

# ΜΙΑ ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η εξερεύνηση των Μαθηματικών στα μονοπάτια  
της Ρωστικής Επιστήμης

ΜΑΡΤΖΙΚΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

Επιβλέπων καθηγητής: Ν. ΚΑΣΤΑΝΗΣ

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### 1. Εισαγωγή

---

2. Τι είναι γνωστική προσέγγιση στα Μαθηματικά; **σελ. 10**

α) Η Γνωστική Επιστήμη σήμερα **σελ. 11**

β) Τα Μαθηματικά από τη σκοπιά της Γνωστικής Επιστήμης **σελ. 19**

i. Εννοιολογική οργάνωση της σκέψης **σελ. 20**

ii. Εννοιολογικές αλλαγές **σελ. 24**

iii. Αναπαράσταση των γνώσεων **σελ. 26**

iv. Είδη γνώσεων **σελ. 32**

v. Μεταγνώση – Αναστοχασμός **σελ. 35**

vi. Επιστημολογικές Πεποιθήσεις **σελ. 40**

---

### 3. Επίλογος **σελ. 46**

---

### 4. Βιβλιογραφία **σελ. 48**

---

## Εισαγωγή<sup>1</sup>

Στην ελληνική βιβλιογραφία της Διδακτικής των Μαθηματικών και πολύ περισσότερο, στην αντίστοιχη διεθνή βιβλιογραφία αναπτύσσεται ένας ευρύς προβληματισμός και μια εμβριθής διεισδυτικότητα στα ζητήματα της φύσης της μαθηματικής γνώσης και σκέψης από τη μία και της ανατομίας της σχολικής μάθησης σε συνδυασμό με τους τρόπους μεθόδευσης της διδασκαλίας των Μαθηματικών, από την άλλη. Οι σχετικές αυτές ιδέες και αναλύσεις ποικίλουν ανά επιστήμονα ενώ παράλληλα παρουσιάζουν μια γενική τάση εμπλουτισμού και ανανέωσης. Είναι έτσι συχνό το φαινόμενο μαθηματικοί και δάσκαλοι, με ανησυχίες και ενδιαφέροντα, να βρίσκονται έκπληκτοι μπροστά σε νέες προσεγγίσεις των διδακτικών καταστάσεων της μαθηματικής παιδείας, που τους προκαλούν σύγχυση, αμηχανία και πολλές φορές δυσανασχέτηση, λόγω των ασαφών και ακατανόητων στοιχείων της θεματολογίας τους. Αποτέλεσμα αυτών είναι σημαντικά συμπεράσματα πάνω σε αυτό τον τομέα να καθίστανται δυσνόητα, απαιτώντας από τον αναγνώστη αρκετές γνώσεις επί του θέματος και εν συνεχεία να μένουν απρόσιτα στον κάθε μη ειδικό. Το γεγονός αυτό, πολλές φορές, δεν είναι ανεξάρτητο και από την έλλειψη εισαγωγικών διευκρινίσεων των νέων επιστημολογικών και ψυχολογικών θεωρήσεων της μαθηματικής παιδείας, στις εξειδικευμένες μελέτες και αναλύσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών. Μια τέτοια περίπτωση είναι και η Γνωστική Προσέγγιση στη Διδακτική των Μαθηματικών.

Η σχέση της Γνωστικής Επιστήμης με τα Μαθηματικά γίνεται αισθητή στον τομέα της Διδακτικής και τα τελευταία χρόνια φαίνεται να έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον πολλών επιστημόνων, με αποτέλεσμα να διευρύνεται η έρευνα πάνω στη Γνωστική Επιστήμη και οι εργασίες που σχετίζονται με αυτή να διαδέχονται η μια την άλλη. Είναι έτσι πολύ πιθανό, ένας δάσκαλος των Μαθηματικών, που ενδιαφέρεται για τον επιστημονικό χώρο στον οποίο δραστηριοποιείται και δεν είναι τελείως αδιάφορος για τα βιβλία και την αρθρογραφία της Διδακτικής των

---

<sup>1</sup> Η παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια Ειδικού Θέματος στη Διδακτική των Μαθηματικών, στο Τμήμα Μαθηματικών του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, υπό την επίβλεψη του κ. Νίκου Καστάνη. Παρουσιάστηκε 17/5/07.

Μαθηματικών, να βρεθεί μπροστά σε κείμενα τα οποία έχουν ως αντικείμενό τους τη γνωστική προσέγγιση των Μαθηματικών και να μη διασαφηνίζεται ο χαρακτήρας και η φύση της. Περιπτώσεις σαν αυτές στάθηκαν αφορμή στην προκειμένη εργασία και σίγουρα αξίζει να αναφερθούν κάποιες για παράδειγμα. Έτσι, έγινε μια επιλογή τόσο από την ελληνική βιβλιογραφία, μιας και δε θα ταίριαζε να ειπωθεί κάτι πέραν της ελληνικής πραγματικότητας, όσο και από τη διεθνή, για μια πιο πλήρη εικόνα.

Στο βιβλίο *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών III*, που είναι συλλογή άρθρων για διάφορα ζητήματα σχετικά με τις Παιδαγωγικές και Ψυχολογικές πλευρές της μαθηματικής παιδείας, περιλαμβάνεται και το εξής άρθρο:

“Γνωστική Ψυχολογία και Διδακτική των Μαθηματικών:  
Η Περίπτωση του Εμπειρικού–Βιωματικού Δομισμού”<sup>2</sup>

Το θέμα του είναι η συσχέτιση ενός μοντέλου γνωστικής θεωρίας, του “Εμπειρικού Βιωματικού Δομισμού”, με τις γνωστικές ικανότητες και δραστηριότητες των μαθητών. Πρόκειται για κάποιες επισημάνσεις των μαθηματικών ικανοτήτων, στο πλαίσιο ενός προτύπου της Γνωστικής Ψυχολογίας κι όχι μια εισαγωγή στο συγκεκριμένο θεωρητικό πεδίο της Ψυχολογίας. Εννοείται λοιπόν, ότι ο αναγνώστης είναι ήδη εξοικειωμένος με τα χαρακτηριστικά και την ιδιαιτερότητα της **Γνωστικής Ψυχολογίας** κι έτσι αυτά δε διευκρινίζονται. Ωστόσο, γίνεται αναφορά στην ύπαρξη αυτού του είδους Ψυχολογίας και μάλιστα εμφανίζεται ως **συμβατή και πρόσφορη στη Διδακτική των Μαθηματικών**. Παράλληλα με την ανάπτυξη του περιεχομένου του, το άρθρο αυτό κάνει και μια νύξη, χωρίς επεξηγήσεις, στις γνωστικές επιστήμες, θέλοντας να τονίσει τη στενή σχέση της Γνωστικής Ψυχολογίας με τη Διδακτική των Μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα, σημειώνει ότι η Διδακτική των Μαθηματικών τοποθετείται στο πλαίσιο των γνωστικών επιστημών, δηλαδή “ως επιστήμη των ειδικών συνθηκών της διάδοσης των μαθηματικών γνώσεων που είναι χρήσιμες για τη λειτουργία των ανθρώπινων θεσμών”.<sup>3</sup>

Από μια άλλη οπτική γωνία θίγεται το ζήτημα της γνωστικής προσέγγισης στα Μαθηματικά στην εξής εργασία:

“Γνωστικά και Επιστημολογικά Χαρακτηριστικά  
της Διαδικασίας Γενίκευσης στα Σχολικά Μαθηματικά”<sup>4</sup>

<sup>2</sup> Βλ. Οικονόμου: σελ. 259-273.

<sup>3</sup> Στο ίδιο, σελ. 260.

<sup>4</sup> Βλ. Καλδρυμίδου: σελ. 245-253.

Όπως φαίνεται στην περίπτωση αυτή, η γνωστική συνιστώσα της μαθηματικής λειτουργίας των μαθητών αντιμετωπίζεται παράλληλα με την επιστημολογική θεώρηση των σχολικών Μαθηματικών, αφήνοντας να εννοηθεί μια υποκείμενη όσμωση των δύο αυτών προσδιοριστικών όψεων της σχολικής μαθηματικής παιδείας. Ωστόσο, στην ανάλυση του συγκεκριμένου θέματος αυτή η γνωστική συνιστώσα δε διευκρινίζεται. Απλά υποδηλώνεται η ψυχολογική της υπόσταση με την εξής επισήμανση: **“Η γνωστική ψυχολογία θεωρεί τη γενίκευση ως αυθόρμητη εγγενή νοητική λειτουργία, ενέργεια ή διεργασία [...] απαραίτητη για τη γνωστική ανάπτυξη του ατόμου και την κατασκευή εννοιών”**.<sup>5</sup> Και εδώ θεωρούνται, λίγο έως πολύ, δεδομένες οι εισαγωγικές γνώσεις για τη γνωστική σκοπιά των Μαθηματικών. Συγκεκριμένα, εξετάζεται μια ειδική περίπτωση που προϋποθέτει αυτές τις γνώσεις ως υπόβαθρο, κάνοντας το θέμα αρκετά εξειδικευμένο για κάθε αρχάριο, δυσχεραίνοντας ακόμη περισσότερο την κατανόησή του.

Μια τρίτη αναφορά στη γνωστική θεώρηση των Μαθηματικών σημειώνεται στο παρακάτω άρθρο:

“Γνωστικές ικανότητες και μαθηματικές επιδόσεις σε μαθητές Πρώτης και Δευτέρας Γυμνασίου”<sup>6</sup>

Πρόκειται για μια ερευνητική εργασία με στόχο τον “εντοπισμό των γενικών μηχανισμών που είναι υπεύθυνοι για τις αλλαγές που παρατηρούνται κατά τη γνωστική ανάπτυξη” και τη “διερεύνηση των ειδικών [κατά θεματικούς τομείς] γνωστικών διεργασιών που είναι υπεύθυνες για τις αλλαγές στην κατανόηση ειδικών επιστημονικών εννοιών”.<sup>7</sup> Διαφαίνεται ότι η γνωστική αντιμετώπιση των Μαθηματικών έχει να κάνει με τους ψυχολογικούς μηχανισμούς ανάπτυξης της σκέψης και με τις νοητικές επεξεργασίες για την κατανόηση των επιστημονικών γνώσεων – στην προκειμένη περίπτωση, των μαθηματικών γνώσεων. Εκ πρώτης όψεως, η εργασία αυτή εστιάζει στην εφαρμογή της Γνωστικής Επιστήμης στις αίθουσες διδασκαλίας, αλλά αν και γίνεται αναφορά στις «γνωστικές ικανότητες», τη «γνωστική ανάπτυξη» και τα «γνωστικά συστήματα», δεν καθορίζονται οι σημασίες τους, παρά μόνο γίνεται μια αμυδρή συσχέτισή τους με νοητικές λειτουργίες ή καταστάσεις. Κάτι που σημαίνει ότι οι όροι αυτοί αναφέρονται ως δεδομένοι και γνωστοί εκ των προτέρων και παρουσιάζονται σαν εξειδικευμένη ορολογία, που κρίνεται προαπαιτούμενη για την κατανόηση της συγκεκριμένης έρευνας.

<sup>5</sup> Στο ίδιο, σελ. 245.

<sup>6</sup> Βλ. Ευκλείδη, κ.α..

<sup>7</sup> Στο ίδιο, σελ. 11.

Οι επισημάνσεις αυτές δημιουργούν μια ασάφεια αλλά και μια αίσθηση νέου πνεύματος στην εξέταση και την ανάλυση των ζητημάτων της Διδακτικής των Μαθηματικών. Βέβαια, όλα όσα αναφέρθηκαν στηρίζονται σε κάποιες ερευνητικές εργασίες που, ως επί το πλείστον, είναι από τη φύση τους εξειδικευμένες. Πέραν όμως των πιθανών ελλείψεων σε εισαγωγικές γνώσεις, η όποια αναφορά τους στις γνωστικές επιστήμες και στη σχέση τους με τα Μαθηματικά καθιστά ολοφάνερη τόσο τη συχνή ενασχόληση των ερευνητών με αυτό το θέμα, όσο και την απήχηση που έχουν τέτοιες μελέτες ακόμη και εδώ, στον ελλαδικό χώρο. Αυτό, σε κάποιο ανοικτό μυαλό, μπορεί να προκαλέσει ένα αρχικό ενδιαφέρον και ένα κίνητρο για την περαιτέρω διερεύνηση του θέματος. Έτσι, το πρώτο βήμα θα είναι η αναζήτηση σχετικών διευκρινήσεων σε εισαγωγικά κείμενα της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Ένα εισαγωγικό βιβλίο σε θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών είναι το εξής:

*“Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών”<sup>8</sup>*

Ίσως από τα πληρέστερα στην ελληνική βιβλιογραφία, το βιβλίο αυτό καλύπτει ένα ευρύ φάσμα πτυχών της μαθηματικής παιδείας, ασχολείται με θέματα ιστορίας και φιλοσοφίας των μαθηματικών και καταπιάνεται με θεωρίες μάθησης αλλά και την οργάνωση της διδασκαλίας στη τάξη. Παράλληλα γίνεται μια προσπάθεια σύνδεσης των όσων πορισμάτων απορρέουν από αυτό με τη διδακτική πραγματικότητα, παραθέτοντας πλήθος ασκήσεων και παραδειγμάτων. Πέραν από την επεξεργασία πληροφοριών και τις ιεραρχίες της μάθησης στα Μαθηματικά, γίνεται αναφορά τόσο στη Γνωστική Ψυχολογία, όσο και στις γνωστικές δεξιότητες. Το θέμα όμως προσεγγίζεται αρκετά επιφανειακά, εξηγείται επιγραμματικά ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί ο εγκέφαλος και πραγματοποιείται η μάθηση ενώ δίνονται συμβουλές για το πώς πρέπει να διδάσκονται τα Μαθηματικά – θεωρώντας τη γνώση διαδικασία και όχι προϊόν. Επίσης θίγεται η ανάγκη διαχωρισμού και ταξινόμησης των γνωστικών στηριγμάτων, προκειμένου να φτάσουμε στον στόχο της μάθησης.<sup>9</sup> Το βιβλίο προϊδεάζει τον αναγνώστη για τη φύση και το αντικείμενο της Γνωστικής Επιστήμης, αλλά δε δίνει πιο εμπειριστατωμένες γνώσεις επί του θέματος.

Μια μαρτυρία της δουλειάς που γίνεται εντός συνόρων, τα τελευταία δέκα χρόνια, στην περιοχή της μαθηματικής παιδείας, περιγράφεται στο παρακάτω βιβλίο:

<sup>8</sup> Βλ. Τουμάσης.

<sup>9</sup> Στο ίδιο, σελ. 114, 150.

“Σύγχρονες Θεωρήσεις και Έρευνες στη Μαθηματική Παιδεία”<sup>10</sup>

Αν και λιγότερο εισαγωγικό στο σύνολο του, εμμένει σε μια περιγραφική δομή των θεμάτων του. Αναλύει γεγονότα και καταστάσεις από το χώρο της μαθηματικής παιδείας, στηριζόμενο σε σύγχρονες επιστημονικές θεωρήσεις, αφού αποσκοπεί περισσότερο στην ενημέρωση και την ευαισθητοποίηση κάθε ενδιαφερομένου. Ασχολείται με τις ψυχολογικές θεωρήσεις για τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών, δίνοντας σημασία στις διαδικασίες της νόησης και φωτίζοντας έτσι, έμμεσα, τη Γνωστική Ψυχολογία και τις νέες τάσεις της. Μελετώντας τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να δομούνται οι γνώσεις, εισάγει την έννοια των «γνωστικών επιπέδων». Θίγει το ζήτημα της μαθηματικής αφαίρεσης κάνοντας μια εκτεταμένη παρουσίαση στη θεωρία του ψυχολόγου Jean Piaget, ενώ στη συνέχεια κάνει μια μικρή αναφορά στη χρήση των μπιχεβιοριστικών και γνωστικών στόχων στη μαθηματική εκπαίδευση, αφήνοντας να εννοηθεί μια ενδεχόμενη σχέση μεταξύ τους.<sup>11</sup> Οι συχνές νύξεις στη γνωστική σκοπιά των Μαθηματικών δε λείπουν. Βέβαια για μια ακόμη φορά περιορίζονται στον κλάδο της Ψυχολογίας και παρ’ όλο που αναγνωρίζονται τα ενδιαφέροντα συμπεράσματα αυτού του κλάδου, η εξέταση τους κρίνεται μάλλον χρονοβόρα και αφήνεται στον αναγνώστη.

Στο ίδιο πλαίσιο αναλυτικής παρουσίασης εργασιών των τελευταίων χρόνων κινείται και το επόμενο βιβλίο:

“Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών”<sup>12</sup>

Πιο θεωρητικό από τα άλλα, παρουσιάζει, σχολιάζει και αναλύει τα εννοιολογικά χαρακτηριστικά κάθε θέματος που διαπραγματεύεται, ενώ προτείνει συγκεκριμένα σενάρια διδασκαλίας. Περιέχει μια αναλυτική αναφορά σε στοιχεία Ψυχολογίας για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, όπου παρουσιάζει τη θεωρία του Piaget και κάνει αναφορά στον όρο «γνωστική ανάπτυξη».<sup>13</sup> Το πεδίο φωτίζεται λίγο περισσότερο όταν, στην ενασχόληση με το θέμα της μάθησης και της κατανόησης των Μαθηματικών, ο τρόπος απόκτησης της γνώσης ανάγεται σε τρεις επιστημονικούς κλάδους, ένας εκ των οποίων είναι η Γνωστική Ψυχολογία που αναλύεται περαιτέρω. Διατυπώνονται κάποιες σχετικές απόψεις περί κατασκευής της γνώσης και αναλύονται οι απόψεις ορισμένων φιλοσοφικών ρευμάτων. Πλεονεκτεί στην εξάντληση κάποιων

<sup>10</sup> Βλ. Πατρώνης / Σπανός.

<sup>11</sup> Στο ίδιο, σελ. 11,118.

<sup>12</sup> Βλ. Κολέζα.

<sup>13</sup> Στο ίδιο, σελ. 27-33.

ειδικών θεμάτων πάνω στη Γνωστική Ψυχολογία, ωστόσο προσπερνά πολλές εισαγωγικές έννοιες που θα καθιστούσαν ακόμη πιο σαφή αυτή τη προσπάθεια.

Η εικόνα αλλάζει εντελώς, στο βιβλίο

*“Ο Μηχανισμός της Νόησης”*<sup>14</sup>

Αναλυτικό και παραστατικό, το βιβλίο αυτό παρουσιάζει δεδομένα που ρίχνουν φως στη λειτουργία του εγκεφάλου και δίνει μια εμπειριστατωμένη εικόνα του νοητικού συστήματος. Αν και ο τίτλος του δεν παραπέμπει σε κάτι τέτοιο, μεγάλο μέρος του βιβλίου αναφέρεται στα Μαθηματικά. Εξέχουσα θέση λαμβάνει η Γνωστική Ψυχολογία, καθώς εξετάζεται η συνεισφορά της στην εξερεύνηση του νου. Για πρώτη φορά ως τώρα εξηγείται, έστω και συνοπτικά, το αντικείμενό της, κάνοντας μια περιγραφή των διανοητικών διαδικασιών συμφωνά με τις θεωρίες της. Ο αναγνώστης κατανοεί ένα μέρος της γνωστικής θεώρησης των Μαθηματικών, μέσα από πλήθος παραδειγμάτων που εξετάζονται, όπως της έννοιας του αριθμού, των άρρητων αλλά και των μιγαδικών. Τα συμπεράσματα που συνάγονται είναι σημαντικά για κάθε επιστήμη. Η κεντρική του θέση ρίχνει το βάρος της λειτουργίας της νόησης στη σημασία της κατανόησης και όχι σε πολύπλοκους και άγνωστους μηχανισμούς, που κατά καιρούς προτείνονται. Παρουσιάζοντας, έτσι, μια άλλη υπόσταση του θέματος, που κρύβει πολλά και σίγουρα αξίζει την προσοχή όλων!

Μελετώντας κάποιος μία από τις παραπάνω προσεγγίσεις στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών κατανοεί αμέσως την ύπαρξη μιας σημαντικής σχέσης μεταξύ της Γνωστικής Επιστήμης και της Διδακτικής των Μαθηματικών, ενώ, παράλληλα, έρχεται σε επαφή με κάποιες εκφάνσεις της. Οι προσπάθειες αυτές φυσικά δε σταματούν εδώ και ούτε περιορίζονται μόνο στην ελληνική βιβλιογραφία. Πλήθος βιβλίων και άρθρων, από το διεθνή χώρο, ασχολούνται αποκλειστικά με τη χρήση των γνωστικών διαδικασιών στα Μαθηματικά.

Το βιβλίο με τίτλο *“Cognitive Science and Mathematics Education”*,<sup>15</sup> παρέχει μια ευρεία περιγραφή της Γνωστικής Επιστήμης, ασχολείται με το τι είναι Γνωστική Επιστήμη, πώς αυτή σχετίζεται με τη μαθηματική εκπαίδευση αλλά και ποιες μπορεί να είναι οι επιπτώσεις της έρευνας πάνω σ’ αυτήν όσον αφορά τους εκπαιδευτικούς. Αναπτύσσονται διεξοδικά η ιδέα της ανάλυσης των γνωστικών διαδικασιών όπως και ορισμένες κονστρουκτιβιστικές απόψεις. Υπάρχουν παραδείγματα που

<sup>14</sup> Βλ. Κιουστελίδης.

<sup>15</sup> Βλ. Schoenfeld, 1987 (α): σελ. 1-30.



προϊδεάζουν τον αναγνώστη περί του θέματος αλλά ως επί το πλείστον το βιβλίο περιορίζεται στην περιγραφή και μόνο κάποιων θεωριών μάθησης, διδακτικών προσεγγίσεων και ορισμένων μεθόδων έρευνας που χρησιμοποιήθηκαν στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής. Επιπλέον, γίνεται μια αναφορά στις εξελίξεις Γνωστικής Επιστήμης που σχετίζονται με τη διδασκαλία των Μαθηματικών, όμως το ενδιαφέρον έγκειται κυρίως στην επίλυση προβλημάτων, δίνοντας έτσι μια αόριστη εικόνα του θέματος. Στο βιβλίο *“Learning Mathematics. The Cognitive Science Approach to Mathematics Education”*,<sup>16</sup> μελετώνται κάποιες εφαρμογές και τα αποτελέσματα συγκεκριμένων μοντέλων μάθησης, που χρησιμοποιήθηκαν στις Η.Π.Α., ρίχνοντας συγχρόνως φως τόσο στις γνωστικές επιστήμες και την εφαρμογή τους στα Μαθηματικά όσο και σε άλλες διδακτικές προσεγγίσεις που μπορεί να χρησιμοποιηθούν. «Γνωστική προσέγγιση» των Μαθηματικών θεωρείται ο τρόπος με τον οποίο κάποιος μαθαίνει Μαθηματικά, δίνοντας την ίδια ερμηνεία και για τη Διδακτική των Μαθηματικών, χωρίς να διαφοροποιεί το αντικείμενο τους. Γίνεται μια προσπάθεια να διαχωριστούν οι έννοιες της αποστήθισης και της κατανόησης, ενώ διεισδύει στη μελέτη της μαθηματικής σκέψης, ρίχνοντας βάρος στις γνωστικές κατασκευές των Μαθηματικών, στις γλωσσικές αναπαραστάσεις, όπως επίσης και στην επίλυση προβλημάτων. Τέλος το βιβλίο *“The Shaping of Deduction in Greek Mathematics. A study in cognitive history”*,<sup>17</sup> είναι ενδιαφέρον για όποιον ασχολείται με τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά αλλά και τη μέθοδο της αφάιρεσης γενικότερα. Δεν είναι ένα συνηθισμένο ιστορικό βιβλίο, αλλά ούτε και μια εργασία πάνω στις πρακτικές των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών. Είναι μια γνωστική μελέτη γεωμετρικών κειμένων, που εστιάζει κυρίως στη δουλειά τριών μεγάλων Γεωμετρών της ελληνιστικής περιόδου. Προσπαθεί να αναδείξει τους παραγωγικούς συλλογισμούς των αρχαίων Ελλήνων, μέσω μιας μελέτης πάνω στη χρήση διαγραμμάτων που φέρουν γράμματα και της μαθηματικής γλώσσας. Τα δύο αυτά στοιχεία (διαγράμματα και μαθηματική γλώσσα) αποτελούν τις γνωστικές επισημάνσεις του συγγραφέα, με τη βοήθεια των οποίων προσπαθεί να κατανοήσει τον τρόπο σκέψης αλλά και τις πρακτικές της γλώσσας που χρησιμοποιείται, προκειμένου να αποφανθεί για τις αποδείξεις, την αποδεικτική μέθοδο και την αφαιρετική διαδικασία των αρχαίων Ελλήνων.

<sup>16</sup> Βλ. Davis.

<sup>17</sup> Βλ. Netz.

Η Γνωστική Επιστήμη, από τις μικρές αυτές αναφορές, φαίνεται να μελετά τον τρόπο που λειτουργεί ο εγκέφαλος και να σχετίζεται με τον τρόπο που κάποιος διδάσκει και κατανοεί τα Μαθηματικά. Σίγουρα όλα τα παραπάνω στοιχεία παρακινούν και υπαγορεύουν τη μελέτη των γνωστικών θεωριών από τους ειδικούς της Διδακτικής, με σκοπό την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο εργάζεται το ανθρώπινο μυαλό. Κάτι που εκ πρώτης όψεως φαίνεται να είναι χρήσιμο, αν όχι απαραίτητο, αλλά οπωσδήποτε επιδέχεται περαιτέρω εξέταση. Εδώ, θα γίνει μια προσπάθεια να δοθεί μια απάντηση στο **τι είναι η γνωστική προσέγγιση των Μαθηματικών αλλά και κάθε άλλης επιστήμης γενικότερα.**

## Τι είναι γνωστική προσέγγιση στα Μαθηματικά;

Μία πρώτη επαφή με τη Γνωστική Επιστήμη πραγματοποιήθηκε στην εισαγωγή που προηγήθηκε, με μια συνοπτική παρουσίαση της δουλειάς που έχει γίνει σ' αυτό τον τομέα και που εύκολα οποιοσδήποτε ενδιαφερόμενος μπορεί να τη συναντήσει ξεφυλλίζοντας κάποια βιβλία της Διδακτικής των Μαθηματικών. Η προσπάθεια αυτή δίνει σε έναν μαθηματικό ή δάσκαλο, με παιδαγωγικά και σε κάποιο βαθμό επιστημολογικά ενδιαφέροντα, εφόδια για μια πιο αναλυτική εξέταση γύρω από το θέμα. Τα ερεθίσματα που προέρχονται από το πρώτο αυτό μέρος οξύνουν την περιέργεια για το τι είναι Γνωστική Επιστήμη και πώς μπορεί να αναπτυχθεί μια προσέγγιση των Μαθηματικών βάσει αυτής. Έρχεται όμως αντιμέτωπη με την απουσία σχετικών γνώσεων του αναγνώστη, που σαφώς δυσχεραίνει την περαιτέρω έρευνα αλλά και την κατανόηση ενός τέτοιου ζητήματος. Παραδείγματος χάρη, ο φοιτητής σ' ένα Μαθηματικό Τμήμα ενός ελληνικού Πανεπιστημίου, καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών του, δεν έχει τη δυνατότητα να πάρει τέτοιου είδους εφόδια, παρ' όλο που αργότερα μπορεί να γίνει εκπαιδευτικός και να διδάσκει Μαθηματικά σε ένα σχολείο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Ωστόσο, οι προσπάθειες που αναφέρθηκαν δημιουργούν ένα, θεωρητικό έστω, υπόβαθρο στη Γνωστική Επιστήμη και ομολογουμένως ενθαρρύνουν την ενασχόληση κάποιου με αυτήν.

Η Γνωστική Επιστήμη πρεσβεύει πλέον μια νέα θεωρία μάθησης και μια νέα επιστημολογική σκοπιά. Τα πρώτα ίχνη της συναντώνται στη δεκαετία του 1960 και φαίνεται να αφήνει πίσω της θεωρίες που

κυριαρχούσαν ως τότε, όπως αυτή του μιχεβιορισμού.<sup>18</sup> Η εμφάνισή της συμπίπτει με τη στροφή του ενδιαφέροντος της έρευνας στις νοητικές λειτουργίες και διαδικασίες, τις οποίες η Γνωστική Επιστήμη προσπαθεί να ανακαλύψει και να αναλύσει. Η ανάπτυξη αυτής της νέας θεωρίας είχε μεγάλη απήχηση, γεγονός που επισφραγίζεται από τις σχετικές αναφορές που έγιναν αλλά και από κάθε νέα προσπάθεια που γίνεται αυτές τις μέρες. Έρευνες απ' τις οποίες προκύπτουν σημαντικά συμπεράσματα πάνω στα Μαθηματικά και άλλες επιστήμες, ανατρέπουν τη μέχρι τώρα εικόνα και επαναπροσδιορίζουν τη θεμελίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης.<sup>19</sup> Οι νέες αυτές αντιλήψεις θέτουν καινούρια θεμέλια στις επιστήμες και είναι κυρίαρχες σε συνέδρια και συναντήσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών ανά τον κόσμο.<sup>20</sup> Άραγε συμφέρει κάποιον να τις αγνοήσει;

## ➤ Η Γνωστική Επιστήμη σήμερα

Οι πρώτες πληροφορίες που αντλούνται για τη νέα επιστήμη έρχονται από το χώρο της Ψυχολογίας. Μέσω αυτών, μπορεί κάποιος να σχηματίσει μια εικόνα αλλά σίγουρα όχι ολοκληρωμένη, καθώς για κάτι τέτοιο είναι απαραίτητη μια πολύπλευρη διερεύνηση.

Σύμφωνα με ένα Λεξικό Ψυχολογικών Όρων:

**Γνωστική Ψυχολογία** *“είναι ο κλάδος της ψυχολογίας όπου δίνεται έμφαση στην ανάλυση των ανθρώπινων νοητικών διεργασιών (αντίληψη, μνήμη, σκέψη, συλλογισμός) αφ’ ενός και στη μελέτη του τρόπου επεξεργασίας των πληροφοριών αφ’ ετέρου”.*<sup>21</sup>

Ενώ **Γνωστική Επιστήμη**<sup>22</sup> θεωρείται, *“ο διεπιστημονικός κλάδος που έχει την αρχή του στη Γενική Ψυχολογία. ...Στα πλαίσια της οποίας εξετάζεται ο χαρακτήρας, η εξέλιξη και η εφαρμογή της γνώσης, ..εστιάζει το ενδιαφέρον της στη σύγχρονη Γνωστική Ψυχολογία, στις νευροεπιστήμες, τη γλωσσολογία και την πληροφορική”.*<sup>23</sup>

<sup>18</sup> Βλ. περισσότερα Hayes: σελ 23.

<sup>19</sup> Βλ. ενδεικτικά: Knuth / Jones και Conway / Sloane.

<sup>20</sup> Βλ. εκτενή έκθεση από πρακτικά συνεδρίων στην ιστοσελίδα του Educational Resources Information Centre (ERIC), <http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/Home.Portal>.

<sup>21</sup> Βλ. Χοντουλάκη / Πατεράκη: σελ. 70 - Γνωστική ψυχολογία.

<sup>22</sup> Ο αγγλικός όρος «Cognitive Science», αποδίδεται ποικιλοτρόπως στην ελληνική γλώσσα. Εδώ, θα χρησιμοποιείται η απόδοση του ως «Γνωστική Επιστήμη», συχνά όμως στη βιβλιογραφία συναντάται και ως Γνωσιακή Επιστήμη ή Γνωσιοεπιστήμη.

<sup>23</sup> Βλ. Παπαδόπουλος: σελ. 200 - Γνωσιακή επιστήμη.

Επιπρόσθετα, βάσει της *“Companion Encyclopedia of Psychology”*,<sup>24</sup> η Γνωστική Ψυχολογία έχει εξελιχθεί κατά τη διάρκεια των χρόνων, μετά τη δεκαετία του 1960 και συμπεριλαμβάνει τη μνήμη, την προσοχή, τη σκέψη, τη λογική, την επίλυση προβλημάτων και όλες τις νοητικές διεργασίες που μπορούν να θεωρηθούν ως ουσιαστικές μορφές επεξεργασίας πληροφοριών. Τονίζεται ότι, η Γνωστική Επιστήμη δεν πρέπει να συγχέεται με τη Γνωστική Ψυχολογία αλλά ούτε και με τη διαδικασία της γνώσης. Είναι μια σχετικά πρόσφατη ορολογία που χρησιμοποιείται για μια διεπιστημονική προσπάθεια, περιλαμβάνει διάφορους τομείς και έχει ως σκοπό την κατασκευή θεωρητικών μοντέλων για τη διεργασία των πληροφοριών που δέχεται ο άνθρωπος. Οι παραπάνω πληροφορίες, λίγες και συγκεχυμένες, καθιστούν ασαφές το αντικείμενο των δύο νέων πεδίων, η αποσαφήνιση των οποίων απαιτεί πιο εξειδικευμένη βιβλιογραφία.

Στο βιβλίο *“Εισαγωγή στη Γνωσιοεπιστήμη”*,<sup>25</sup> το τοπίο αρχίζει να ξεκαθαρίζει και όλα γίνονται πιο κατανοητά, καθώς επισημαίνεται η ικανότητα του νου (διάνοια) που *“ως ένα πολύπλοκο σύστημα δέχεται, αποθηκεύει, ανακτά, μετασχηματίζει και διαβιβάζει πληροφορίες”* και η **Γνωστική Επιστήμη** φαίνεται να πραγματεύεται τέτοιου είδους γνωστικές διεργασίες, *“όσες σχετίζονται με την κατ’ αίσθηση αντίληψη και με τη γνώση”*. Η **“επιστήμη της διάνοιας”** όπως παρουσιάζεται, περιλαμβάνει την έρευνα που έγκειται στην κατανόηση διεργασιών *“σαν την κατ’ αίσθηση αντίληψη, τη γνώση, τη σκέψη, τη μνήμη, την κατανόηση της γλώσσας, τη μάθηση και άλλα ψυχονοητικά φαινόμενα”*. Ακόμη πιο αναλυτικά, σύμφωνα με την Εγκυκλοπαίδεια Φιλοσοφίας του Πανεπιστημίου του Stanford,<sup>26</sup> η Γνωστική Επιστήμη είναι ένας επιστημονικός κλάδος που **προσπαθεί να κατανοήσει το μυαλό και τις λειτουργίες του**. Αποτελεί συνδυασμό διάφορων επιστημονικών περιοχών, μερικές εκ των οποίων ανήκουν στη Φιλοσοφία, την Ψυχολογία αλλά και την Τεχνητή Νοημοσύνη.

Βασική υπόθεση της Γνωστικής Επιστήμης είναι ότι η διαδικασία της σκέψης μπορεί να γίνει ευκολότερα κατανοητή αναπτύσσοντας μια θεωρία γύρω από δομές αναπαραστάσεων, που υπάρχουν στο μυαλό αλλά και υπολογιστικές διαδικασίες που λαμβάνουν μέρος σε αυτές. Τέτοιες αναπαραστάσεις είναι οι λογικές προτάσεις, οι κανόνες, οι

<sup>24</sup> Βλ. Colman: σελ.16 - Cognition.

<sup>25</sup> Βλ. Stillings, et al. : σελ.23.

<sup>26</sup> Βλ. Thagard, P.: Cognitive Science. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <http://www.science.uva.nl/~seop/entries/cognitive-science/>

σκέψεις, οι εικόνες και οι αναλογίες που χρησιμοποιούν διαδικασίες όπως αυτή της αφαίρεσης, της αναζήτησης, του συνδυασμού και της ανάκτησης. Έτσι, η εξέταση κρίσιμων ερωτημάτων γύρω από τη φύση της νόησης αντιμετωπίζεται με ψυχολογικά πειράματα που έχουν ως βάση τις αναπαραστάσεις και τους υπολογισμούς και κύριο στόχο τη διαμόρφωση και δοκιμή μοντέλων, που προσομοιάζουν τις διανοητικές διαδικασίες αλλά και τις ανθρώπινες επιδόσεις.

Βάζοντας μια άνω τελεία, σύμφωνα με τον Gardner και το βιβλίο *“The Mind’s New Science: A History of the Cognitive Revolution”*,<sup>27</sup> η Γνωστική Επιστήμη είναι μια πειραματικά επαληθεύσιμη προσπάθεια που απαντά σε μακροχρόνια επιστημολογικά ερωτήματα, ιδιαίτερα εκείνα τα οποία αφορούν στη φύση της γνώσης, τα συστατικά, τις πηγές της, την ανάπτυξη και τη χρήση της. Αν και μερικές φορές ο όρος διευρύνεται ώστε να περιλαμβάνει όλους τους τύπους της γνώσης, έμψυχη και άψυχη, ανθρώπινη και μη, χρησιμοποιείται κυρίως στην προσπάθεια **εξήγησης της ανθρώπινης γνώσης**. Ενώ όπως αναφέρει και η Βοσνιάδου στο βιβλίο *“Γνωσιακή Επιστήμη. Η νέα επιστήμη του νου”*,<sup>28</sup> είναι μια πρόσφατη **επιστήμη της νόησης**, που αριθμεί λιγότερο από μισό αιώνα ύπαρξης και ξεκίνησε με σκοπό να μελετηθούν τα επιστημονικά νοητικά φαινόμενα. Κεντρική της ιδέα είναι να μελετηθεί η νόηση ως μια αναπαραστατική – υπολογιστική διαδικασία, ανεξάρτητα από το υλικό υπόστρωμα στο οποίο υλοποιείται. **Έχει σαν πυρήνα της έρευνάς της ερωτήματα όπως: ποια είναι η φύση της γνώσης; από πού πηγάζει; πώς αναπαρίσταται στον ανθρώπινο νου;** είναι η γνώση έμφυτη ή είναι αποτέλεσμα μάθησης;

Από επιστημολογική σκοπιά, η Γνωστική Επιστήμη περιλαμβάνει θεωρητικές αναλύσεις που επιβεβαιώνονται πειραματικά αλλά και γνώσεις από το σχεδιασμό υπολογιστών για να ερευνηθεί τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσεται και οργανώνεται η γνώση. Έχει κάνει σημαντική πρόοδο στην κατανόηση των νοητικών δομών και η επεξεργασία της στηρίζεται κυρίως στην αναπαράσταση, την απόκτηση αλλά και την κατασκευή της γνώσης. Η Γνωστική Νευροεπιστήμη, η Τεχνητή Νοημοσύνη και η Γνωστική Ψυχολογία αποτελούν τον πυρήνα αλλά και τα τρία στάδια της ανάλυσης της Γνωστικής Επιστήμης. Πλέον περισσότερο ενδιαφέρον δίνεται στην Τεχνητή Νοημοσύνη που, αν και είναι ένας νέος κλάδος, θεωρείται ο καλύτερος τρόπος για τη μελέτη της

<sup>27</sup> Βλ. Gardner: σελ.6.

<sup>28</sup> Βλ. Βοσνιάδου, 2004: σελ. 13,36.

γνωστικής ικανότητας του ανθρώπου. Για όσους πάλι εξετάζουν τη γνώση ως ένα κοινωνικό – πολιτισμικό φαινόμενο, τότε η διεπιστημονική φύση της Γνωστικής Επιστήμης παρέχει μεγάλα οφέλη. Κάτι που πλέον εφαρμόζεται στην έρευνα, μεγάλο μέρος της οποίας απαιτεί γνωστικούς ψυχολόγους και ανθρωπολόγους να συνεργάζονται γύρω από τη Διδακτική των Μαθηματικών αλλά και κάθε άλλη επιστήμη. Σύμφωνα με όλα αυτά, οι γνωστικοί επιστήμονες χρειάζεται να διεισδύσουν και να αναλύσουν τους περίπλοκους συλλογισμούς που χρησιμοποίησε ο κάθε «σπουδαίος» επιστήμονας, προκειμένου να δημιουργήσουν κάποιες θεωρίες γύρω από τις διαδικασίες συλλογισμού του ανθρώπου.<sup>29</sup>

Ωστόσο η Γνωστική Επιστήμη αναπτύχθηκε στηριζόμενη στις ιδέες του Piaget και την επιστημολογία του Kuhn, παραγκωνίζοντας τις θεωρίες του συμπεριφορισμού (μπιχεβιορισμού) που θεωρήθηκαν χρήσιμες μεν αλλά ανεπαρκείς. Η διαφορά τους έγκειται στο ότι ο μπιχεβιορισμός θεωρούσε αδύνατη τη μελέτη του νου, καθώς δεν ήταν εφικτή η παρατήρηση των διεργασιών του, δίνοντας έτσι σημασία στη συμπεριφορά, που είναι άμεσα παρατηρήσιμη.<sup>30</sup> Με κυρίαρχα στοιχεία της θεωρίας τους τις εξωτερικές επιδράσεις του περιβάλλοντος, την εξάσκηση και τη μίμηση κατάλληλων προτύπων, οι μπιχεβιοριστές πίστευαν ότι η μάθηση είναι αθροιστική και ότι η μαθηματική γνώση αποκτάται εύκολα αν ο μαθητής καταλάβει πώς να εκτελεί ορισμένες προκαθορισμένες διαδικασίες, στις οποίες αρκεί και μόνο να δώσει προσοχή.<sup>31</sup> Από τη μεριά της φιλοσοφίας, η Γνωστική Επιστήμη, με την εισαγωγή της φαίνεται να συνδέεται στενά με τις θεωρίες του Piaget και τον κονστρουκτιβισμό<sup>32</sup> και να αφήνει πίσω της τις θεωρίες της απολυτοκρατίας (λογικισμός, πλατωνισμός, ενορατισμός, φορμαλισμός). Η τελευταία, σε γενικές γραμμές, στηρίζεται σε μια συσσωρευτική αντίληψη της γνώσης και ευνοεί την αποστήθιση, χωρίς να ενδιαφέρεται για τον τρόπο με τον οποίο κάποιος κατανοεί, κάτι που ρητά εκφράζει η Γνωστική Επιστήμη. Θεωρούν ότι η μαθηματική γνώση αποτελείται από βέβαιες, αμετάβλητες και αιώνιες αλήθειες και ότι είναι η μόνη αντικειμενική γνώση, αφού ο συλλογισμός με τον οποίο φτάνει κανείς σε μια μαθηματική πρόταση δεν επιφυλάσσει λάθη, εφόσον στηρίζεται στη λογική που κανείς δε μπορεί να αμφισβητήσει και σε προτάσεις που έχουν αποδειχθεί και είναι αληθείς.<sup>33</sup>

<sup>29</sup> Βλ. Nersessian: σελ. 194-211.

<sup>30</sup> Βλ. περισσότερα Hayes: σελ 21.

<sup>31</sup> Βλ. Βοσνιάδου, 1995: σελ. 14-15.

<sup>32</sup> Βλ. Conway / Sloane: σελ 83.

<sup>33</sup> Βλ. περισσότερα Ernest: σελ. 7-8.

Ο τρόπος, λοιπόν, με τον οποίο κάποιος αποκτά γνώση είναι το επίκεντρο των γνωστικών επιστημών και η **σπουδαιότητα πλέον έγκειται όχι απλά στο πώς μεταφέρεται η γνώση αλλά στο πώς κατακτάται.**<sup>34</sup> Επομένως, ο στόχος της γνωστικής μελέτης μιας επιστήμης είναι να αναπτύξει μια τέτοια θεωρία γύρω από αυτή την επιστήμη, κάτι που σαφώς έχει εφαρμογή και στα Μαθηματικά. Γιατί όμως αποκαλείται γνωστική; Η επιστήμη είναι μια γνωστική δραστηριότητα με κύριο ενδιαφέρον την παραγωγή της γνώσης. Πράγματι, η επιστήμη τη σημερινή ημέρα, είναι το σημαντικότερο παράδειγμα κάθε εγχειρήματος που επικαλείται την απόκτηση της γνώσης. Ενώ, προς το παρόν, ο μοναδικός τρόπος για την κατανόηση οποιασδήποτε γνωστικής δραστηριότητας είναι η χρήση όλων όσων ανήκουν σ' αυτό τον επιστημονικό κλάδο και εμπεριέχονται στον όρο «Γνωστική Επιστήμη». Η γνωστική θεωρία της επιστήμης είναι μια ευρεία επιστημονική ανάλυση της επιστήμης, που χρησιμοποιεί τους πόρους των Νευροεπιστημών, της Γνωστικής Ψυχολογίας, της Επιστήμης των Υπολογιστών και άλλων. Και γιατί «ευρεία»; Πρέπει κάποιος να είναι προσεκτικός ώστε να μην αποκτήσει μια ελλιπή εικόνα για το τι περιέχει η Γνωστική Επιστήμη. Μερικοί την εξισώνουν με τη Γνωστική Ψυχολογία, άλλοι πάλι την περιορίζουν στην εφαρμογή των υπολογιστικών μοντέλων της γνώσης, είτε αυτά αναφέρονται στους ανθρώπους είτε στους υπολογιστές. Όπως ήδη προαναφέρθηκε όμως, οι νέες αυτές θεωρίες έχουν επισκιάσει τόσες διαφορετικές επιστήμες, που σίγουρα θα πρέπει κάποιος να επιμείνει στην ευρεία έννοια της Γνωστικής Επιστήμης. Αυτή περιέχει μέρη της Λογικής και της Φιλοσοφίας και στη συνέχεια κάνει χρήση όλων των μεθόδων της Γνωστικής Νευροβιολογίας, μέσω της Γνωστικής Ψυχολογίας και της Τεχνητής Νοημοσύνης, στη Γλωσσολογία και από τη Γνωστική Κοινωνιολογία στην Ανθρωπολογία. Δε θα ήταν σωστό, εξάλλου, να τεθούν εξαρχής περιορισμοί σε κάτι που αργότερα μπορεί να αποδειχθεί χρήσιμο στην κατανόηση του φαινομένου της σύγχρονης αυτής επιστήμης.<sup>35</sup>

Η διαφορά Γνωστικής Επιστήμης και Ψυχολογίας αν και εντοπίζεται σε λεπτά σημεία του ορισμού τους, υφίσταται και είναι συνετό να σημειωθεί. Αρχικά, η Γνωστική Επιστήμη χαρακτηριζόταν από τη συνεργασία της με την Ψυχολογία. Ωστόσο διαφέρουν μεταξύ τους, τόσο ως προς τη μεθοδολογία όσο και ως προς τους σκοπούς τους. Η Γνωστική

<sup>34</sup> Βλ. Ganascia: σελ. 84.

<sup>35</sup> Βλ. Giere: σελ. 139.



Ψυχολογία, “η οποία αναπτύχθηκε την ίδια περίοδο με τη Γνωσιακή<sup>36</sup> Επιστήμη, βασίστηκε στην πειραματική μεθοδολογία για να εξετάσει τις πιθανές γνωστικές λειτουργίες που λαμβάνουν χώρα όταν ένα ερέθισμα γίνεται αντικείμενο επεξεργασίας στον εγκέφαλο”.<sup>37</sup> Χρησιμοποιώντας κυρίως επαγωγικές πειραματικές διαδικασίες, οι γνωστικοί ψυχολόγοι προσπαθούν να καταλάβουν τι γίνεται στο μαύρο κουτί της νόησης, να κτίσουν θεωρίες επεξεργασίας πληροφοριών αλλά και να φτιάξουν υποθέσεις για τη λειτουργία εξειδικευμένων γνωστικών διαδικασιών, όπως είναι η αντίληψη και η μνήμη. Από την άλλη, οι γνωστικοί επιστήμονες θεωρούν το σύστημα της νοημοσύνης “..σα μια μηχανή, τη λειτουργία της οποίας προσπαθούν να κατανοήσουν, μέσω της δημιουργίας μοντέλων που την προσομοιάζουν”.<sup>38</sup>

Αρχικά λοιπόν, η γνωστική προσέγγιση επικεντρώθηκε στην επεξεργασία πληροφοριών, θεωρώντας τα συστήματα πληροφοριών (ή συμβόλων) ως κύριο άξονα για την ανάλυση της λειτουργίας των νοητικών μηχανισμών αλλά και τις αναπαραστάσεις ως μορφές αποθήκευσης των πληροφοριών.<sup>39</sup> Πλέον η ιδέα αυτή<sup>40</sup> έχει παραμεριστεί εντελώς και τη θέση της έχουν πάρει θεωρίες που δίνουν έμφαση στο εννοιολογικό υπόβαθρο. Σύμφωνα με τη Βοσνιάδου (1998), **το γνωστικό σύστημα “αποτελείται από έννοιες οι οποίες είναι οργανωμένες σε ευρύτερες εννοιολογικές δομές”,**<sup>41</sup> μια άποψη που πλέον έχει επικρατήσει και παράλληλα επηρεάζει πολλές πτυχές της Γνωστικής Επιστήμης.

Με την ανάπτυξη της Γνωστικής Επιστήμης διαμορφώθηκαν οι βασικές συνιστώσες του περιεχομένου της, που είχαν σαν αντικείμενο την οργάνωση της σκέψης, τη μνημονική λειτουργία του εγκεφάλου, τον τρόπο με τον οποίο δομείται η γνώση αλλά και κάποιους φιλοσοφικούς παράγοντες, που συνήθως επηρεάζουν τον τρόπο απόκτησης της γνώσης, όπως π.χ. οι ιδεολογίες του καθενός. Κατά συνέπεια, μια γνωστική προσέγγιση έχει σαν κύριους άξονες τα εξής:

<sup>36</sup> Βλ. παρ. 22.

<sup>37</sup> Βλ. Βοσνιάδου, 2004: σελ. 36.

<sup>38</sup> Στο ίδιο.

<sup>39</sup> Βλ. Simon: σελ. 56, 57 αλλά και Βοσνιάδου, 1998: σελ. 27-34.

<sup>40</sup> Η ιδέα αυτή, ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος δεν είναι παρά ένα σύστημα επεξεργασίας πληροφοριών, έμεινε κυρίαρχη για πολλά χρόνια στο χώρο της Γνωστικής Επιστήμης, ωστόσο μετά από ένα σημείο αμφισβητήθηκε και έχασε την αίγλη της.

<sup>41</sup> Βλ. Βοσνιάδου, 1998: σελ. 11.

❖ **Εννοιολογική οργάνωση της σκέψης**• Δίνοντας έμφαση στο εννοιολογικό υπόβαθρο, οι έννοιες κατέχουν εξέχουσα θέση στη Γνωστική Επιστήμη. Θεωρείται ότι αποτελούνται από “ορισμένα χαρακτηριστικά γνωρίσματα” και ότι είναι “ένα σύνολο αναγκαίων και επαρκών καθοριστικών γνωρισμάτων που ορίζουν σαφώς ποιες περιπτώσεις ανήκουν σε μια δεδομένη εννοιολογική κατηγορία και ποιες όχι”.<sup>42</sup> Οι έννοιες ανήκουν ουσιαστικά στον τρόπο της σκέψης και είναι αντικείμενα – προϊόντα των νοητικών λειτουργιών του ανθρώπου. Έτσι, ως επί το πλείστον, θεωρούνται νοητικές υπάρξεις<sup>43</sup> και ο καλύτερος τρόπος για να κατανοήσει κανείς τη φύση τους είναι να τις αντιμετωπίσει ως δομές και όχι απλά σαν οντότητες, δίνοντας έτσι σημασία στη σχεσιακή τους υπόσταση.

❖ **Εννοιολογικές Αλλαγές**• Οι “υπάρχουσες εννοιολογικές δομές δεν είναι στατικές, αλλά διαρκώς αλλάζουν καθώς αποκτάται νέα γνώση”. Έτσι κανείς θα πρέπει να κατανοήσει “όχι μόνο πώς οργανώνεται και αναπαρίσταται η γνώση, αλλά επίσης” και τους τρόπους “με τους οποίους οι υπάρχουσες γνωσιακές δομές μεταβάλλονται κατά τη διαδικασία απόκτησης νέων γνώσεων”.<sup>44</sup> Οι μεταβολές αυτές, γνωστές ως εννοιολογικές αλλαγές, ανατροπές ή και επαναστάσεις, πραγματοποιούνται όταν ολόκληρα συστήματα εννοιών αντικαθίστανται από κάποια άλλα, καινούρια, πιο πλήρη και επαρκέστερα των προηγούμενων τους. Η σημασία τους δε, είναι πλέον μεγάλη, ενώ θεωρείται ότι έγινε φανερή χάρη στον Kuhn το 1962 και στο βιβλίο του σχετικά με τις επιστημονικές επαναστάσεις, όπου είναι από τις πρώτες φορές που τίγεται το ζήτημα αυτό.<sup>45</sup>

❖ **Αναπαράσταση των γνώσεων**• Με το πέρασμα των εννοιών στο προσκήνιο της Γνωστικής Επιστήμης η παλιά θεωρία, για το πώς αναπαρίστανται και αποθηκεύονται οι πληροφορίες στο μυαλό, ανασυντάχθηκε. Προκειμένου να εξηγηθεί ο τρόπος με τον οποίο αναπαρίστανται πλέον οι γνώσεις και κατά συνέπεια οι έννοιες, αναπτύχθηκε μια νέα θεωρία αναπαραστάσεων, αυτή των νοητικών μοντέλων.<sup>46</sup> Τα νοητικά μοντέλα δεν είναι τίποτε περισσότερο από

<sup>42</sup> Βλ. Βοσνιάδου, 1998: σελ. 11,12

<sup>43</sup> Βλ. Thagard: σελ.19, 24-30.

<sup>44</sup> Βλ. Βοσνιάδου, 1998: σελ. 21.

<sup>45</sup> Λόγος για το βιβλίο του Thomas Kuhn, *Structure of Scientific Revolutions*. Βλ. Thagard, 1992: σελ. 3-12, 34-61.

<sup>46</sup> Ο τρόπος αναπαράστασης των γνώσεων θεωρείται ότι γίνεται ακόμη με τη χρήση νοητικών εικόνων, προτασιακών αναπαραστάσεων αλλά και νευρωνικών δικτύων, ωστόσο γίνεται αναφορά μόνο στα νοητικά μοντέλα, καθώς αυτά χρησιμοποιούνται περισσότερο στη βιβλιογραφία. Βλ. Βοσνιάδου, 1998: σελ.19,40 αλλά και Berliner / Calfee: σελ. 502.

νοητικές αναπαραστάσεις που σχηματίζονται στιγμιαία και συνήθως βοηθούν στην αντιμετώπιση συγκεκριμένων καταστάσεων, καθώς αναπαριστούν τη δομή αντικειμένων, πεποιθήσεων ή και θεωριών, που πολλές φορές ίσως να μην έχουν γίνει ποτέ ορατά.

❖ **Είδη γνώσεων**• Προσπαθώντας να κατανοηθεί ο τρόπος με τον οποίο φτάνει κανείς στη γνώση, έγινε μια σημαντική διάκριση. Η γνώση καθίσταται δυνατή στηριζόμενη κατά κύριο λόγο άλλοτε σε έννοιες και άλλοτε σε διαδικασίες, έτσι υπάρχει η εννοιολογική γνώση και η διαδικαστική. Καλύτερα, η γνώση που προκύπτει από το συνδυασμό εννοιών (εννοιολογική γνώση), αποτελείται από ένα πυρήνα εννοιών που σχετίζονται με το θέμα που διαπραγματεύεται αλλά και τις σχέσεις ανάμεσα στα κομμάτια που συνδέουν τη γνώση για αυτό. Αφορά την κατανόηση και χαρακτηρίζεται από διαφορετικές δομές, εννοιολογικές συνθέσεις, ιεραρχίες αλλά και νοητικά μοντέλα. Η γνώση που στηρίζεται στις διαδικασίες (διαδικαστική), αφορά στην ικανότητα και κυρίως στον τρόπο με τον οποίο μετατρέπεται κάτι σε γνώση. Είναι η γνώση των βημάτων που απαιτούνται για να πραγματοποιηθούν κάποιοι στόχοι, ενώ χαρακτηρίζεται επίσης από τη χρήση δομών, που αποτελούνται από τεχνάσματα, μεθόδους αλλά και κανόνες.<sup>47</sup>

❖ **Μεταγνώση – Αναστοχασμός**<sup>48</sup> Πέραν όσων αναφέρθηκαν μέχρι τώρα και σκιαγραφούν τη γνωστική προσέγγιση, υπάρχει ένα είδος γνώσης που αφορά το πώς μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει όλα αυτά. Έχοντας δύο διαστάσεις, η επονομαζόμενη μεταγνώση αναφέρεται άλλοτε στη γνώση που έχει να κάνει με τη γνωστική λειτουργία του καθενός, παρέχοντας πληροφορίες για τις δυνατότητες αλλά και τις αδυναμίες της γνωστικής ικανότητας του. Άλλοτε, πάλι, αναφέρεται στις δραστηριότητες που σχετίζονται με το πώς ελέγχει κάποιος τις γνωστικές διεργασίες του, παίζοντας το ρόλο μιας ειδικής δομής που οργανώνει και καθοδηγεί τις διαδικασίες της σκέψης και της μάθησης, προκειμένου να εξυπηρετηθεί κάποιος στόχος. Με λίγα λόγια, αναφέρεται στη γνώση που διαθέτει κάποιος για τις γνωστικές του λειτουργίες, τα προϊόντα αυτών αλλά και καθετί που σχετίζεται μαζί τους.<sup>49</sup> Έχοντας το ίδιο σχεδόν νόημα, ο όρος του αναστοχασμού φαίνεται να προηγείται χρονικά αυτού της μεταγνώσης και να χρησιμοποιείται από τον Piaget, ο οποίος αναπτύσσει την έννοια της «αναστοχαστικής αφαίρεσης» με τη σημασία της κατανόησης ή της συνειδητοποίησης του μηχανισμού άντλησης,

<sup>47</sup> Βλ. ενδεικτικά McCormic: σελ. 141-159 αλλά και Schoultszi, et al. 2001.

<sup>48</sup> Αποδόσεις στην ελληνική των αγγλικών όρων «metacognitive knowledge» και «reflection» αντίστοιχα. Βλ. Καστάνης.

<sup>49</sup> Βλ. πρ. παρ. σελ. 3-5 αλλά και Berliner: σελ. 506 .

αναδιοργάνωσης και εδραίωσης της γνώσης. Γενικότερα, συναντάται και ο όρος της «αναστοχαστικής νοημοσύνης» με τη σημασία “ενός είδους ενδοσκοπήσης και αυτοκριτικής ενός ατόμου για τις νοητικές του λειτουργίες και μεταλλαγές”.<sup>50</sup>

❖ **Επιστημολογικές Πεποιθήσεις:** Η ανάγκη της αυτορρύθμισης των γνωστικών λειτουργιών (που θίγει η μεταγνώση) αλλά και η εξέταση του τρόπου με τον οποίο αποκτάται κάθε είδους γνώση, αναδεικνύει μια ακόμη σημαντική πτυχή της Γνωστικής Επιστήμης. Οι επιστημολογικές πεποιθήσεις – κοινώς «φιλοσοφία» ή «ιδεολογίες» – των δασκάλων και κατ’ επέκταση των μαθητών, προσδιορίζουν την κριτική στάση του καθενός και έχουν ιδιαίτερη απήχηση στον τρόπο με τον οποίο κάποιος διδάσκει, προσεγγίζει και μαθαίνει κάτι. Είναι φανερό μετά από όσα αναφέρθηκαν, ότι η γνώση όσο και η μάθηση δεν είναι μονοδιάστατη. Το ίδιο πλέον ισχύει και για τις αντιλήψεις των δασκάλων και των καθηγητών της μέσης εκπαίδευσης, οι οποίες αρχικά ήταν περιθωριοποιημένες από την έρευνα της εκπαίδευσης αλλά αναδείχθηκαν αρκετά μετά τα μέσα της δεκαετίας του ’80.<sup>51</sup>

## ➤ Τα Μαθηματικά από τη σκοπιά της Γνωστικής Επιστήμης

Η έρευνα στη Γνωστική Επιστήμη διεισδύει στο περιεχόμενο και τις διαδικασίες της γνωστικής δραστηριότητας και ασχολείται με το πώς λειτουργεί ο εγκέφαλος του ανθρώπου, πώς αποκτάται η γνώση αλλά και πώς δομείται η νόηση. Η επιρροή της Γνωστικής Επιστήμης στα Μαθηματικά ήταν φυσικά αναλόφευκτη. Τα Μαθηματικά, τόσο σαν επιστήμη όσο και σαν τρόπος σκέψης, μπορούν να αναλυθούν πλέον διεξοδικότερα και να πάρουν μια νέα ώθηση σύμφωνα με τις θεωρίες της Γνωστικής Επιστήμης. Έτσι, οι βασικές συνιστώσες της γνωστικής προσέγγισης, που αναφέρθηκαν προηγουμένως σε γενικότερα πλαίσια, βρίσκουν αντίκρισμα και στα Μαθηματικά. Ερμηνεύουν από γνωστική σκοπιά την οργάνωση της μαθηματικής σκέψης βάσει των εννοιών της. Σκιαγραφούν τον τρόπο με τον οποίο σχηματίζονται οι έννοιες αλλά και τις εννοιολογικές αλλαγές, την αναπαράσταση και τον αναστοχασμό των

<sup>50</sup> Στο ίδιο, Καστάνης: σελ. 3.

<sup>51</sup> Η σημασία των επιστημολογικών πεποιθήσεων τονίζεται ιδιαίτερα από ένα μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας. Βλ. περισσότερα Bromme, 2005: σελ.191-201 αλλά και Berliner: σελ. 518-520.

μαθηματικών γνώσεων, διακρίνοντας έτσι τα είδη της μαθηματικής γνώσης, όπως και τις επιστημολογικές πεποιθήσεις των μαθηματικών. Θέματα που απασχολούν και εξετάζονται, μεμονωμένα τις περισσότερες φορές, από ένα μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας της Διδακτικής των Μαθηματικών και υπό αυτή τη δομή αναλύονται στη συνέχεια.

### Εννοιολογική οργάνωση της σκέψης

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το γνωσιακό σύστημα θεωρείται ότι αποτελείται από έννοιες. Η μάθηση επίσης, έχει να κάνει με την απόκτηση, συστηματοποίηση, κατανόηση και χρησιμοποίηση των εννοιών. Προς τα τέλη της δεκαετίας του '60, στο βιβλίο *“Εισαγωγή στην Παιδαγωγική Ψυχολογία”*,<sup>52</sup> η μάθηση παρουσιάζεται συνώνυμη της κατανόησης ή της αντίληψης του νοήματος, δίνοντας μεγάλο βάρος στο ρόλο των εννοιών αλλά και στον τρόπο με τον οποίο διαμορφώνονται. Σύμφωνα με αυτό, οι έννοιες δεν είναι έμφυτες, αναπτύσσονται με την εμπειρία της πραγματικότητας, συμβάλλουν στην ταξινόμηση και κατηγοριοποίηση του κόσμου που περιγράφουν και σχηματίζονται, κυρίως, βάσει των διαδικασιών της αντίληψης και της αφαίρεσης. Ο σκοπός δε ενός εκπαιδευτικού, είθισται να είναι η εννοιολογική μάθηση ή με άλλα λόγια η μάθηση που προέρχεται από την κατανόηση – αν και αυτό δεν είναι πάντα εφικτό, όπως θα φανεί στη συνέχεια – επιδιώκοντας παράλληλα τον εννοιολογικό τρόπο σκέψης του μαθητή ακόμη και στα Μαθηματικά.<sup>53</sup> Τώρα πια, οι έννοιες θεωρούνται μια από τις σημαντικότερες μορφές της ανθρώπινης νόησης και δεν είναι παρά νοητικές κατασκευές, που αντανακλούν με πληρότητα τα ουσιώδη χαρακτηριστικά γνωρίσματα των στοιχείων της πραγματικότητας.

Στα Μαθηματικά ο ρόλος των εννοιών θεωρείται εξίσου σημαντικός, η κατανόησή τους ωστόσο είναι μια πηγή προέλευσης των νοητικών δυσκολιών που αντιμετωπίζουν στη μάθηση τα παιδιά και όχι μόνο. Οι μαθηματικές έννοιες αναφέρονται σε χαρακτηριστικά ή ιδιότητες και κυρίως στις σχέσεις μεταξύ αυτών, που εισάγονται μέσα από αφαίρεση και γενίκευση και έχουν ως στόχο τη νοητική τους οργάνωση. Είναι ανθρώπινες δημιουργίες με σκοπό την επισήμανση εσωτερικών συσχετίσεων των συστατικών στα προβλήματα, επιστημονικά ή πρακτικά, που αντιμετωπίζονται και επιλύονται ή στα φαινόμενα και τις

<sup>52</sup> Βλ. Stones. Το πρωτότυπο εκδόθηκε το 1966.

<sup>53</sup> Στο ίδιο σελ.115,127,208,149,163,166,220,221.

καταστάσεις όπου επιδιώκεται η κατανόησή τους. Οι μαθηματικές έννοιες είναι προϊόντα της ανθρώπινης δραστηριότητας. Το «εμβαδόν», για παράδειγμα, δεν είναι ένα στοιχείο που ενυπάρχει στις επιφάνειες από τη φύση τους, αλλά ένα μέτρο που εκφράζει τη σχέση του μεγέθους τους με ένα μοναδιαίο μέγεθος, επινοήθηκε δε από την ανάγκη του ανθρώπου για τη μέτρηση των επιφανειών και έκτοτε προστέθηκε στα χαρακτηριστικά τους.<sup>54</sup>

Η σκέψη, από τη στιγμή που τοποθετείται μέσα στο πλαίσιο μιας ιδιόζουσας μαθηματικής θεωρίας, καθοδηγείται κατά κανόνα από τις έννοιες που την απαρτίζουν. Κατά τη διαδικασία ανάπτυξής τους οι μαθηματικές έννοιες οργανώνονται σε συστήματα αλληλοσχετιζόμενων εννοιών και συγκροτούν μια μαθηματική θεωρία, όπως είναι σήμερα η θεωρία των αριθμών ή αυτήν της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Σχηματίζονται δηλαδή **εννοιολογικές δομές** (επιστημονικές θεωρίες) που αποτελούνται από **έννοιες** και συντελούν μαζί στην οργάνωση της μαθηματικής γνώσης και σκέψης.

Πέραν των εννοιών που μπορούν εύκολα να κατανοηθούν από την εμπειρία και μόνο, υπάρχουν έννοιες που ορίζονται από τη σχέση τους με άλλες μαθηματικές έννοιες, υφίστανται σαν σχέσεις και παράλληλα αποτελούν αντικείμενο αφαίρεσης από την οποία μπορεί να προκύψουν άλλες νέες έννοιες. Τυπικό παράδειγμα, η έννοια του «τετραγώνου» στη Γεωμετρία: *“Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος”*,<sup>55</sup> που δομείται με τη σύνδεση εννοιών όπως αυτή του «ρόμβου» και του «παραλληλογράμμου», που είναι ήδη γνωστές. Ωστόσο, υπάρχουν και μαθηματικές έννοιες που δεν προέρχονται με άμεσο και προφανή τρόπο από άλλες βάσει κάποιων διαδικασιών και το περιεχόμενό τους δεν είναι απαραίτητα συγκεκριμένο. Όλες αυτές οι έννοιες – πλην των εμπειρικών – είναι οι θεωρητικές μαθηματικές έννοιες, που απαιτούν και την περισσότερη προσοχή, *“αποτελούν την αφηρημένη και θεωρητική γλώσσα”*, *“δε λειτουργούν σαν αφαιρέσεις ξεκινώντας από άλλα πράγματα, αλλά ως νέες κατασκευές που εδραιώνονται χάρη σ’ έναν περίπλοκο σκελετό, ο οποίος αποτελείται από λογικές συνδέσεις”*,<sup>56</sup> όπως η τετραγωνική ρίζα του δύο ( $\sqrt{2}$ ) ή το τετράγωνο της υποτεινούςας.

Οι έννοιες που συγκροτούν τον μαθηματικό λόγο τείνουν να θεωρούνται αποκλειστικά θεωρητικές και χρειάζεται να αποδεικνύεται η εγκυρότητα τους. Επιπρόσθετα, εφόσον δεν αναφέρονται άμεσα σε

<sup>54</sup> Βλ. Χασάπης: σελ. 15-19.

<sup>55</sup> Βλ. Αργυρόπουλος / Βλάμος, κ.α. : σελ. 102.

<sup>56</sup> Βλ. Farouki: σελ.47, 48-53.

αισθητά χαρακτηριστικά ή ιδιότητες, δεν είναι πάντα εμπειρικά επαληθεύσιμες. Οι εμπειρικές έννοιες αντιπροσωπεύουν αντικείμενα αναγνωρίσιμα με άμεσο τρόπο. Είναι ιδέες που προκύπτουν από εμπειρική γενίκευση και μαθαίνονται μέσα από την άμεση σχέση με αντικείμενα τα οποία γίνονται αντιληπτά ή αισθητά, όπως για παράδειγμα η έννοια του αριθμού 2, που γίνεται αντιληπτή παρατηρώντας και μόνο, δύο καρέκλες, δύο τραπέζια κ.τ.λ.. Αντίθετα, η έννοια του ρίζα δύο ( $\sqrt{2}$ ) δεν εξάγεται από κάτι εμπειρικό, δεν μπορεί κάποιος να μετρήσει καρέκλες και να την κατανοήσει, δεν υπάρχει κάτι από που να αποτελεί το αντίστοιχο αυτού του αριθμού. Η δομή αυτής της έννοιας, στο πλαίσιο της νόησης θεωρείται υπερβατική. Για να κατανοηθεί δε, αρκεί μια σχεσιακή προσέγγιση της. Έτσι θα μπορούσε να οριστεί σαν ( $\sqrt{2}$ ), το μήκος της διαγώνιου ενός τετραγώνου με πλευρά μήκους 1, ή καλύτερα το μήκος της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές ίσες με τη μονάδα. Οι εμπειρικές έννοιες έχουν την ικανότητα μόνο να περιγράφουν και φυσικά, οποιοδήποτε είδος γνώσης, δεν βασίζεται αποκλειστικά σ' αυτές. Οι μαθηματικές έννοιες γενικά δεν είναι αποκομμένες από τις εμπειρικές, αλλά αντιθέτως παραμένουν προσκολλημένες και φυσικά είναι απαραίτητες για την απόκτηση της μαθηματικής γνώσης.<sup>57</sup>

Ωστόσο, η σχεσιακή υπόσταση που θίγεται παραπάνω, προσδίδει ένα δομικό τρόπο οργάνωσης των εννοιών, γεγονός που σαφώς στηρίζεται από τις θεωρίες του δομισμού<sup>58</sup> αλλά είναι και ένα νέο χαρακτηριστικό, στο οποίο εμμένει η Γνωστική Επιστήμη και έχει στραφεί μεγάλο μέρος της έρευνας. Εξέχουσας σημασίας είναι η διαδικασία της νοητικής αφαίρεσης που συντελείται κατά το σχηματισμό των εννοιών και για την οποία έγινε ήδη λόγος. Ας διευκρινιστεί όμως, ότι η αφαιρετική αυτή διαδικασία, που πηγάζει μεταξύ άλλων από τις θεωρίες του Piaget, ξεκινά από συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες ή διεργασίες. Εστιάζει σε συγκεκριμένες ιδιότητες ή σχέσεις αυτών, όχι στις ίδιες τις έννοιες και έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας νέας κλάσης εννοιών που έχουν τις συγκεκριμένες ιδιότητες.<sup>59</sup> Ο όλος σχηματισμός μιας έννοιας έχει να κάνει με τη μετάβαση από κάποιες μαθηματικές οντότητες σε μια κλάση ή δομή αυτών, που μέσω της αφαίρεσης προκύπτει σαν αποτέλεσμα ενός ανώτερου επιπέδου σκέψης. Η Sfard (1991)<sup>60</sup> περιγράφει αυτή τη διαδικασία διακρίνοντας τρία στάδια, της εσωτερίκευσης (interiorization),

<sup>57</sup> Στο ίδιο σελ. 57, 275-277.

<sup>58</sup> Βλ. Παυλοπούλου: σελ. 6.

<sup>59</sup> Μεταξάς: σελ. 17.

<sup>60</sup> Βλ. Sfard: σελ.18.

της συμπύκνωσης (condensation) και της υποστασιοποίησης (reification), θεωρώντας αυτά τα στάδια ιεραρχικά. Υπό τη θεωρία της Sfard, πριν από το σχηματισμό μιας μαθηματικής έννοιας υπάρχει μια διεργασία που επενεργεί πάνω σε ήδη γνωστές έννοιες, για την οποία στη συνέχεια αναπτύσσεται η ιδέα να μετατραπεί σε μια αυτόνομη οντότητα και τελικά πραγματοποιείται.<sup>61</sup>

Στο στάδιο της εσωτερίκευσης, ο μαθητής έρχεται σε επαφή με τις διεργασίες από τις οποίες στη συνέχεια θα αναδυθεί η έννοια. Για παράδειγμα η μέτρηση, από την οποία κάλλιστα μεταβαίνει και κατανοεί κάποιος τους φυσικούς αριθμούς, ή η πράξη της αφαίρεσης, από όπου μπορούν να προκύψουν οι αρνητικοί αριθμοί. Οι διεργασίες αυτές εκτελούνται σε απλές ή ήδη γνωστές μαθηματικές έννοιες και το στάδιο αυτό διαρκεί μέχρι ο μαθητής να γίνει επιδέξιος χειριστής τους. Στην περίπτωση των αρνητικών αριθμών, ο μαθητής βρίσκεται στο στάδιο αυτό όταν έχει εξασκηθεί και μπορεί επιδέξια να εκτελεί την πράξη της αφαίρεσης.

Στο στάδιο της συμπύκνωσης, το υποκείμενο γίνεται ολοένα πιο ικανό να σκεφτεί δομικά και να αντιμετωπίσει τη προαναφερθείσα διεργασία σαν κάτι ενιαίο, χωρίς να υπεισέρχεται σε λεπτομέρειες. Στο παράδειγμα των αρνητικών, η συμπύκνωση προσδιορίζεται μέσα από την ικανότητα του μαθητή να συνδυάζει τις ελλοχεύουσες διαδικασίες της αφαίρεσης με άλλες υπολογιστικές πράξεις και έτσι να εκτελεί με ευκολία και πράξεις όπως η πρόσθεση ή ο πολλαπλασιασμός αρνητικών και θετικών αριθμών.

Το στάδιο της υποστασιοποίησης ακολουθεί εφόσον σταδιακά, η νέα έννοια αποκόπτεται νοητικά από τη διαδικασία και ετοιμάζεται να αναδυθεί. Πρόκειται για ένα απότομο άλμα από τη διεργασία που ήταν πίσω από μια έννοια σε μια δομή, σε μια νέα έννοια που προκύπτει από την ενοποίηση των διαφορετικών αναπαραστάσεων της. Στην περίπτωση των αρνητικών, η ικανότητα του μαθητή να τους μεταχειρίζεται σαν υποσύνολο των ακεραίων, χωρίς απαραίτητα να γνωρίζει τη θεωρία των δακτυλίων, είναι μια ένδειξη αυτής της υποστασιοποίησης.

Από πολύ νωρίς, ερωτήματα σχετικά με το πώς σχηματίζονται οι έννοιες στο μυαλό του ανθρώπου αλλά και πως σχετίζονται μεταξύ τους, παρακίνησαν την έρευνα για τη συγκρότηση μιας ολοκληρωμένης θεωρίας. Στην προσπάθεια αυτή, πρωτοστάτησε με το έργο του ο Ελβετός ψυχολόγος Jean Piaget (1896-1980), που αντιμετώπισε το παιδί σα δημιουργό της γνώσης. Προσπάθησε να διακρίνει τα διάφορα

<sup>61</sup> Βλέπε αναλυτικότερα Sfard: σελ. 18-20 αλλά και Μεταξάς: σελ. 22-24.



αναπτυξιακά στάδια των βασικών εννοιών, όπως π.χ. της ποσότητας και του αριθμού, και προσδιόρισε σε ποια περίοδο της ζωής ενός παιδιού αποκτάται η αντίστοιχη εξοικείωση με το κάθε εξελικτικό στάδιο της έννοιας.<sup>62</sup> Ο Piaget ανέλυσε την απόκτηση εννοιών σε τέτοια λογικά στάδια αυξανόμενης αφαίρεσης, στηριζόμενος σε παρατηρήσεις αλλά και πειράματα πάνω σε αυτή την κατηγοριοποίησή του. Φυσικά, όλες αυτές οι θεωρίες περί εννοιών βρήκαν εφαρμογή και έδωσαν ώθηση και στην επιστήμη των υπολογιστών. Από το χώρο αυτό, σύμφωνα με τον Simon (2006),<sup>63</sup> η έννοια προσεγγίζεται ως ένα σύνολο ερεθισμάτων που δέχεται ο εγκέφαλος. Ερεθίσματα, όπως κάποια γεωμετρικά σχέδια πάνω σε χαρτί, που έχουν διαφορετικό σχήμα ( τρίγωνο, τετράγωνο, κύκλος), χρώμα και μέγεθος και συνδυαζόμενα μπορούν να δώσουν μια έννοια, π.χ. «τετράγωνο», «πράσινο τρίγωνο» ή ακόμη και πιο περίπλοκες έννοιες όπως «μεγάλος κύκλος» κ.ο.κ..

Η δυσκολία στην κατανόηση των εννοιών, αλλά και του τρόπου με τον οποίο σχηματίζονται οι θεωρητικές μαθηματικές έννοιες είναι πλέον από τα πιο σοβαρά προβλήματα που αντιμετωπίζει ο κλάδος της Διδακτικής των Μαθηματικών. Οι βιβλιογραφικές αναφορές επί του θέματος, υστερούν στην παρουσίαση μιας ολοκληρωμένης, ενιαίας και συνάμα κατανοητής θεωρίας για τη διαμόρφωση των μαθηματικών εννοιών. Όσον αφορά τη μάθηση, το πρόβλημα της κατανόησης των εννοιών σύμφωνα με πρόσφατες θεωρίες, έγκειται στους ορισμούς μέσω των οποίων αυτές κατακτώνται. Το πρόβλημα αυτό, αντιπροσωπεύει περισσότερο από κάθε άλλο τη σύγκρουση ανάμεσα στη δομή των Μαθηματικών και στις γνωστικές διαδικασίες της κατανόησης μιας έννοιας. Θεωρείται ότι η κατάκτηση μιας έννοιας σημαίνει το σχηματισμό ενός πλαισίου, μιας εικόνας της στη μνήμη. Κάτι, δηλαδή, που δεν είναι πάντα λεκτικό, συνδέεται στο μυαλό με το όνομα της έννοιας και δείχνει να ανήκει στην κατηγορία των αναπαραστάσεων, η οποία θα αναπτυχθεί στη συνέχεια.

### Εννοιολογικές Αλλαγές

*“Οι υπάρχουσες εννοιολογικές δομές δεν είναι στατικές αλλά διαρκώς αλλάζουν καθώς αποκτάται νέα γνώση”.*<sup>64</sup>

<sup>62</sup> Βλ. Κιουστελίδης: σελ. 135-187&189-212 αλλά και Βοσνιάδου, 2004: σελ. 31,32.

<sup>63</sup> Βλ. Simon: σελ. 110.

<sup>64</sup> Βλ. Βοσνιάδου, 1998: σελ. 21.

Η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο σχηματίζονται και αναπαρίστανται οι έννοιες, αλλά και μερικές φορές η φαντασία κάποιου, δεν επαρκεί πάντα για να δοθεί μια απάντηση σε ένα μαθηματικό πρόβλημα. Είναι πολλές οι περιπτώσεις που χρειάστηκε να δημιουργηθούν νέες θεωρίες και έννοιες που να ξεπερνούν τις ήδη υπάρχουσες και να μην είναι απλά συνδυασμοί τους. Ένα τέτοιο είδος «ανατροπής» αποδίδεται με τον ορό «**εννοιολογική αλλαγή**»<sup>65</sup> και χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει τα είδη μάθησης που απαιτούνται για την απόκτηση μιας νέας γνώσης. Ένα είδος μάθησης, που άλλοτε στηρίζεται σε αθροιστικές και συσσωρευτικές διαδικασίες (εμπλουτισμός της γνώσης) και άλλοτε απαιτεί μια ανασύνταξη και αναδόμηση των προηγούμενων γνώσεων. Στη δεύτερη περίπτωση *“οι απαιτούμενες διεργασίες γίνονται πιο πολύπλοκες και χρονοβόρες ενώ είναι δυνατό να εμφανιστούν αδυναμίες στην κατανόηση, λάθη και παρερμηνείες”*.<sup>66</sup>

Η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής αποτελεί ένα μοντέλο, σύμφωνα με το οποίο αποκτώνται οι έννοιες και έχει τις ρίζες της στις επιστημολογικές θεωρίες του Piaget και του Kuhn. Ήρθε στο προσκήνιο από παιδαγωγούς των Φυσικών Επιστημών, που είδαν αναλογίες ανάμεσα στον τρόπο με τον οποίο αντικαθίστανται οι επιστημονικές θεωρίες ιστορικά και στις δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές στην κατανόηση επιστημονικών εννοιών.<sup>67</sup> Έτσι, ως όρος, χαρακτηρίζει τις «επαναστατικές» αλλαγές, παράλληλα όμως προσφέρει γνώση για τις αιτίες που οι μαθητές αντιτίθενται στην αναθεώρηση των εννοιών τους που σχετίζονται με κάποια επιστημονικά φαινόμενα, ακόμη και όταν αυτά έρχονται σε αντιπαράθεση με τις πληροφορίες που εξάγονται από τον αναστοχασμό τους. Για να πραγματοποιηθεί μια εννοιολογική αλλαγή θεωρείται ότι πρέπει να υπάρξει δυσαρέσκεια για την ήδη υπάρχουσα έννοια, ενώ παράλληλα η νέα έννοια που θα προκύψει πρέπει να είναι κατανοητή, αληθοφανής αλλά και αποτελεσματική.<sup>68</sup> Η μελέτη των εννοιολογικών αλλαγών είναι ιδιαίτερα σημαντική για τη Διδακτική των Μαθηματικών, καθώς εξηγεί τον τρόπο με τον οποίο επιτυγχάνεται η κατανόηση μαθηματικών εννοιών, όπως επίσης και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζονται κατά την εκμάθησή τους. Έτσι η αναγνώριση της φύσης, της ύπαρξης αλλά και η κατανόηση των απαιτούμενων εννοιολογικών αλλαγών παίζει καθοριστικό ρόλο, για την απόκτηση βαθύτερης γνώσης των μαθηματικών αντικειμένων.<sup>69</sup>

<sup>65</sup> Για περισσότερες πληροφορίες βλ. Vosniadou / Verhaffel.

<sup>66</sup> Βλ. Βερυκάκη / Καστάνης: σελ. 215.

<sup>67</sup> Βλ. Μεταξάς: σελ. 39.

<sup>68</sup> Βλ. Gill, et al. : σελ 168.

<sup>69</sup> Βλ. Βερυκάκη / Καστάνης: σελ. 215-216.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η έννοια του κλάσματος, που για να συστηματοποιηθεί στο χώρο των Μαθηματικών, χρειάστηκε να γίνουν κατά περιόδους αρκετές δραστικές αλλαγές, υπερβαίνοντας κατά πολύ την εκ των προτέρων αποδεκτή έννοια του φυσικού αριθμού.<sup>70</sup> Εστιάζοντας σε δύο περιόδους, των Ελληνιστικών χρόνων (300 π.Χ.-300 μ.Χ.) και των Αράβων (700-1500μ.Χ.), εντοπίζεται μια εννοιολογική αλλαγή του κλάσματος. Σύμφωνα με τη Σταφυλίδου (2001),<sup>71</sup> το κλάσμα στα Ελληνιστικά χρόνια έχει θέση αλλά όχι ουσιαστική υπόσταση στα μαθηματικά έργα των Ελλήνων. Υπάρχει μια λανθάνουσα, έμμεση αποδοχή ότι τα κοινά κλάσματα αποτελούν αριθμούς, καθώς χρησιμοποιούνται σε μετρήσεις και είναι αποδεκτά ως αποτελέσματα προβλημάτων, αλλά χωρίς να έχουν αναπτυχθεί περαιτέρω ιδιότητες ή πράξεις μεταξύ αυτών. Αντιθέτως οι Άραβες, που ακολουθούν χρονικά, μεταφράζοντας τα κλασικά έργα των Ελλήνων, ασχολούνται σε μεγάλο βαθμό με τη Γεωμετρία και την Άλγεβρα. Μάλιστα την περίοδο αυτή τέθηκαν από τους Άραβες τα θεμέλια της Άλγεβρας και πραγματοποιήθηκε η αριθμητικοποίησή<sup>72</sup> της. Η συχνή αυτή ενασχόληση, τους έφερε αντιμέτωπους με δύσκολους υπολογισμούς ανάμεσα σε κλάσματα που περιλάμβαναν μεγάλους αριθμούς και για τους οποίους χρειαζόταν να ανακαλύψουν νέους αλγορίθμους στην προσπάθεια τους να επιλύσουν τα διάφορα μαθηματικά προβλήματα. Στην κατεύθυνση αυτή πραγματοποιήθηκε η εισαγωγή των δεκαδικών κλασμάτων (κλάσματα όπου ο παρανομαστής τους είναι δύναμη του δέκα), δηλαδή των δεκαδικών αριθμών, όπου πλέον θεωρούνται ως μαθηματικά εργαλεία και έχουν ουσιαστική υπόσταση. Εδώ, η εννοιολογική αλλαγή, είναι φανερό ότι προέκυψε από την αναδιοργάνωση του υποβάθρου των αριθμητικών αναπαραστάσεων και διαδικασιών, όπως και από τις πρακτικές αναγκαιότητες της εποχής.

### **Αναπαράσταση των Γνώσεων**

*“Αν προηγουμένως δεχθήκαμε την ύπαρξη μιας απέραντης ποικιλίας εννοιών, το ερώτημα που τίθεται αμέσως είναι: ποια αξία τους αποδίδουμε; Μπαίνουμε έτσι στον κόσμο της γνώσης.”<sup>73</sup>*

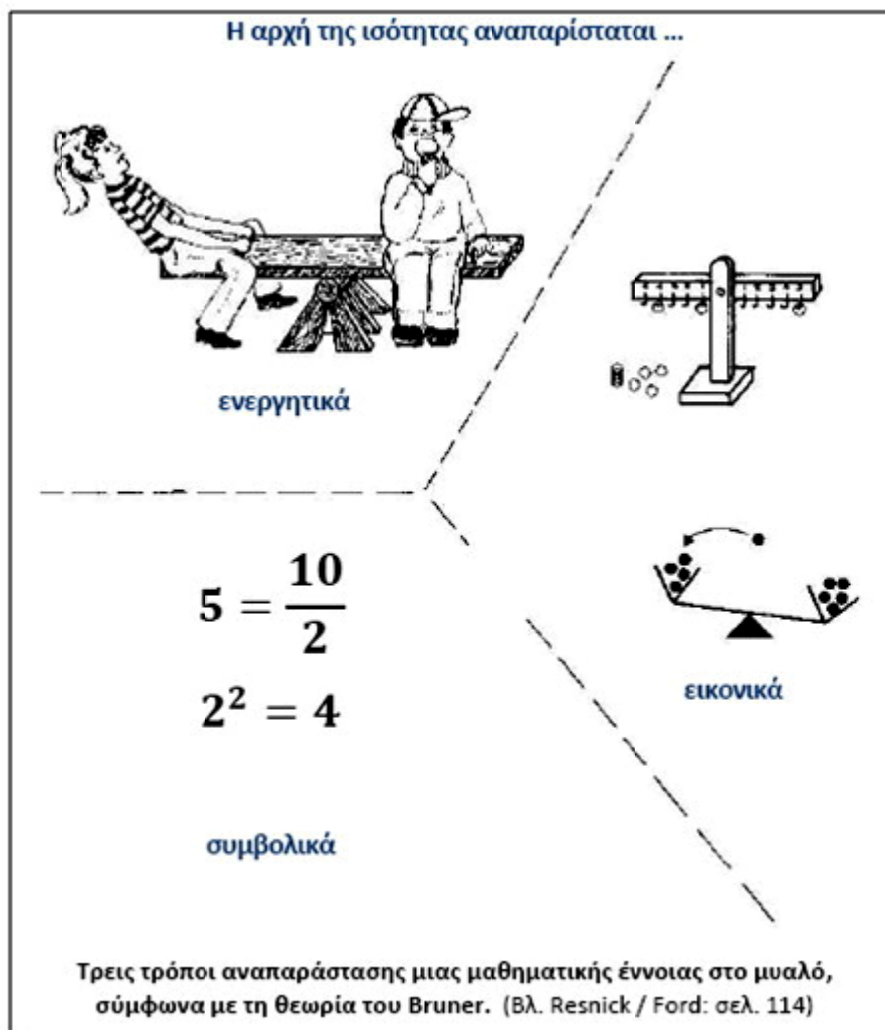
<sup>70</sup> Βλ. Vosniadou / Verhaffel: σελ. 445.

<sup>71</sup> Βλ. Σταφυλίδου: σελ. 41-44, 51-53.

<sup>72</sup> Ο όρος ερμηνεύεται ως εφαρμογή των πράξεων της στοιχειώδους αριθμητικής σε αλγεβρικές εκφράσεις. Βλ. Σταφυλίδου: σελ.43.

<sup>73</sup> Βλ. Farouki: σελ. 22

Έχοντας δει τη γνώση να οργανώνεται σε έννοιες και εννοιολογικές δομές, τίθεται στη συνέχεια το θέμα της αποθήκευσης, λειτουργίας και ανάπτυξης των γνώσεων στην ανθρώπινη μνήμη, εξετάζοντας έτσι την αναπαράσταση των γνώσεων. Ο Piaget θεωρούσε την ικανότητα της αναπαράστασης της πραγματικότητας σημαντική για την ανάπτυξη της σκέψης του παιδιού. Είχε προτείνει τον διαχωρισμό των αναπαραστάσεων σε δύο κατηγορίες, σύμφωνα με τον τρόπο με τον οποίο σχηματίζονται (σύμβολα ή σημάδια), αλλά ασχολήθηκε αμυδρά με τη φύση τους. Στηριζόμενος στις θεωρίες του Piaget, ο J.S. Bruner, κοντά στις αρχές της δεκαετίας του '60, άρχισε να εξετάζει τις γνωστικές διεργασίες των παιδιών και επικεντρώθηκε κυρίως στο πώς αναπαριστούν στο μυαλό τους τις έννοιες και τις μεθόδους που μαθαίνουν. Σύμφωνα με τη θεωρία του Bruner, γίνεται διάκριση των αναπαραστάσεων σε τρεις βασικές κατηγορίες που αναπτύσσονται σε συνάρτηση με την ηλικία του ατόμου και εμφανίζονται με την εξής σειρά: ενεργητικές, εικονικές, συμβολικές.<sup>74</sup>



<sup>74</sup> Βλ. αναλυτικότερα Resnick / Ford: σελ. 111-113, αλλά και Banyard / Hayes: σελ. 21.

Στη συνέχεια, οι ραγδαίες εξελίξεις των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και της Τεχνητής Νοημοσύνης έφεραν το θέμα των αναπαραστάσεων στο κέντρο του ενδιαφέροντος της εκπαιδευτικής κοινότητας. Πλέον, η αναγνώριση της σημασίας των αναπαραστάσεων, στη διαδικασία της μάθησης, είναι μεγάλη. Ο άνθρωπος από πολύ νεαρή ηλικία συναντά και μαθαίνει να χειρίζεται ένα μεγάλο πλήθος αναπαραστάσεων. Ο όρος «αναπαράσταση», αν και ερμηνεύεται ποικιλοτρόπως από τους διάφορους χώρους της ανθρώπινης γνώσης, κυρίως αφορά τον τρόπο με τον οποίο οι γνώσεις, για τον κόσμο, αντιπροσωπεύονται νοητικά στο γνωστικό σύστημα από άλλες γνώσεις. *“Είναι ο τρόπος με τον οποίο ένα άτομο, σε μια δεδομένη κατάσταση, απέναντι σε ένα πρόβλημα, κινητοποιεί με προσωπικό τρόπο τις προηγούμενες γνώσεις του”*.<sup>75</sup> Οι αναπαραστάσεις αναφέρονται στις ιδιότητες και τις σχέσεις που συνιστούν την κάθε έννοια, και θα πρέπει να έχει στο νου του ο μαθητής, όταν τη χρησιμοποιεί. Αναφέρονται, επίσης, στις νοητικές διαδικασίες που ενεργοποιούνται κατά τη χρήση της έννοιας.<sup>76</sup> Για παράδειγμα, στην πρόσθεση δεκαδικών αριθμών, η αναπαράσταση της έννοιας θα πρέπει να περιέχει τη γνώση του δεκαδικού αριθμού –ως έννοια– αλλά και ποια είναι η μορφή του. Ενώ όσον αφορά την κατακόρυφη πρόσθεση δεκαδικών, η αναπαράσταση αυτής της έννοιας είναι απαραίτητο να αναφέρεται στο πώς κάποιος πρέπει να στοιχίσει τους αριθμούς και να προσθέτει τα ομοθέσια ψηφία τους, να τοποθετεί την υποδιαστολή στη σωστή θέση και να προσθέτει το όποιο κρατούμενο προκύπτει στις μονάδες της επόμενης στήλης.

Η κυρίαρχη και πιο πρόσφατη αντίληψη για τον μηχανισμό της μνήμης του ανθρώπου είναι ότι νέες γνώσεις και κατ’ επέκταση νέες έννοιες, αναπαρίστανται και αποθηκεύονται ως εννοιολογικές δομές (θεωρίες, μοντέλα) και ως κατάλληλες διασυνδέσεις<sup>77</sup> διαδικασιών που έχουν την ικανότητα να τις περιγράφουν. Για τις μαθηματικές δομές και έννοιες, θεωρείται ότι η αναπαράσταση αυτή γίνεται μέσω **νοητικών μοντέλων** και **εικόνων**.

Οι νοητικές εικόνες δεν είναι τίποτε περισσότερο από απλές απεικονίσεις. Συχνά ονομαζόμενες και «χωρικές αναπαραστάσεις», υποδηλώνουν ότι το μυαλό σχηματίζει εικόνες από τα εξωτερικά γεγονότα που έρχεται σε επαφή αλλά και ότι πολλές φορές σκέφτεται βάσει αυτών των εικόνων. Παρ’ όλα αυτά, δεν είναι πιστά αντίγραφα

<sup>75</sup> Βλ. Fort: σελ. 19.

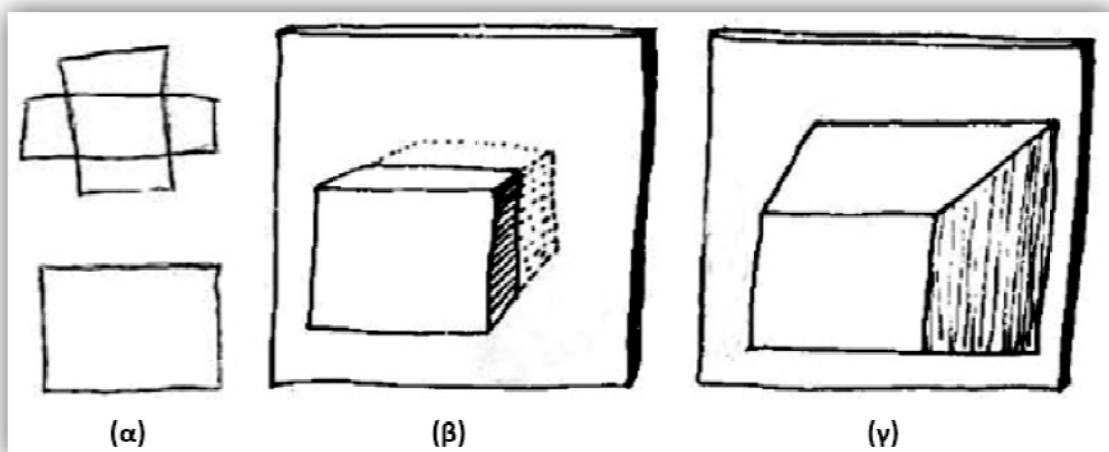
<sup>76</sup> Βλ. Lemeignan / Weil – Barais: σελ. 100.

<sup>77</sup> Βλ. αναλυτικότερα Pepe / Tchoshanov: σελ. 118-127 αλλά και Berliner / Calfee: σελ. 502.

όσων περιγράφουν. Αναπαριστούν ορισμένα από τα χαρακτηριστικά τους και δεν εμπεριέχουν λεπτομέρειες.<sup>78</sup>

Με παρόμοιο τρόπο λειτουργούν και τα νοητικά μοντέλα, με μόνη διαφορά ότι διατηρούν τη δομή αυτού που περιγράφουν. Τα νοητικά μοντέλα είναι κάτι περισσότερο από μια εικόνα, δεν αφορούν μόνο την εικονική αναπαράσταση των γνώσεων αλλά επίσης τον καθορισμό τους και την οργάνωση της μελλοντικής πορείας τους. Σχετίζονται με τις νοητικές εικόνες όσο και με συλλογισμούς ή προτάσεις, που μπορεί να αναπαριστούν τη γνώση και επιτρέπουν την κατασκευή συμπερασμάτων χωρίς τη χρήση κανόνων της λογικής. Θεωρείται ότι οι νοητικές εικόνες είναι μια συγκεκριμένη έκφραση των νοητικών μοντέλων. Η διαδικασία που αναπτύσσεται για να σχηματιστεί η γνώση, μπορεί να αποτελέσει ένα νοητικό μοντέλο, κατά το οποίο μπορεί να αποθηκευτεί στο μυαλό.

Ο τρόπος με τον οποίο κάποιος σχεδιάζει ένα γεωμετρικό σχήμα, αποτελεί αντιπροσωπευτικό παράδειγμα νοητικού μοντέλου. Στην περίπτωση π.χ. του κύβου, είναι εύκολο κανείς να εντοπίσει, τους διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης, που χρησιμοποιεί για το σχεδιασμό, ένα μικρό παιδί από ένα ενήλικα, αλλά και οι ενήλικες μεταξύ τους. Το μικρό παιδί, σχεδιάζει στηριζόμενο στις αντιληπτικές του ικανότητες και μόνο, ενώ ένας μεγαλύτερος σχεδιάζει είτε μιμούμενος τα βιβλία και το δάσκαλο του, είτε ακολουθώντας μια συγκεκριμένη τεχνική. Έτσι, είναι επόμενο το παιδί να σχεδιάσει μια αυθόρμητη διδιάστατη απεικόνιση (π.χ. σχήμα (α)),<sup>79</sup> ένας μεγαλύτερος σχεδιάζει ένα κύβο εφαρμόζοντας την τεχνική της προοπτικής –συνειδητά ή υποσυνείδητα– (π.χ. σχήμα (β)) και κάποιος άλλος, ακολουθώντας την βυζαντινή



<sup>78</sup> Βλ. Ντάβου: σελ.361-364.

<sup>79</sup> Βλ. Bremer / Morse, et al.

τεχνοτροπία, να αναπαριστά τον κύβο χρησιμοποιώντας «αρνητική προοπτική» (π.χ. σχήμα (γ)).<sup>80</sup>

Για να γίνουν πιο αντιληπτές οι αναπαραστάσεις, θα μπορούσε να πει κανείς, εκλαϊκευμένα, ότι πρόκειται για την εσωτερική λάμψη – είτε αυτή είναι σύμβολο, είτε μοντέλο ή διαδικασία – που βλέπει κάποιος όταν έρχεται σε επαφή με μια μαθηματική έννοια. Όπως όταν τον ρωτούν το άθροισμα δύο ψηφίων, που αναπαριστά την πράξη σαν εικόνα στο μυαλό του και απαντά ευθύς αμέσως, χωρίς χαρτί και μολυβί.<sup>81</sup> Τα μαθηματικά σύμβολα, ακόμη και οι γραφικές παραστάσεις, θεωρούνται αναπαραστάσεις, καθώς είναι προϊόντα συλλογισμών πάνω στις πράξεις αλλά και στις έννοιες των Μαθηματικών. Για παράδειγμα η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης, ως μια συνεχόμενη γραμμή που χαράζεται χωρίς να σηκωθεί το μολύβι από το χαρτί, είναι ένας τρόπος με τον οποίο μπορεί να αποθηκευτεί η έννοια της συνεχούς συνάρτησης και να 'ναι αυτή η εικόνα που θα έρχεται στο μυαλό, κάθε φορά που συναντάται.

Είναι όμως δυνατόν, οι αναπαραστάσεις να προωθούν μόνο συμβολικές απεικονίσεις στο μυαλό και η λειτουργία τους να είναι τόσο απλή; Θεωρείται ότι δεν υπάρχουν πάντα «εικονικές» αναπαραστάσεις, όπως πιστευόταν παραδοσιακά. Υποστηρίζεται ότι ο εγκέφαλος κρατά ουσιαστικά μια καταγραφή, κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης του με την εκάστοτε γνώση. Μια καταγραφή, που θεωρείται δομή συνδέσεων και μπορεί να περιγράψει τη γνώση αυτή, έχοντας ακόμη την ικανότητα να διεγείρει συναφείς καταγραφές της. Η όλη διαδικασία, για την παράσταση και αποθήκευση των γνώσεων, ερμηνεύεται πλέον από τη θεωρία της Σημειολογίας.<sup>82</sup> Γυρνώντας έτσι σε ένα εισαγωγικό βιβλίο της Σημειολογίας, εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς το μεγάλο βάρος που δίνεται στην έννοια του κώδικα. Γίνεται αναφορά στους επιστημονικούς κώδικες, κατατάσσοντας σ' αυτούς τόσο τα γεωμετρικά σχήματα όσο και τις γραφικές παραστάσεις που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά. Τονίζεται επίσης, ότι οι κώδικες αυτοί αναπληρώνονται από συμβολικά συστήματα αναπαράστασης.<sup>83</sup> Άρα, μήπως ο τρόπος με τον οποίο αποθηκεύονται οι εννοιολογικές δομές και οι έννοιες με τις αναπαραστάσεις, γίνεται μέσω κάποιας κωδικοποίησης; *“Κωδικοποίηση είναι μια αντιληπτική διαδικασία του ανθρώπινου μυαλού, που καταφέρνει την εσωτερικοποίηση των αισθητήριων πληροφοριών και το*

<sup>80</sup> Βλ. Σκληρής: σελ. 63.

<sup>81</sup> Βλ. Gray / Pinto, et al.: σελ. 122,123.

<sup>82</sup> Βλ. Κιουστελίδης: σελ. 135-138.

<sup>83</sup> Βλ. Guiraud: σελ. 61-67.

μετασχηματισμό τους σε στοιχεία της αντίληψης και της μνήμης”.<sup>84</sup> Ο όρος «καταγραφή» που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως, συμβάλλει σε μια τέτοια εσωτερικοποίηση και αποτελεί μέρος της κωδικοποίησης. Με το ίδιο σκεπτικό, ένα άλλο βιβλίο ερμηνεύει τον όρο των αναπαραστάσεων ως ένα είδος καταχώρησης, όπου ταξινομούνται τα στοιχεία της δομής ή της έννοιας που αναπαριστούν, με τέτοιο τρόπο ώστε εύκολα να την αναπαραγάγουν.<sup>85</sup> Θεωρείται ότι οι γνώσεις που κατέχει ο καθένας, αντιπροσωπεύονται στο γνωστικό του σύστημα από άλλες γνώσεις, που είναι κωδικοποιημένες. Επομένως οι αναπαραστάσεις δεν αποθηκεύουν την κάθε γνώση σαν μια ολότητα, βλέποντας την σαν κάτι ενιαίο, αλλά καταγράφουν στο μυαλό κάποια συγκεκριμένα και ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της. Κάνοντας μια προσεκτική καταχώρηση των σημαντικότερων στοιχείων μιας εννοιολογικής δομής ή μιας έννοιας, που έχουν την ικανότητα να την περιγράψουν και να την ανακαλούν κάθε φορά που ένα άτομο τη συναντά, οι αναπαραστάσεις κωδικοποιούν τη γνώση και υπό αυτήν τη μορφή την αποθηκεύουν.

Μια ιδιαιτερότητα της ανθρώπινης σκέψης είναι η χρήση πολλών συστημάτων αναπαραστάσεων, χάρη στα οποία μια μαθηματική έννοια μπορεί να κωδικοποιηθεί με ένα σχέδιο, ένα σύμβολο ή μια προφορική έκφραση. Εν τούτοις κάθε αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για κάποιες πτυχές της γνώσης, χωρίς να έχει την ικανότητα να την περιγράψει ολοκληρωτικά, αλλά αντίθετα, οι διάφορες αναπαραστάσεις της ίδιας γνώσης αλληλο-συμπληρώνονται.<sup>86</sup> Είναι επίσης σημαντικό να γίνει μια διάκριση ανάμεσα στις εσωτερικές-ψυχολογικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος και έχει να κάνει κυρίως με τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσονται. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις ποικίλουν, από τα καθιερωμένα συμβολικά συστήματα των Μαθηματικών (δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων) ως το περιβάλλον των πιο δομημένων θεωριών (δακτύλιοι, ομάδες). Αντιθέτως, οι εσωτερικές αναπαραστάσεις συμπεριλαμβάνοντας τους συμβολισμούς που χρησιμοποιεί ο καθένας, κυρίως συντάσσουν και προωθούν το νόημα των μαθηματικών εννοιών. Όπως, για παράδειγμα, κάνει η φυσική γλώσσα, η φαντασία, οι ευρετικές και οι διαδικασίες που ακολουθούνται κατά την επίλυση προβλημάτων

<sup>84</sup> Βλ. Δημητρίου: σελ. 166 - Κωδικογράφηση.

<sup>85</sup> Βλ. Heylighen: σελ. 11-12.

<sup>86</sup> Βλ. Πανσιδης: σελ. 54,56.



και (το πιο σημαντικό) ο τρόπος, με τον οποίο αυτές επιδρούν στα Μαθηματικά.<sup>87</sup>

Ωστόσο, ας σημειωθεί ότι το θέμα των αναπαραστάσεων έχει ένα βαθύτερο νόημα στη Διδακτική, καθώς παίζουν καθοριστικό ρόλο στη μάθηση. Η αποστήθιση, και μόνο, ενός ορισμού δεν εγγυάται την κατανόηση της έννοιας. Είναι απαραίτητο να αποδοθεί ένα νόημα στις λέξεις που πλαισιώνουν τον ορισμό της, να βρεθεί, με λίγα λόγια, ο καλύτερος τρόπος με τον οποίο πρέπει να παρουσιαστεί. Οι αναπαραστάσεις, φυσικά, συντελούν σε κάτι τέτοιο. Η κωδικοποίηση που προάγουν ευνοεί την καλύτερη κατανόηση και εκμάθηση των εννοιών. Έτσι, για παράδειγμα, το άκουσμα της λέξης συνάρτηση, μπορεί να ταυτιστεί στο μυαλό κάποιου με την έκφραση « $y = f(x)$ », την νοερή γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ή με κάποιες γνωστές συναρτήσεις και μέσω αυτών να κατανοείται, στο εξής, η έννοια της «συνάρτησης».<sup>88</sup> Είναι γενική η πεποίθηση, ότι οι εξωτερικές αναπαραστάσεις βοηθούν τους μαθητές να συλλάβουν το νόημα των μαθηματικών εννοιών και προωθούν έτσι, μια πολυδιάστατη προσέγγιση στην εξέταση της μάθησης των Μαθηματικών.<sup>89</sup> Στη περίπτωση του μαθηματικού συμβολισμού, αυτό αναδεικνύεται από τον τρόπο που συνδυάζονται μέσω αυτών η έννοια και η διεργασία. Για παράδειγμα, τα σύμβολα  $1+2$  και  $4 \times 6$  έχουν την ιδιότητα να αντιπροσωπεύουν τόσο τη διεργασία της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού – ως έννοιες, όσο και το αποτέλεσμα αυτών των πράξεων (3 και 24 αντίστοιχα). Το σύμβολο  $f(x) = x^2 - 3x$  αντιπροσωπεύει τόσο την έννοια της συνάρτησης για μια γενική τιμή του  $x$ , όσο και τη τιμή αυτής της συνάρτησης για ένα συγκεκριμένο  $x$ . Ο συμβολισμός  $\int \text{συν}x \, dx$  μπορεί να αντιπροσωπεύει τον τρόπο υπολογισμού του ολοκληρώματος για τη συγκεκριμένη συνάρτηση και ταυτόχρονα όλες τις συναρτήσεις που έχουν παράγωγο  $\text{συν}x$  (εφόσον  $\int \text{συν}x \, dx = \eta\mu x + c$  και  $(\eta\mu x + c)' = \text{συν}x$ ,  $\forall$  σταθερά  $c$ ).<sup>90</sup>

## Είδη Γνώσεων

Για να αποφανθεί κάποιος πώς αποκτάται η γνώση, πρέπει να μελετήσει τη λειτουργία και τις διαδικασίες της σκέψης του ανθρώπου κάτι που επιτυγχάνεται, εν μέρει αν κατανοηθεί ο τρόπος με τον οποίο

<sup>87</sup> Βλ. αναλυτικότερα Goldin / Shteingold: σελ. 2.

<sup>88</sup> Βλ. Βαγενά: σελ. 9-16.

<sup>89</sup> Βλ. Παντσίδης: σελ. 53.

<sup>90</sup> Βλ. Μεταξάς: σελ. 18.

σχηματίζονται και αλληλεπιδρούν οι έννοιες, που δομούν τη γνώση. Οι ιδέες αυτές υποστηρίζονται πια τόσο από γνωστικούς ψυχολόγους και ειδικούς της Διδακτικής όσο και από καθηγητές Μαθηματικών και προτείνουν τη διάκριση της μαθηματικής γνώσης σε δύο είδη, στην **εννοιολογική** και τη **διαδικαστική γνώση**. Στη διαφοροποίηση αυτή αναφέρθηκε από πολύ νωρίς ο Skemp<sup>91</sup> το 1976, ο οποίος αντιπαραθέτει την «εννοιολογική» κατανόηση των Μαθηματικών – που στοχεύει στη σύλληψη των εννοιών – απέναντι στην «εργαλειακή» κατανόηση, που συνδέεται με την εκμάθηση των τύπων και των αλγόριθμων που εφαρμόζονται. Δέκα χρόνια αργότερα, ο Hiebert<sup>92</sup> το 1986, συνεχίζει την προσπάθεια του Skemp και επιμελείται ένα ολόκληρο βιβλίο επί του θέματος, επισημαίνοντας, σ' ένα από τα άρθρα του, επίσης καλά τη διαφορά της εννοιολογικής γνώσης από τη διαδικαστική.<sup>93</sup> Η διάκριση αυτή, έγκειται κυρίως στη διαφορά της κατανόησης από την επιδεξιότητα και θεωρείται ότι έχει μεγάλη σημασία για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Οι έννοιες και οι διαδικασίες παίζουν σημαντικό ρόλο στην απόκτηση γνώσεων γενικά, αλλά και τα Μαθηματικά είναι τόσο στενά συνδεδεμένα με αυτά τα δύο είδη γνώσης, που έχουν ανάγκη ένα τέτοιου είδους διαχωρισμό προκειμένου να γίνουν πιο κατανοητά.

Η σημασία δε, όλων αυτών γίνεται ακόμη πιο αντιληπτή αν αναλογιστεί κανείς πόσο σύνηθες είναι το φαινόμενο οι μαθητές να χρησιμοποιούν μαθηματικές διαδικασίες καταλαβαίνοντας λίγο, ή και καθόλου, τις έννοιες που κρύβονται πίσω από αυτές. Στην πραγματικότητα υπάρχουν περιπτώσεις που οι μαθητές δε γνωρίζουν καν ότι υπάρχουν θεμελιώδεις έννοιες στις διαδικασίες που χρησιμοποιούν. Πολλοί δεν καταλαβαίνουν ότι υπάρχει κάποιο νόημα στα Μαθηματικά, πιστεύουν ότι Μαθηματικά είναι άσκοπες ενέργειες και ανούσια σύμβολα, ενώ ο καθένας τους, πολλές φορές και ο δάσκαλος, μαθαίνει Μαθηματικά απομνημονεύοντας μόνο.<sup>94</sup>

Η διαδικαστική γνώση<sup>95</sup> (procedural knowledge), στηρίζεται στη χρήση αλγορίθμων και χαρακτηρίζεται από το συνδυασμό τεχνασμάτων,

<sup>91</sup> Βλ. Skemp. Το πρωτότυπο εκδόθηκε το 1976.

<sup>92</sup> Βλ. Hiebert / Lefevre.

<sup>93</sup> Στο ενδιάμεσο διάστημα, το 1981, ένα ακόμη κείμενο, από τον μαθητή του Skemp, Mellin-Olsen, κινείται στα ίδια πλαίσια και ασχολείται με αυτά τα δύο είδη γνώσης, τονίζοντας ιδιαίτερα τη σημασία της «εργαλειακής», όπως ο ίδιος θεωρεί, γνώσης. Βλ. Mellin-Olsen.

<sup>94</sup> Βλ. Porter / Masingila: σελ. 165.

<sup>95</sup> Ο όρος περιλαμβάνει τις πράξεις, τους τύπους, τα τεχνάσματα και τους κανόνες που ακολουθεί κανείς στην ενασχόλησή του με τα Μαθηματικά. Σε γενικές γραμμές γίνεται αναφορά σε ένα είδος γνώσης που στηρίζεται σε όλα τα παραπάνω, δηλαδή εμμένει στις

μεθόδων και κανόνων που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά. Απαιτεί μια εξοικείωση με τα συστήματα αναπαράστασης των μαθηματικών συμβόλων, αλλά και τη γνώση των κανόνων και τεχνικών που ακολουθούνται στην επίλυση ασκήσεων.<sup>96</sup> Συμπεριλαμβάνει όλα όσα κάνουν κάποιον να χειρίζεται επιδέξια τα Μαθηματικά. Να έχει, δηλαδή, την ικανότητα να εφαρμόζει κάποιους κανόνες με κύριο σκοπό να εξάγει σωστά αποτελέσματα, χωρίς να διεισδύει στον πραγματικό κόσμο των Μαθηματικών και να καταλαβαίνει, αρκεί μόνο να εκτελεί σωστά τις διαδικασίες. Εδώ ο μαθητής ακολουθεί μηχανικά, κατά κάποιον τρόπο, μια αλγοριθμική διαδικασία. Δεν είναι τίποτε περισσότερο από την εφαρμογή «κανόνων χωρίς λόγο», αν και αρκετές φορές η κατάκτηση και η ικανότητα χρησιμοποίησης τους ταυτίζεται με την «κατανόηση», τόσο από μαθητές όσο και δασκάλους.<sup>97</sup>

Με τον όρο εννοιολογική γνώση (conceptual knowledge) χαρακτηρίζεται η γνώση που στηρίζεται στις σχέσεις, ή καλύτερα σε μια σχεσιακή σύνδεση των γνώσεων. Μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας ιστός πληροφοριών, μια εννοιολογική δομή, που αποτελείται από αυτούσιες οντότητες και σχέσεις ανάμεσά τους. Η ανάπτυξη της εννοιολογικής γνώσης κατορθώνεται με την κατασκευή δεσμών ανάμεσα στα στοιχεία μιας γνώσης, που είτε είναι ήδη γνωστά, είτε το ένα προϋπάρχει και το άλλο είναι νεοαποκτηθέν.<sup>98</sup> Δεν είναι επιφανειακή, αλλά εις βάθος γνώση, που στηρίζεται στην κατανόηση των εννοιών, στην αλληλοσύνδεση τους και προάγει την «κατανόηση».<sup>99</sup> Εδώ ο μαθητής γνωρίζει τι κάνει αλλά και γιατί το κάνει, χωρίς να στηρίζεται απλά στην εφαρμογή κανόνων.

Αλήθεια όμως, ποιο απ' τα δύο είδη γνώσεων πρέπει να επιδιώκεται; Η εκμάθηση της διαδικαστικής γνώσης συνήθως επιτυγχάνεται χωρίς να επιμένει κανείς στη σημασία των μαθηματικών εννοιών και απλά εφαρμόζοντας κάποιους τύπους. Είναι δεδομένο ότι πολλοί δάσκαλοι διδάσκουν τα «διαδικαστικά μαθηματικά» και μόνο, άσχετα αν το επιδιώκουν ή όχι. Και αυτό φυσικά γιατί η διαδικαστική γνώση,  
α) αποκτιέται ευκολότερα,

---

διαδικασίες αλλά όχι στο νόημα και τις έννοιες των Μαθηματικών. Αποδίδεται επίσης και ως Εργαλειακή γνώση (instrumental knowledge), βλ. Skemp.

<sup>96</sup> McCormic: σελ. 143.

<sup>97</sup> Βλ. Skemp: σελ. 21,22.

<sup>98</sup> Βλ. Hiebert / Lefevre: σελ. 3,4.

<sup>99</sup> Χρησιμοποιείται ακόμη ο όρος σχεσιακή γνώση (relational knowledge). Γεγονός που αναδεικνύει τη σημαντική αυτή σχεσιακή υπόσταση των εννοιών, που τονίστηκε και σε προηγούμενη παράγραφο. Βλ. Porter / Masingila: σελ. 168 αλλά και Skemp: σελ. 20.

- β) τα αποτελέσματα της είναι άμεσα και εμφανή, ενώ
- γ) εξάγονται πιο γρήγορα και με σιγουριά.

Αντίθετα, η εννοιολογική γνώση απαιτεί περισσότερο χρόνο και μεγαλύτερη προσοχή για την καλύτερη κατανόηση της. Τα «εννοιολογικά μαθηματικά»,

α) είναι περισσότερο προσαρμόσιμα σε νέες καταστάσεις και δεν επιφυλάσσουν λάθη που προέρχονται από την «τυφλή» εφαρμογή τους.

β) Είναι ευκολότερο να τα θυμάται κάποιος.

γ) Τέλος η εννοιολογική γνώση προσφέρει ικανοποίηση στο μαθητή, και ως εκ τούτου παράλληλα προωθεί την περαιτέρω εξερεύνηση και την ανακάλυψη νέων μαθηματικών εννοιών.<sup>100</sup>

Όλα τα παραπάνω, φέρνουν στην πρώτη γραμμή του ενδιαφέροντος και διευκρινίζουν, στην ουσία, δύο όψεις του ίδιου νομίσματος. Τα δύο είδη γνώσεων που αναλύονται, αν και φαινομενικά είναι τόσο ασυμβίβαστα, στην πραγματικότητα συμπληρώνουν το ένα το άλλο και είναι απαραίτητα για την επιστήμη των Μαθηματικών.<sup>101</sup> Ωστόσο, η διάκριση που έγινε είναι πιο σημαντική για την κατανόηση της εννοιολογικής και της διαδικαστικής γνώσης, παρά για την επιλογή ενός εκ των δύο και για το ποια γνώση θα πρέπει να επιδιώκεται από τον καθένα. Ενώ, ακόμη, έχει διπλή σκοπιμότητα καθώς πολλές φορές η διάκριση αυτή βοηθά να κατανοηθούν καλύτερα τα Μαθηματικά.<sup>102</sup>

## Μεταγνώση – Αναστοχασμός

Η Γνωστική Επιστήμη, προσπαθώντας να διεισδύσει, όσο καλύτερα γίνεται, στον τρόπο σκέψης του ανθρώπου, είχε ανάγκη από μια ακόμη υπέρβαση. Το παρασκήνιο των νοητικών διαδικασιών, ανέγγιχτο ως ένα σημείο, αποκτά μεγάλη σημασία για τη Γνωστική Επιστήμη και η εξέτασή του κρίνεται αναπόφευκτη. Σε αυτή την προσπάθεια ένας νέος όρος, αυτός της «μεταγνώσης», υιοθετείται για να ερμηνεύσει τη γνώση που έχει κάποιος για τις γνωστικές του λειτουργίες, την κατανόηση που έχει για το επίπεδο και τις δυνατότητες της σκέψης του, το πώς επεξεργάζεται και δομεί τη γνώση. Ο όρος εισήχθη στην Ψυχολογία στα μέσα της δεκαετίας του '70, προκειμένου να ερμηνεύσει εξελικτικά φαινόμενα στους τρόπους μάθησης και οργάνωσης της γνώσης στη μνήμη.<sup>103</sup> Ενώ στη συνέχεια, κατά τη δεκαετία του '90, επιφορτίζεται το μεγαλύτερο,

<sup>100</sup> Βλ. Skemp: σελ. 27-29.

<sup>101</sup> Βλ. Sfard: σελ.4,5.

<sup>102</sup> Βλ. Byrnes: σελ. 235.

<sup>103</sup> Βλ. Ευκλείδη: σελ. 135.

ίσως, μέρος των προσδοκιών της έρευνας για αποτελεσματική διδασκαλία και μάθηση.<sup>104</sup>

Η μεταγνώση αναφέρεται στο πόσο ενήμερος είναι κανείς για τη γνώση που κατέχει, τους τρόπους που την επεξεργάζεται αλλά και την εικόνα του εαυτού του, τις αδυναμίες και τα ισχυρά του σημεία (θεωρητική διάσταση).<sup>105</sup> Αναφέρεται, επίσης, στους μηχανισμούς παραγωγής της γνώσης, τη γνώση, δηλαδή, που έχει το άτομο για τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να αντλήσει γνώση από το περιβάλλον, να τη συγκρατήσει και να τη χρησιμοποιήσει (πρακτική διάσταση).<sup>106</sup>

Η μεταγνώση αναπτύσσεται μέσω της κινητοποίησης των στρατηγικών μάθησης. Έτσι κάποιος πρέπει να μάθει πώς να αποκτά τη γνώση, να αναζητά την καταλληλότερη πηγή, από όπου μπορεί να αντλήσει πληροφορίες, να διερωτάται, να συζητά και γενικότερα να μάθει να ερευνά αλλά και να οργανώνει τη σκέψη του. Προς αυτή την κατεύθυνση, αντικειμενικοί παράγοντες, που σχετίζονται με την επιστημολογία, την κοινωνιολογία και την ιστορία, διαπλέκονται «παρασκηνιακά» με τη μαθηματική σκέψη αλλά και όσα απορρέουν απ' αυτή, επηρεάζοντας, σαφώς, τη μεταγνώση. Ως εκ τούτου, πέραν της υποκειμενικής επίγνωσης της γνωστικής ικανότητας, υπάρχει φυσικά και η αντικειμενική διάσταση της μεταγνώσης, που οξύνει τη σκέψη και βοηθά στην ορθότητα των συλλογισμών και τη πειστικότητα, που απαιτείται για την «αυτογνωσία» των άλλων δύο διαστάσεων (θεωρητική, πρακτική). Έτσι μεταγνώση θεωρείται, επίσης, το να γνωρίζει κάποιος το λόγο για τον οποίο εκτελεί μια διαδικασία ή το προβληματισμό μέσα από τον οποίο προέκυψε ένα θεώρημα που μελετά, ποιος είναι ο ρόλος των Μαθηματικών στη καθημερινή ζωή ή ποια είναι φύση και τα εργαλεία της μαθηματικής σκέψης. Γνώσεις που σηματοδοτούν τη μαθηματική κουλτούρα και ενθαρρύνουν την καλύτερη θεώρηση και αντιμετώπιση των Μαθηματικών.

Πολλά χρόνια πριν, ο Piaget, θέλοντας να διαχωρίσει τα είδη αφαίρεσης στα οποία στήριζε την εργασία του, είχε εισάγει έναν άλλον όρο, αυτόν του «αναστοχασμού». Διέκρινε έτσι, την «απλή αφαίρεση», που επικεντρώνεται στις έννοιες, όπως γίνεται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και την «αναστοχαστική αφαίρεση» (reflective abstraction),<sup>107</sup> που επικεντρώνεται στις σχέσεις των εννοιών, όπως γίνεται στην

<sup>104</sup> Βλ. Κουτσελίνη-Ιωαννίδου: σελ. 48.

<sup>105</sup> Βλ. Τελλίδου: σελ. 172.

<sup>106</sup> Βλ. Παπαλεοντίου-Λουκά: σελ. 59.

<sup>107</sup> Βλ. περισσότερα Βοσνιάδου, 1995: σελ.18 αλλά και Dubinsky: σελ. 97.

Αριθμητική και στην Άλγεβρα.<sup>108</sup> Παράλληλα κατάφερε, όμως, να περιγράψει σημαντικούς μηχανισμούς μάθησης που προσπαθούν να εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσεται η μαθηματική γνώση. Πλέον, τόσο η μεταγνώση όσο και ο αναστοχασμός, αποδίδοντας στις δύο λέξεις την ίδια σημασία, αναφέρονται στη γνώση ενός ατόμου για τη γνωστική του ικανότητα. Ενώ «αναστοχαστική νοημοσύνη» θεωρείται η *“προσέγγιση στο παρασκήνιο της γνωστικής συμπεριφοράς ενός ανθρώπου και κατά συνέπεια αντιπροσωπεύει μια ψυχολογική διάσταση του μεταγνωστικού υπόβαθρου της μαθηματικής γνώσης”*.<sup>109</sup> Όλοι αυτοί οι όροι, στενά συνδεδεμένοι με το πόσο γνωρίζει, εκτιμά και ρυθμίζει κάποιος τις δυνατότητες του, παρέχουν σημαντικές πληροφορίες για τις διεργασίες της σκέψης, ενώ προϋδεάζουν για το πως, τότε και γιατί πρέπει κάποιος να χρησιμοποιεί γνωστικές μεθόδους.<sup>110</sup>

Τι είναι όμως αυτό που κάνει τη μεταγνώση τόσο σημαντική και ποια η σημασία της στη διδασκαλία; Ο Schoenfeld, από το 1987, αναφέρεται στη μεταγνώση, προκειμένου να αναδείξει τη συμβολή της στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Θεωρεί ότι είναι μια διαδικασία που υποδεικνύει στους μαθητές το πώς πρέπει να σκεφτούν, ώστε να βρουν τον τρόπο που θα μπορούσε να επιλυθεί ή επιλύεται ένα πρόβλημα, καθώς σκέφτονται και συζητούν για τη διαδικασία της επίλυσης.<sup>111</sup> Οι μαθητές θα πρέπει να μάθουν να ελέγχουν και να συντονίζουν τα βήματα και τις διαδικασίες που απαιτούνται για να επιτευχθεί ο στόχος ενός προβλήματος. Αυτός είναι εξάλλου και ένας από τους ρόλους της μεταγνώσης.

Η διδασκαλία που στηρίζεται στην ανάπτυξη των μεταγνωστικών δραστηριοτήτων, βοηθά στην καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, την αποτελεσματικότερη επίλυση μαθηματικών προβλημάτων αλλά και στην γενικότερη αντιμετώπιση των δυσκολιών που προκύπτουν στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Μια τέτοιου είδους διδασκαλία, βοηθά τους μαθητές να ανακαλύπτουν τη γνώση, εφευρίσκοντας τους καταλληλότερους τρόπους να οργανώνουν τη σκέψη τους και να την αυτοκατευθύνουν, εφαρμόζοντας χρήσιμες τεχνικές και διαδικασίες.<sup>112</sup>

Άτομα με μεταγνωστική συμπεριφορά έχουν την ικανότητα να κάνουν συνδέσεις ανάμεσα σε σημαντικά θέματα της ύλης τους και να

<sup>108</sup> Βλ. Wittman: σελ.391.

<sup>109</sup> Βλ. Καστάνη: σελ. 3.

<sup>110</sup> Βλ. Cardelle-Elawar: σελ. 82.

<sup>111</sup> Βλ. Schoenfeld, 1987 (b): σελ. 189-215.

<sup>112</sup> Βλ. Παπαλεοντίου-Λουκά: σελ. 60.

μεταβαίνουν εύκολα από το ένα στο άλλο. Μελετούν έχοντας μια κριτική στάση, εξακριβώνουν τις αβεβαιότητες τους, αντιμετωπίζουν κάθε είδους εξέταση αναπτύσσοντας τις δικές τους στρατηγικές και γενικότερα αισθάνονται πιο αποτελεσματικοί στη μελέτη τους, κυρίως γιατί γνωρίζουν με ποιο τρόπο μπορεί να το επιτύχουν.<sup>113</sup>

Υπάρχουν τρεις τρόποι να μιλήσει κανείς για τη μεταγνώση και αυτοί είναι η μαθηματική γνώση, η γνώση που έχει κάποιος για τον εαυτό του, αλλά και τα πιστεύω ή οι πεποιθήσεις του.<sup>114</sup> Ωστόσο, ακόμη και αν η γνώση προϋπάρχει, αυτό δε συνεπάγεται την κατανόηση των Μαθηματικών,<sup>115</sup> και το γεγονός αυτό αφορά το μεταγνωστικό υπόβαθρο κάποιου. Για παράδειγμα, μαθητές με στοιχειώδεις γνώσεις στα Μαθηματικά, παρατηρείται να λειτουργούν επιπόλαια στην ενασχόληση τους με αυτά. Συνήθως δεν ελέγχουν τα αποτελέσματα που δίνουν, τους υπολογισμούς και τις διαδικασίες που ακολουθούν, απομνημονεύουν θεωρήματα χωρίς να τα κατανοούν, ενώ δεν μπορούν να συντονίσουν τη μελέτη τους για ένα καλύτερο αποτέλεσμα.

Παρακάτω, προκειμένου να αναδειχθεί η συμβολή της μεταγνώσης, παρατίθεται η μελέτη του θεωρήματος του Rolle, αρχικά με ένα τρόπο κλασσικό, έτσι όπως συχνά συναντάται στα βιβλία των Μαθηματικών και έπειτα εφαρμόζοντας τη θεωρία της μεταγνώσης, όπως προτείνεται από μια άλλη εργασία.

---

<sup>113</sup> Βλ. Zan: σελ. 146.

<sup>114</sup> Βλ. Τελλίδου: σελ. 173.

<sup>115</sup> Βλ. Zan: σελ. 143.

Παράδειγμα μελέτης ενός θεωρήματος. (Θεώρημα του Rolle)

α) «κλασσική» προσέγγιση<sup>116</sup>

**ΘΕΩΡΗΜΑ (Rolle)**

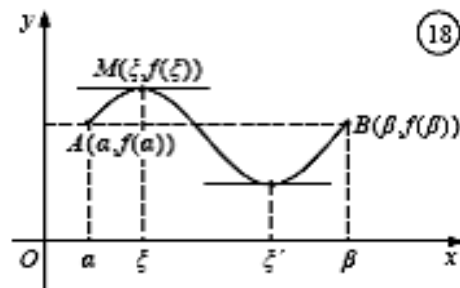
Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(a, \beta)$  και
- $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στον άξονα των  $x$ .



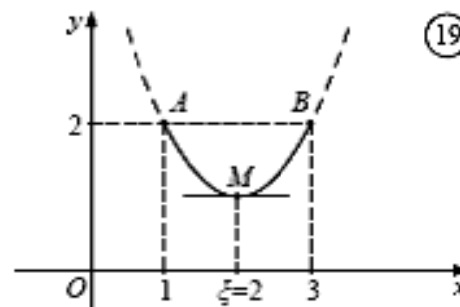
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 5, \quad x \in [1, 3]. \quad (\Sigma\chi. 19)$$

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, 3]$ , παραγωγίσιμη στο  $(1, 3)$ , με  $f'(x) = 2x - 4$  και  $f(1) = 2 = f(3)$ , σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, θα υπάρχει ένας αριθμός  $\xi \in (1, 3)$  τέτοιος, ώστε  $f'(\xi) = 0$ .

Για την εύρεση του αριθμού  $\xi$ , έχουμε:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi - 4 = 0 \Leftrightarrow \xi = 2.$$



<sup>116</sup> Βλ. Ανδρεαδάκης / Κατσαργύρης κ.α.: σελ.246.



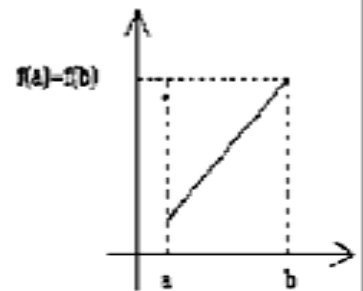
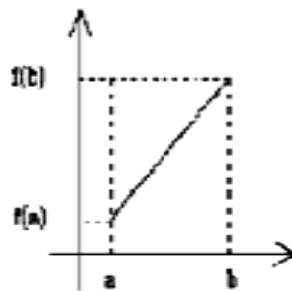
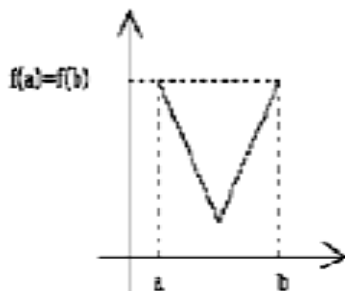
β) εναλλακτική – μεταγνωστική προσέγγιση<sup>117</sup>

Μεταγνωστικός  
προβληματισμός!

Στρατηγική

Εξάσκηση

1. Γράψε την εκφώνηση του θεωρήματος.
2. Ποιές είναι οι προϋποθέσεις; (π.χ. η συνέχεια της  $f$  σ' ένα κλειστό διάστημα..)
3. Ποιό είναι το συμπέρασμα; (π.χ. υπάρχει σημείο όπου η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα των  $x$ )
4. Η υπόθεση: " $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα", είναι απαραίτητη; Γιατί; Τι συμβαίνει αν υποθέσουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής μόνο σε ανοικτό διάστημα;
5. Η υπόθεση: " $f(\alpha) = f(\beta)$ ", είναι απαραίτητη; Γιατί;
6. Η υπόθεση: " $f$  είναι διαφορίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα", είναι απαραίτητη; Γιατί;
7. Σε ποιό βήμα της απόδειξης χρησιμοποιείται η συνέχεια της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ ;
8. Η απόδειξη είναι ευθύς ή γίνεται έμμεσα, δια της ατόπου απαγωγής;
9. Ποιά θεωρήματα, στο μέλλον, χρησιμοποιούν το θεώρημα του Rolle; Ποιά είναι η αξία του θεωρήματος;
10. Εξετάσε τα ακόλουθα γραφήματα. Μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα του Rolle σε αυτές τις περιπτώσεις;



11. Γράψε την απόδειξη του θεωρήματος.

Επιστημολογικές Πεποιθήσεις<sup>118</sup>

Εστιάζοντας στην κατασκευαστική φύση της γνώσης, η μάθηση κυρίως παρουσιάζεται σαν ένα είδος συμπλέγματος που κάνει χρήση θεωριών, εννοιών, μεθόδων, γενικότερα γνώσεων από τη μια και γνωστικών όπως και μεταγνωστικών ικανοτήτων από την άλλη. Η μάθηση δεν παύει, όμως, να είναι μια κοινωνική δραστηριότητα. Έτσι εξαρτάται κι

<sup>117</sup> Βλ. Zan: σελ. 149-150.

<sup>118</sup> Μεταφράζοντας έτσι τον αγγλικό όρο «beliefs», που χρησιμοποιείται εξίσου στο κείμενο του Threlfall.

από παράγοντες που επηρεάζουν τα κίνητρα, τη θέληση ή τη σιγουριά που νιώθει κανείς για τις δυνατότητές του, θεωρώντας, μάλιστα, τη σχέση όλων αυτών των παραγόντων, γνωστικών και μη, αλληλένδετη. Οι πεποιθήσεις τοποθετούνται κάπου ανάμεσα στις γνωστικές και ατομικές διεργασίες<sup>119</sup> και διαμέσου αυτών, γίνεται φανερή η επίδραση των πεποιθήσεων στο πώς μαθαίνει, χρησιμοποιεί ή διδάσκει κάποιος τα Μαθηματικά. Μαθητές αλλά και δάσκαλοι προσεγγίζουν με διαφορετικό τρόπο, σύμφωνα με τις πεποιθήσεις τους, ένα μαθηματικό πρόβλημα, όπως επίσης διαφορετικά επιλέγουν και τις γνωστικές στρατηγικές που χρησιμοποιούν.<sup>120</sup> Ωστόσο οι πεποιθήσεις δεν είναι πάντα ατομικές αλλά κατ' επέκταση αναφέρονται και σε συλλογικότητες ατόμων, διαφοροποιώντας, έτσι, την ιδεολογία που μπορεί να πρεσβεύει, στο σύνολο του, ένα Μαθηματικό Τμήμα ή μια οργάνωση, όπως η Μαθηματική Εταιρεία, ανάλογα με τους στόχους ή τις επιρροές που έχει.

Οι πεποιθήσεις, άρχισαν να εξετάζονται, στις αρχές του περασμένου αιώνα, ως αντικείμενο έρευνας της Κοινωνικής Ψυχολογίας. Εν συνεχεία παραμελήθηκαν, καθώς ο μιχεβιορισμός έστρεψε το ενδιαφέρον στο ψυχολογικό πεδίο και τα άμεσα παρατηρήσιμα μέρη της ανθρώπινης συμπεριφοράς. Επανήλθαν στο προσκήνιο, με τις νέες εξελίξεις της Γνωστικής Επιστήμης, κατά τη δεκαετία του '70, κάτι που επιβεβαιώνεται από πολλές πρόσφατες μελέτες.<sup>121</sup>

Οι κοινωνικοί ψυχολόγοι βλέπουν τις πεποιθήσεις σαν μέρη της γνωστικής ικανότητας, που συγκροτούν το σύνολο της γνώσης ενός ατόμου. Από πλευρά Γνωστικής Ψυχολογίας, όπου δίνεται σημασία στο πώς μαθαίνει και σκέφτεται ο άνθρωπος, οι πεποιθήσεις και η γνώση είναι δύο στενά συνδεδεμένες δομές.<sup>122</sup> Οι πεποιθήσεις επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο αποκτά κανείς τη γνώση, τον τρόπο επικοινωνίας και χειρισμού της μαθηματικής γνώσης, όσο βεβαίως και την κάθε εννοιολογική αλλαγή που είθισται να πραγματοποιείται. Από την πλευρά της Επιστημολογίας, οι πεποιθήσεις συνδέονται με τη φιλοσοφία της κάθε επιστήμης<sup>123</sup> και κατά συνέπεια τη φιλοσοφία του καθενός, που επηρεάζει και διαφοροποιεί τον τρόπο με τον οποίο θα διδάξει.<sup>124</sup> Ένας φορμαλιστής δάσκαλος, που πιστεύει ότι η διδασκαλία των

<sup>119</sup> Βλ. Pehkonen / Törner: σελ.3

<sup>120</sup> Βλ. Op 'T Eynde / De Corte / Verschaffel: σελ. 13-15

<sup>121</sup> Βλ. Conway: σελ. 75-81, 97, αλλά και Leder / Pehkonen / Törner: σελ. 2-3.

<sup>122</sup> Βλ. Op 'T Eynde / De Corte / Verschaffel: σελ. 23.

<sup>123</sup> Βλ. Bromme, 1994: σελ. 74,79.

<sup>124</sup> Βλ. Pehkonen / Törner: σελ.5.

Μαθηματικών είναι πιο αποτελεσματική λύνοντας ασκήσεις, θα διδάσκει επιμένοντας όσο περισσότερο μπορεί στους υπολογισμούς. Ενώ η κοινωνικό-γνωστική διάσταση, ταυτίζει τις πεποιθήσεις με τις αξίες<sup>125</sup> και αναφέρεται στις διαβαθμίσεις αλλά και τις διαφορετικές πλευρές μιας ιδεολογίας. Σύμφωνα με την κοινωνική στάση του καθενός προσλαμβάνεται, παρουσιάζεται και αξιοποιείται διαφορετικά η επιστημονική γνώση. Καθορίζονται με διαφορετικό τρόπο τα στοιχεία που χαρακτηρίζουν την επιστημονική σκέψη, αλλά και οι σημαντικές έννοιες και διαδικασίες που πρέπει να διδαχθούν.

Συνοψίζοντας, οι επιστημολογικές πεποιθήσεις ενός ατόμου συνδέονται στενά με τη γνωστική και μεταγνωστική ικανότητά του, εξαρτώνται από τη μόρφωση του, τις επιδράσεις που δέχτηκε και δέχεται αλλά και από την κοινωνική και ιδεολογική του στάση. Είναι τα νοητικά θεμέλια –ο πνευματικός σκελετός– ενός ατόμου, περιλαμβάνοντας σ' αυτόν τον όρο την ιδεολογία, τις αξίες, τις γνωστικές στάσεις αλλά και το πώς συμπεριφέρεται.<sup>126</sup> Είναι οι προσωπικές οπτικές γωνίες, οι σκοπιές και οι προσεγγίσεις του καθενός. Σχετίζονται με τη στάση που κρατά κανείς στη ζωή, τις επιδράσεις, τις παραδόσεις του περιβάλλοντός του και τις προσδοκίες του.

Ωστόσο, οι λόγοι που ένα άτομο καταλήγει να έχει μια πεποίθηση είναι υποκειμενικοί, κατά κανόνα υποσυνείδητοι και σχετίζονται με τις εμπειρίες του.<sup>127</sup> Επηρεάζονται όμως πολύ κι από το άμεσο περιβάλλον, τις φιλοδοξίες και προοπτικές του καθενός, γι' αυτό εξάλλου διαφέρουν και από άτομο σε άτομο.

Όσον αφορά τις επιστημολογικές πεποιθήσεις των δασκάλων, θεωρείται ότι είναι *“θεμελιώδεις παραδοχές σχετικά με τη φύση της γνώσης και της μάθησης ενώ ταυτόχρονα περιέχουν πληροφορίες για τα όρια, τη βεβαιότητα και τα κριτήρια της μάθησης”*.<sup>128</sup> Πρεσβεύουν ατομικές απόψεις ή θεωρίες γύρω από τη μαθηματική γνώση και το πώς κανείς την αποκτά. Αφορούν τα επιστημολογικά θεμέλια των Μαθηματικών, την εκπαίδευσή τους, καθώς και την κάθε είδους γνώση ή ανθρώπινη δραστηριότητα που συμβάλλει σε όλα τα παραπάνω, ενώ παράλληλα παίζουν, άμεσα ή έμμεσα,<sup>129</sup> σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της συμπεριφοράς του εκπαιδευτικού μέσα στην τάξη.

<sup>125</sup> Βλ. Op 'T Eynde / De Corte / Verschaffel: σελ. 30

<sup>126</sup> Βλ. Törner: σελ.74, 76, 78-79.

<sup>127</sup> Βλ. Pehkonen / Törner: σελ. 7, όπως επίσης και Κοκοσάρη: σελ. 8, 11.

<sup>128</sup> Βλ. Κοκοσάρη: σελ.11.

<sup>129</sup> Βλ. De Corte / Greer / Verrschaffel: σελ. 520.

Οι μαθηματικές πεποιθήσεις αναφέρονται κυρίως α) στη σταθερότητα της γνώσης, που κυμαίνεται από αμετάβλητη μέχρι αβέβαιη, β) στη δομή της γνώσης, που άλλοτε είναι αμιγής και άλλοτε αποτελείται από μικρά τμήματα, γ) στην προέλευσή της (φύση), δ) στην ταχύτητα της μάθησης αλλά και ε) στην ικανότητα μάθησης, που άλλοτε θεωρείται έμφυτη και άλλοτε σταδιακά βελτιώσιμη.<sup>130</sup> Υπάρχουν πεποιθήσεις και απόψεις γύρω από το πώς θεμελιώνονται οι μαθηματικές αλήθειες, σχετικές με τη μαθηματική εγκυρότητα, τις μεθόδους και τις ευρετικές που χρησιμοποιούνται, όπως επίσης και για τα φιλοσοφικά ζητήματα των Μαθηματικών. Άλλες που αφορούν το πώς μαθαίνει κανείς Μαθηματικά (μαθησιακή διαδικασία), πώς θα πρέπει να διδάσκονται αλλά και ποια η συμβολή της Ψυχολογίας σε αυτό (Διδακτική των Μαθηματικών).<sup>131</sup>

Για παράδειγμα, δάσκαλοι με πεποιθήσεις που συγκλίνουν στο να δίνουν στους μαθητές τη δυνατότητα να αποκτήσουν αυτοπεποίθηση στα Μαθηματικά, ενστερνίζονται έναν «κονστρουκτιβιστικό» προσανατολισμό για τη μάθηση και τη διδακτική των Μαθηματικών. Θεωρούν ότι είναι ευνοϊκό να δημιουργούνται προβληματικές καταστάσεις για τους μαθητές και η γνώση να οικοδομείται πάνω στις εμπειρίες τους, καθώς διευρύνεται έτσι μέσα από ενδιαφέρουσες γι' αυτούς διαδικασίες. Άλλες πάλι πεποιθήσεις, όπως ότι τα Μαθηματικά είναι στατική και αμετάβλητη γνώση με αντικειμενική αλήθεια, ανήκουν σε δασκάλους που πιστεύουν ότι ο ρόλος τους είναι η μετάδοση της γνώσης, ότι τα Μαθηματικά είναι υπολογισμοί και απομνημόνευση και ότι κάθε πρόβλημα λύνεται πάντα, γρήγορα και σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.<sup>132</sup>

Ως επί το πλείστον όμως, οι επιστημολογικές πεποιθήσεις, αν και δεν απαριθμούνται εύκολα καθώς ποικίλουν, κατατάσσονται κατά κύριο λόγο σε αυτές της «απολυτοκρατικής» και «μη απολυτοκρατικής»<sup>133</sup> θεωρίας. Στην πρώτη κατηγορία ανήκει και η επικρατέστερη θεωρία του πλατωνισμού, που θέλει τη μαθηματική δραστηριότητα να συνίσταται από την ανακάλυψη διαχρονικών αληθειών. Εδώ, οι μαθηματικές γνώσεις θεωρούνται ως αντικείμενα που υπάρχουν ανεξάρτητα του ανθρώπου. Σε αντιδιαστολή αυτών, για τη «μη απολυτοκρατική» φιλοσοφία των

<sup>130</sup> Βλ. Κοκοσάρη: σελ. 13.

<sup>131</sup> Βλ. Goldin: σελ.39-40.

<sup>132</sup> Βλ. Μπαρκάτσας / Καραγεωργός / Χιονίδου: σελ. 166.

<sup>133</sup> Βλ. Threlfall.

Μαθηματικών η μαθηματική αλήθεια μπορεί να διαψευσθεί και φυσικά επιδέχεται διορθώσεις.

Όσον αφορά τώρα τις πεποιθήσεις των δασκάλων που προσεγγίζουν τη μια ή την άλλη θεωρία, υποστηρίζεται ότι όταν ένας δάσκαλος υιοθετεί την απολυτοκρατική θεώρηση των Μαθηματικών, τότε η διδασκαλία του χαρακτηρίζεται από μία σαφή και συνεκτική παρουσίαση του περιεχομένου (συμπεριφοριστική προσέγγιση). Επικεντρώνεται στην εξάσκηση και επίλυση ασκήσεων, δίνει έμφαση στο «περιεχόμενο» και αποθαρρύνει παράλληλα το διάλογο μέσα στην αίθουσα, χωρίς να αναδεικνύει έναν τρόπο μάθησης των Μαθηματικών. Αντίθετα, οι μη απολυτοκρατικές θεωρίες προσδίδουν στη διδασκαλία μια εποικοδομητική προσέγγιση των Μαθηματικών που στηρίζεται στην αυτοανακάλυψη του περιεχομένου. Σ' αυτή την περίπτωση το αντικείμενο της διδασκαλίας γίνεται κατανοητό μέσα από παραδείγματα και προβλήματα, δίνοντας έμφαση στη «διαδικασία» αλλά και στο «διάλογο».

Βέβαια, οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών είναι κοινά αποδεκτό ότι επηρεάζουν τις πεποιθήσεις των μαθητών, όπως φυσικά και την απόδοσή τους στο συγκεκριμένο μάθημα. Για παράδειγμα, ένας δάσκαλος που δεν τρέφει ιδιαίτερο ενθουσιασμό για το αντικείμενό του, ξοδεύει ελάχιστο χρόνο στη διδασκαλία και είναι πιθανό να διδάσκει παθητικά, χωρίς ενθουσιασμό και χωρίς να θέτει υψηλούς στόχους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, οι αντιλήψεις του να μεταφέρονται στους μαθητές και οι ίδιοι, στη συνέχεια, να αντιμετωπίζουν τα Μαθηματικά με παρόμοιο τρόπο. Ένας άλλος δάσκαλος μπορεί να είναι «φορμαλιστής» και η γνώση του όσο και η διδασκαλία του να στηρίζονται, στο μεγαλύτερο μέρος, σε επιδέξιους χειρισμούς τύπων ή αλγορίθμων που επιφέρουν το σωστό αποτέλεσμα. Στην περίπτωση αυτή, οι μαθητές του *“αποκτούν την πεποίθηση ότι τα σχολικά Μαθηματικά δεν είναι άλλο παρά χειρισμοί μαθηματικών τύπων και τυποποιημένες διαδικασίες, χωρίς καμία σχέση με την πραγματική ζωή, την ανακάλυψη και τη λύση προβλημάτων”* ενώ *“συμπεριφέρονται, κατά κανόνα, μηχανιστικά και αναπτύσσουν μια απωθητική ή παθητική στάση για τα Μαθηματικά”*.<sup>134</sup>

Η σημαντικότητα της διατήρησης των πεποιθήσεων ή ακόμη και η αναθεώρησή τους, είναι αντικείμενο έρευνας πολλών εργασιών που γίνονται αυτές τις μέρες, τα αποτελέσματα των οποίων συγκλίνουν σε μια

<sup>134</sup> Βλ. Καστάνη: σελ. 4.

κατασκευαστική ανάπτυξη των μαθηματικών γνώσεων.<sup>135</sup> Ωστόσο, τόσο η θεωρία της «εννοιολογικής αλλαγής» όσο και ο αναστοχασμός<sup>136</sup> των δασκάλων προσφέρονται ως μοντέλο για την αλλαγή ή καλύτερα, την αναθεώρηση των πεποιθήσεών, προκειμένου να επιτευχθεί η αποτελεσματικότερη διδασκαλία των Μαθηματικών. Θεωρείται ότι μέσω της εννοιολογικής αλλαγής μπορεί να προωθηθεί μια δυσαρέσκεια, τόσο στους μαθητές όσο και στους δασκάλους, για τις έννοιες που ήδη υπάρχουν. Καταφέρνοντας έτσι να πεισθούν για την κατανόηση και τη λειτουργικότητα μιας νέας έννοιας που πρέπει να ορίσουν και να «αναγκαστούν» να επαναπροσδιορίσουν τις πεποιθήσεις και γενικότερα τα «πιστεύω» τους.<sup>137</sup>

---

<sup>135</sup> Βλ. Gill, et al. : σελ.167, Μπαρκάτσας κ.α.: σελ.163

<sup>136</sup> Βλ. Μπαρκάτσας κ.α.: σελ. 170.

<sup>137</sup> Βλ. Gill, et al. : σελ. 168.

## Επίλογος

Παίρνοντας ως αφορμή τις σχετικές επισημάνσεις που γίνονται στο μάθημα της Διδακτικής των Μαθηματικών από τη μια και την απουσία μιας αναλυτικής παρουσίασης του θέματος στις αντίστοιχες διδακτικές σημειώσεις<sup>138</sup> από την άλλη, η εργασία προσπαθεί να εξερευνήσει την επίδραση της Γνωστικής Επιστήμης στη Μαθηματική Παιδεία. Το ενδιαφέρον παρακινήθηκε όταν η αναζήτηση σχετικών πληροφοριών σε μελέτες και βιβλία δεν καρποφόρησε στο σύνολο της ελληνικής βιβλιογραφίας. Οι νύξεις επί του θέματος δε λείπουν από αρκετά βιβλία της Διδακτικής των Μαθηματικών αλλά αποτελούν «ψιλά γράμματα», αν διαπιστώσει κανείς την αξιόλογη διάδοση που έχει η Γνωστική Ψυχολογία στον ελληνικό ακαδημαϊκό χώρο.

Η έλλειψη αυτή προωθεί την περαιτέρω διερεύνηση με τη βοήθεια μιας ευρύτερης βιβλιογραφικής στήριξης, που στην προκειμένη περίπτωση αποβαίνει καταλυτική. Αξιοποιώντας την ξένη βιβλιογραφία επιχειρήθηκε μια προσέγγιση των Μαθηματικών τόσο από τη σκοπιά της Γνωστικής Ψυχολογίας όσο κι από αυτήν της Γνωστικής Επιστημολογίας, ξεπερνώντας έτσι την αδυναμία των ελληνικών πηγών πάνω στα επιστημολογικά θέματα.

Έτσι, επισημάνθηκαν οι βασικές συνιστώσες της γνωστικής προσέγγισης, δηλαδή η εννοιολογική οργάνωση της σκέψης, οι εννοιολογικές αλλαγές, η αναπαράσταση και τα είδη των γνώσεων, η μεταγνώση και τέλος οι επιστημολογικές πεποιθήσεις. Βασική επιδίωξη ήταν ο εμπλουτισμός των εισαγωγικών γνώσεων του αναγνώστη για τη Γνωστική Επιστήμη στο πλαίσιο της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Από τη διείσδυση αυτή φάνηκε, επίσης, ότι η κεντρική θέση της εννοιολογικής υποδομής του μαθηματικού τρόπου σκέψης, αναδεικνύει τις έννοιες ως ένα από τα ισχυρότερα θεμέλια των γνωστικών διεργασιών. Αξίζει δε να σημειωθεί η έμφαση που δίνει σε αυτό το ζήτημα η πρόσφατη δημοσίευση του βιβλίου "*The Cognitive Structure of Scientific Revolutions*",<sup>139</sup> το οποίο παρουσιάζει μια πιο σαφή εικόνα της

<sup>138</sup> Μόνο μια μικρή αναφορά υπήρχε, βλ. Οικονόμου.

<sup>139</sup> Andersen, H. / Barker, P. / Chen, X.: *The Cognitive Structure of Scientific Revolutions*. Cambridge University Press, 2006.

επιστήμης, στηριζόμενο σε μεγάλο βαθμό τόσο στον παράγοντα των εννοιών όσο και στις εννοιολογικές αλλαγές, κάνοντας επίσης νύξη στη γνωστική προσέγγιση της Ιστορίας.<sup>140</sup>

Όσον αφορά την περαιτέρω διερεύνηση του θέματος, θεωρείται ότι ένας προβληματισμός γύρω από το πότε και γιατί εμφανίστηκε η Γνωστική Επιστήμη, θα ήταν αρκετά γόνιμος για το εισαγωγικό αυτό μέρος της γνωστικής προσέγγισης των Μαθηματικών. Θεωρώντας, άξιο αναφοράς να φωτιστεί η αναγκαιότητα της εμφάνισης της νέας αυτής επιστήμης όπως και τα ρεύματα που ενίσχυσαν ή εμπόδισαν και γιατί τη διάδοσή της.

---

<sup>140</sup> Μια ακόμη διάσταση της Γνωστικής Επιστήμης, που συγκεντρώνει μεγάλο επιστημονικό ενδιαφέρον και υποστηρίζεται από αρκετούς ερευνητές, όπως ο Netz –που αναφέρθηκε στην εισαγωγή– αλλά και η Nersessian. Βλ. ενδεικτικά 1) Kurz-Milcke, E. / Nersessian, N. / Newstetter, W.: What Has History to Do with Cognition? Interactive Methods for Studying Research Laboratories. *Journal of Cognition and Culture* 4.3-4, 2004. σελ. 663-700. 2) Nersessian, N.J.: Opening the Black Box: Cognitive Science and History of Science. *Osiris*, 2<sup>nd</sup> series, vol 10, Constructing Knowledge in the History of Science. 1995, σελ. 194-211.



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### ➤ Ελληνική

- Ανδρεαδάκης, Στ. / Κατσαργύρης, Β. / Μέτης, Σ. κ.ά.: *Μαθηματικά, Γ' τάξης Ενιαίου Λυκείου, Θετική Κατεύθυνση*. Ο.Ε.Δ.Β., 1999.
- Αργυρόπουλος, Η. / Βλάμος, Π. κ.ά.: *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου*. Ο.Ε.Δ.Β., 2005.
- Βαγενά, Δ.: *Δυσκολίες στην κατανόηση εννοιών στο μάθημα του Απειροστικού Λογισμού*. Διπλωματική εργασία, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2004.  
[http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl\\_vagena.pdf](http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_vagena.pdf) (14-3-2007)
- Banyard, P. / Hayes, N.: *Σκέψη και Λύση Προβλημάτων*. Ελληνικά Γράμματα, 1994.
- Βερυκάκη, Α. / Καστάνης, Ν.: *Εννοιολογικές Αλλαγές: Μια Αναβάθμιση του Διδακτικού Ρόλου της Ιστορίας των Μαθηματικών*. Στο βιβλίο Θωμαΐδης Γ. / Καστάνης Ν. / Τζανάκης Κ. (επιμ.): *Ιστορία & Μαθηματική Εκπαίδευση*. Πρακτικά Διημερίδας, εκδ. Ζήτη, 2006, σελ. 213-232.
- Βοσνιάδου, Σ.: *Γνωσιακή Ψυχολογία*. Αθήνα: Gutenberg Ψυχολογία, 1998.
- Βοσνιάδου, Σ.: *Γνωσιακή Επιστήμη. Η νέα επιστήμη του νου*. Αθήνα: Gutenberg Ψυχολογία, 2004.
- Βοσνιάδου, Σ.: *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg Ψυχολογία, 1995.
- Ganascia, J-G.: *Οι Γνωσιακές Επιστήμες*. Εκδ. Π.Τραυλός – Ε. Κωσταράκη, 1998.
- Guiraud, P.: *Η Σημειολογία*. Εκδ. Ιωαν. Ν. Ζαχαροπούλου, 1975.
- Δημητρίου, Σ.: *Λεξικό Όρων. Κυβερνητικής, δομισμού και της θεωρίας των συστημάτων*. Εκδ. Καστανιώτη, 1987. Τόμος V.
- Ευκλείδη, Α.: *Γνωστική Ψυχολογία*. Εκδ. Art of text, 1992.
- Ευκλείδη, Α. / Δημητρίου, Α. / Μωυσιάδης, Π. / Μαρκέτος, Α.: *Γνωστικές ικανότητες και μαθηματικές επιδόσεις σε μαθητές Πρώτης και Δευτέρας Γυμνασίου*. *Ψυχολογία*, τόμος 1, τεύχος 1, σελ.11-29, 1992.
- Καλδρυμίδου, Μ.: *Γνωστικά και επιστημολογικά χαρακτηριστικά της διαδικασίας γενίκευσης στα σχολικά μαθηματικά*. Στο βιβλίο, *Πρακτικά 2<sup>ης</sup> Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*. Ρέθυμνο: Πανεπιστήμιο Κρήτης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, 2000. σελ.245-253.

- Καστάνη, Ν.: *Η Ιστορία των Μαθηματικών ως Συνιστώσα του Μεταγνωστικού Υποβάθρου των Δασκάλων του Σχετικού Μαθήματος*.  
<http://users.auth.gr/~nioka/Files/I ISTORIA TON MATH OS-2.pdf>  
 (14-3-2007)
- Κιουστελίδης, Ι. Β.: *Ο Μηχανισμός της Νόησης. Εξελικτικές πλευρές της σκέψης και της φύσης των εννοιών*. Εκδ. Παπασωτηρίου, 2002.
- Κοκοσάρη, Χ.: *Οι Επιστημολογικές Πεποιθήσεις των Εκπαιδευτικών και ο Ρόλος τους στη Διδακτική Πράξη*. Διπλωματική εργασία, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2006.  
[http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl\\_kokosari.pdf](http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_kokosari.pdf) (14-3-2007)
- Κολέζα, Ε.: *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Leader Books, 2000.
- Κουτσελίνη-Ιωαννίδου, Μ.: *Μεταγνώση: Η έννοια και η διδασκαλία της*. *Νέα Παιδεία*, 74, 1992. σελ. 48-55.
- Lemeignan, G. / Weil-Barais, A.: *Η οικοδόμηση των εννοιών στη Φυσική. Η διδασκαλία της Μηχανικής*. Αθήνα: Εκδ. Τυποθύτω, 1997.
- Μεταξάς, Ν.: *Η Δυσκολία κατανόησης του ορισμού του αόριστου ολοκληρώματος – Ανάλυση μέσα από διάφορα θεωρητικά πλαίσια*. Διπλωματική εργασία, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2006. σελ. 39.  
[http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl\\_metaxas.pdf](http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_metaxas.pdf) (14-3-2007)
- Μπαρκάτσας, Ν.Α. / Καραγεωργός, Δ. / Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ.: *Οι Πεποιθήσεις των Καθηγητών των Μαθηματικών για τη Διδακτικό-Μαθησιακή Διαδικασία: Μερικές διαστάσεις της συμβολής τους στο μαθηματικό (αν)αλφαριθμητισμό. Πρακτικά 18<sup>ου</sup> Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*. σελ. 162-171.
- Ντάβου, Μ.: *Οι διεργασίες της σκέψης στην εποχή της πληροφορίας. Θέματα Γνωστικής Ψυχολογίας και Επικοινωνίας*. Αθήνα: Εκδ. Παπαζήση, 2000.
- Οικονόμου, Α.: *Γνωστική Ψυχολογία και Διδακτική Μαθηματικών: Η Περίπτωση του Εμπειρικού-Βιωματικού Δομισμού*. Στο βιβλίο, Καλαβάσης, Φ. / Μειμάρης, Μ. (επιμ.): *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών III, Διδακτική Μαθηματικών και Νέες Τεχνολογίες*. Αθήνα: εκδ. Gutenberg, 1997. σελ.259-273.
- Παντσιδής, Χ.: *Ο Ρόλος των Αναπαραστάσεων στην Κατανόηση των Κλασμάτων*. Διπλωματική εργασία, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2006.  
[http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl\\_pantsidis.pdf](http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_pantsidis.pdf) (14-3-2007)
- Παπαδόπουλος, Ν.Γ.: *Λεξικό της Ψυχολογίας*. Εκδ. Σύγχρονη Εκδοτική, 2005.

- Παπαλεοντίου-Λουκά, Ε.: Μεταγνώση: Η έννοια και η διδασκαλία της. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 127, 2002. σελ. 59-64.
- Πατρώνης, Τ. / Σπανός, Δ.: *Σύγχρονες Θεωρήσεις και Έρευνες στη Μαθηματική Παιδεία*. Εκδ. Γ. Α. Πνευματικού, 1996.
- Παυλοπούλου, Σ.: *Δομισμός– Bourbaki – Μπουρμπακισμός*. Ειδικό Θέμα, Τμήμα Μαθηματικών, Α.Π.Θ., 2002.  
[http://users.auth.gr/~nioka/Files/Eidiko\\_Thema\\_2002\\_Paulopoulou.pdf](http://users.auth.gr/~nioka/Files/Eidiko_Thema_2002_Paulopoulou.pdf) (14-3-2007)
- Simon, A.S.: *Οι Επιστήμες του Τεχνητού*. Εκδ. Επίκεντρο, 2006.
- Skemp, R.: Εννοιολογική και Εργαλειακή Κατανόηση. *Ευκλείδης Γ'*, Τόμος 13, Τεύχος 46, σελ. 17-35, 1996.
- Σκληρής, π.Σ.: *Εν Εσόπτρω. Εικονολογικά μελετήματα*. Αθήνα: Εκδ. Μ.Π. Γρηγόρης, 1992.
- Σταφυλίδου, Σ.: *Μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες μάθησης: Η Ανάπτυξη της Έννοιας του Κλάσματος*. Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μ.Ι.Θ.Ε., Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2001.
- Stillings, N.A. / Weisler S.E. / Chase C.H. / Feinstein M.H. / Garfield J.L. / Rissland E.D.: *Εισαγωγή στη Γνωσιοεπιστήμη*. Αθήνα: Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, 2002.
- Stones, E.: *Εισαγωγή στη Παιδαγωγική Ψυχολογία*. Εκδ. Γρηγόρη, 1978.
- Τελλίδου, Θ.: Χρήση Μεταγνωστικών Στρατηγικών κατά τη Διδακτική Διαδικασία των Μαθηματικών. *Πρακτικά 3<sup>ης</sup> Διημερίδας Διδακτικής των Μαθηματικών*. Ρέθυμνο 2003. σελ. 172-179.
- Threlfall, J.: *Απολυτοκρατική ή Μη Απολυτοκρατική Φιλοσοφία των Μαθηματικών – Ποια διαφορά συνεπάγεται για τη διδακτική πράξη;*  
<http://users.auth.gr/~dchassap/ikdme/Thelf.GR.pdf> (14-3-2007)
- Τουμάσης, Μ.: *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg, 1994.
- Farouki, N.: *Πίστη και Λογική. Η ιστορία μιας παρεξήγησης*. Εκδ. Π. Τραύλος – Ε. Κωσταράκη, 1997.
- Fort, M.: Κοντροκτιβισμός: Από το Μαθησιακό στο Παιδαγωγικό Μοντέλο. Στο βιβλίο Καλαβάση, Φρ. / Μειϊμάρη, Μ. (επιμ.): *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών*. Εκδ. Προτάσεις, 1992, σελ. 351-368.
- Χασάπης, Δ.: *Διδακτική Βασικών Μαθηματικών Εννοιών. Αριθμοί και αριθμητικές πράξεις*. Μεταίχμιο, 2000.
- Hayes, N.: *Εισαγωγή στην Ψυχολογία*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα, 1998.
- Χοντουλάκη, Α. / Πατεράκη Λ.: *Σύντομο Ερμηνευτικό Λεξικό Ψυχολογικών Όρων*. Εκδ. Δωδώνη, 1989. Γνωστική ψυχολογία, σελ. 70.

➤ **Ξενόγλωσση**

- Bromme, R.: Beyond Subject Matter: A Psychological Topology of Teachers' Professional Knowledge. Στο βιβλίο, Biehler, R. / Scholz, W.R. / Sträßer, R. / Winkelmann, B. (eds.): *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Kluwer Academic Publishers, 1994, σελ. 73-88.
- Bromme, R.: Thinking and Knowing about Knowledge. Στο βιβλίο, Hoffmann, M. / Lenhard, J. / Seeger, F. (eds.): *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education*. Springer, 2005, σελ.191-201.
- Byrnes, P.J.: The Conceptual Basis of Procedural Learning. *Cognitive Development*, 7, σελ. 235-257, 1992.
- Cardelle - Elawar, M.: Effects of Metacognitive Instruction on Low Achievers in Mathematics Problems. *Teaching & Teacher Education*, Vol.11, No. 1, σελ.81-95, 1995.
- Colman, A.M. (ed.): *Companion Encyclopedia of Psychology*. Routledge Reference, 1994. Vol. 1.
- Conway, P. / Sloane, F.C: *International trends in post–primary mathematics education*. NCCA, 2005.  
<http://www.ncca.ie/uploadedfiles/mathsreview/intpaperoct.pdf> (14-3-2007)
- Davis, R.B.: *Learning Mathematics. The Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. New Jersey: Ablex Publishing Corporation, 1984.
- De Corte, E. / Greer, B. / Verrschaffel, L.: Mathematics Teaching and Learning. Στο βιβλίο, Berliner D. / Calfee R. (eds.): *Handbook of Educational Psychology*. New York: Macmillan, 1996, σελ. 491-549.
- Dubinsky, E.: Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. Στο βιβλίο Tall, D. (ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, 1991, σελ.95-123.
- Ernest, P.: *The Philosophy of Mathematics Education*. The Falmer Press, 1991.
- Gardner, H.: *The Mind's New Science: a History of the Cognitive Revolution*. Basic Books, 1985.
- Giere, R.N.: The Cognitive Study of Science. Στο βιβλίο Nersessian, J. N.: *Science and Philosophy. The Process of Science*. Netherlands: εκδ. Martinus Nijhoff Publishers, 1987. σελ. 139-159.
- Gill, G.M. / Ashton, T.P /Algina, J.: Changing preservice teachers' epistemological beliefs about teaching and learning in mathematics: An intervention study. *Contemporary Educational Psychology* 29, σελ. 164-185, 2004.

- Goldin, A.G.: Affect, meta-affect, and mathematical belief structures. *Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics*, [http://www.uni-duisburg.de/FB11/PROJECTS/MFO\\_Beliefs.html](http://www.uni-duisburg.de/FB11/PROJECTS/MFO_Beliefs.html) (14-3-2007), σελ.37-42
- Goldin, G. / Shteingold, N.: Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. Στο βιβλίο *Systems of representations and the development of mathematical concepts*. Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics, 2001. σελ 1-23.
- Gray, E. / Pinto, M. / Pitta, D. / Tall, D.: Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary & Advanced Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 1999, σελ. 111-133.
- Heylighen, F.: *Representation and Change. A Metarepresentational Framework for the Foundations of Physical and Cognitive Science*. 1999. Σελ. 11-12. <http://pcp.vub.ac.be/books/Rep&Change.pdf> (14-3-2007)
- Hiebert, J. / Lefevre, P. (ed.): Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. Στο βιβλίο Hiebert, J. (ed.): *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1986, σελ. 1-27.
- Knuth, R.A / Jones B.F.: *What Does Research Say About Mathematics?* 1991, [http://www.ncrel.org/sdrs/areas/stw\\_esys/2math.htm](http://www.ncrel.org/sdrs/areas/stw_esys/2math.htm) (20-8-2006)
- Leder, G.C. / Pehkonen, E. / Törner, G.: Setting the scene. Στο βιβλίο: Leder, G.C. / Pehkonen, E. / Törner, G. (eds.): *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* Kluwer Academic Publishers, 2002. σελ. 1-10.
- McCormic, R.: Conceptual and Procedural Knowledge. *International Journal of Technology and Design Education* 7, 1997, σελ. 141-159.
- Mellin-Olsen, S.: Instrumentalism as an educational concept. *Educational Studies in Mathematics* 12, 1981, σελ. 351-367.
- Nersessian, N.J.: Opening the Black Box: Cognitive Science and History of Science. *Osiris*, 2<sup>nd</sup> series, vol 10, Constructing Knowledge in the History of Science. 1995, σελ. 194-211.
- Netz, R.: *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics. A study in cognitive history*. Ideas in Context, 1999.
- Op 't Eynde, P. / De Corte, E. / Verschaffel, L.: Framing students' mathematics-related beliefs. Στο βιβλίο: Leder, G.C. / Pehkonen, E. / Törner, G. (eds.): *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* Kluwer Academic Publishers, 2002. σελ. 13 – 37.

- Pehkonen, E. / Törner, G.: Introduction to the abstract book for the Oberwolfach meeting on research into belief. *Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics*, [http://www.uni-duisburg.de/FB11/PROJECTS/MFO\\_Beliefs.html](http://www.uni-duisburg.de/FB11/PROJECTS/MFO_Beliefs.html) (14-3-2007), σελ.3-10.
- Pepe, J.S. / Tchoshanov, A.M.: The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding. *Theory Into Practice*. Vol 40, No 2, Spring 2001. σελ. 118-127.
- Porter, K.M. / Masingila, O.J.: Examining the Effects of Writing on Conceptual and Procedural Knowledge in Calculus. *Educational Studies in Mathematics* 42, σελ.165-177, 2000.
- Resnick, L.B. / Ford, W.W.: *The psychology of Mathematics for Instruction*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. 1984.
- Schoenfeld, A.H.: Cognitive Science and Mathematics Education: An Overview. Στο βιβλίο, Schoenfeld, A.H. (ed.): *Cognitive Science and Mathematics Education*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1987 (a), σελ. 1-31.
- Schoenfeld, A.H.: What's all the fuss about metacognition? Στο βιβλίο, Schoenfeld, A.H. (ed.): *Cognitive Science and Mathematics Education*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1987 (b), σελ. 189-217.
- Schoultzi, J. / Säljö, R. / Wyndhamn, J.: Conceptual knowledge in talk and text: What does it take to understand a science question? *Instructional Science* 29: σελ. 213–236, 2001.
- Sfard, A.: The Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, σελ. 1-36, 1991.
- Thagard, P.: Cognitive Science. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <http://www.science.uva.nl/~seop/entries/cognitive-science/> (14-3-2007)
- Thagard, P.: *Conceptual Revolutions*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1992.
- Törner, G.: Mathematical Beliefs - a search for a common ground: some theoretical considerations on structuring beliefs, some research questions, and some phenomenological observations. Leder, C.G. / Pehkonen, E. / Törner, G.: *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers, 2002. σελ. 73-94.
- Vosniadou, S. /Verhaffel, L.: Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction*. No 14, σελ. 445-451, 2004.

- Wittman, E.: The Complementary Roles of Intuitive and Reflective Thinking in Mathematics Teaching. *Educational Studies in Mathematics* 12, σελ. 389-397, 1981.
- Zan, R.: A metacognitive intervention in mathematics at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 31, No. 1, σελ. 143-150, 2000.