmond, W. Van, πρ. παρ. 66, σελ. 223-224.
[120] Βλ. πρ. παρ. 51, φ. 74α.
[121] Στο ίδιο, φ. 74δ.

Με τον περιγραφικό αυτό τρόπο παρουσιάζεται ο προσδιορισμός του Πάσχα. Οι πράξεις που χρησιμοποιούνται είναι οι απλές πράξεις της Αριθμητικής, οι οποίες εκτελούνται άμεσα, χωρίς ενδιάμεσες διαδικασίες. Γίνεται φανερό λοιπόν ότι για το συγκεκριμένο θέμα αξιοποιήθηκαν πολύ στοιχειώδεις υπολογισμοί και κατά συνέπεια δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αξιόλογη εφαρμογή των υπολογιστικών τεχνικών του πρώτου μέρους του βιβλίου. Το θέμα, σε μεγάλο βαθμό, είναι κανονιστικού χαρακτήρα, και έτσι προβάλλεται στη *Λογαριαστική*. Η μεγάλη του όμως δυσκολία βρίσκεται στην αδυναμία να ορισθούν οι διάφοροι σεληνιακοί περίοδοι ως ακέραια πολλαπλάσια ηλιακών ημερονυκτίων.

***

Από την επισκόπηση του μαθηματικού περιεχόμενου της *Λογαριαστικής* γίνεται φανερό ότι ήταν στο πνεύμα των εγχειριδίων Πρακτικής ή Εμπορικής Αριθμητικής που κυκλοφορούσαν στη Δυτική Ευρώπη (και ιδιαίτερα στην Ιταλία), στο πρώτο μισό του 16^ου^ αιώνα. Αυτό σημαίνει ότι την εποχή της πρωτο-δημοσίευσής της ήταν επίκαιρη, δεν ήταν δηλαδή παρωχημένο το περιεχόμενό της. Είχε μάλιστα και μια προηγμένη, για την περίοδο εκείνη, διάσταση, αυτή των δεκαδικών κλασμάτων. Ωστόσο από τα τέλη του 16^ου^ αιώνα το είδος αυτό της Αριθμητικής, με τον έντονα "πρακτικίστικο" χαρακτήρα, ξεπεράστηκε. Κατά συνέπεια οι μεταγενέστερες επανεκδόσεις της *Λογαριαστικής* ήταν αναχρονιστικές. Οπότε η διατήρηση της μέχρι το 1821, τουλάχιστον, υποδήλωνε μια ιστορική καθυστέρηση και μια αρτηριοσκληρωτική εμμονή των κυρίαρχων κύκλων της προ-επαναστατικής ελληνικής παιδείας.