

Η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών, από τη σκοπιά των *Εννοιολογικών Αλλαγών*

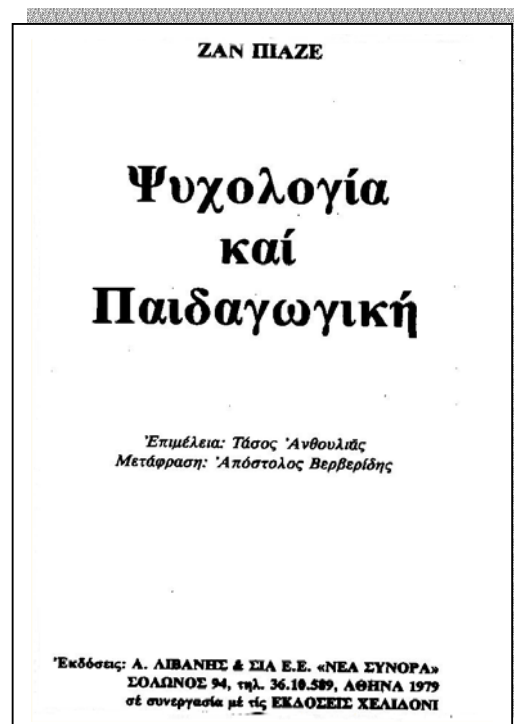
Ν. Καστάνη

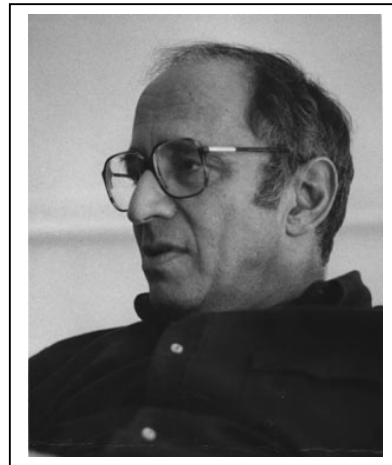
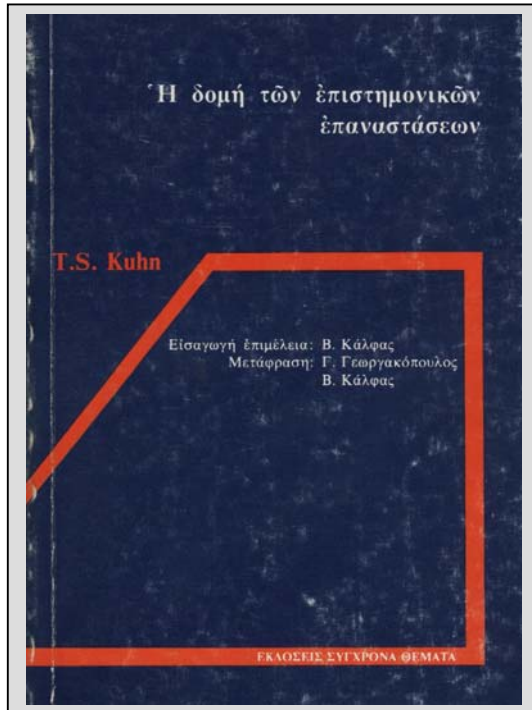
Εισαγωγή

Τα τελευταία 30 με 40 χρόνια αναπτύσσεται, δυναμικά, μια νέα θεώρηση της Φιλοσοφίας της Επιστήμης και της Ψυχολογίας. Πρόκειται για τη **γνωστική** (ή γνωσιακή) προσέγγιση, ανάλυση και κατανόηση της επιστημονικής σκέψης, η οποία έχει ως κεντρικό της άξονα την υποδομή και την ανάπτυξη της επιστημονικής γνώσης. Γενικότερα η *Γνωστική Ψυχολογία* και η *Γνωστική Επιστημολογία* φωτίζουν, εξετάζουν και αναδεικνύουν τις διαδικασίες της νοητικής ανάπτυξης και τις μεταβολές των δομών σκέψης. Δύο από τους σύγχρονους στυλοβάτες αυτού ρεύματος ήταν ο Jean Piaget (1896-1980) και ο Thomas Kuhn (1922-1996). Και οι δύο ήταν επηρεασμένοι από την Γαλλική Επιστημολογία, η οποία δεν συμβάδιζε με την επιστημολογία του Λογικού Θετικισμού και με την ψυχολογία του Συμπεριφορισμού (ή Μπιχεβιορισμού), που κυριαρχούσαν μετά το Β' Παγκόσμιο Πόλεμο στη Δύση.



Jean Piaget 1896-1980)





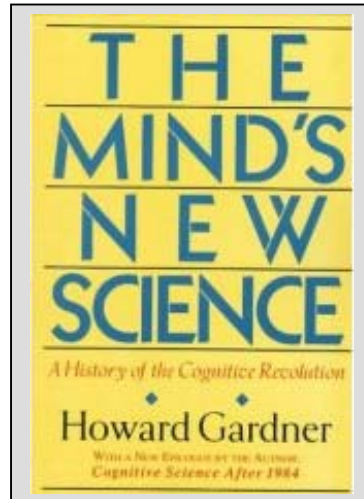
Thomas Kuhn (1922-1996)

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ανάδειξη και η καθιέρωση των δύο αυτών ανανεωτών του επιστημονικού γίνεσθαι έγινε στο πλαίσιο του στρουκτουραλιστικού (ή δομικοκρατικού) ρεύματος μεταρρύθμισης της επιστημονικής παιδείας στη Δύση, τη δεκαετία του 1960. Μια μεταρρύθμιση που προκλήθηκε από το Sputnik Shock, σύμφωνα με τον τότε πρόεδρο της Αμερικανικής Μαθηματικής Εταιρείας (Morris Kline), αλλά και από τις τότε τάσεις ανάπτυξης των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και της Τεχνητής Νοημοσύνης.

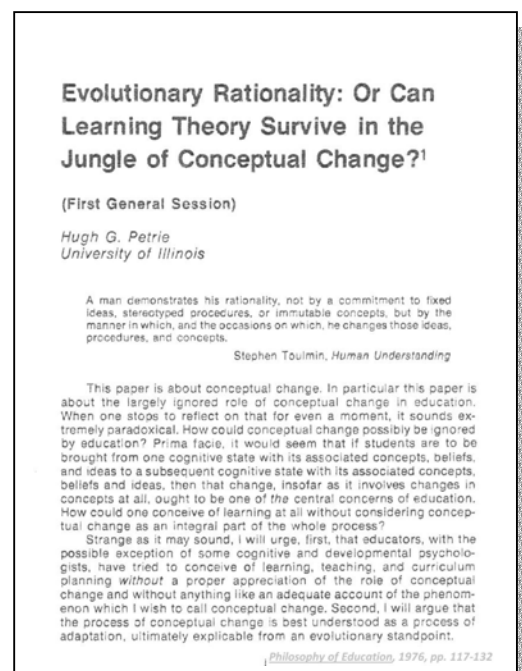
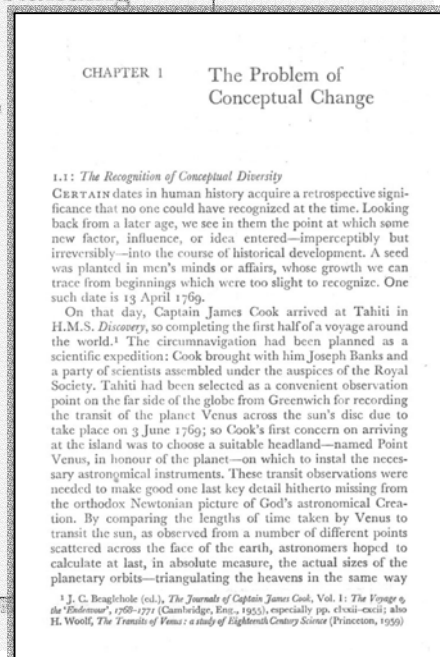
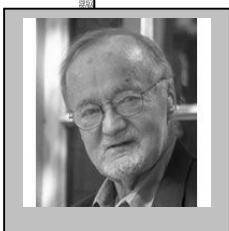
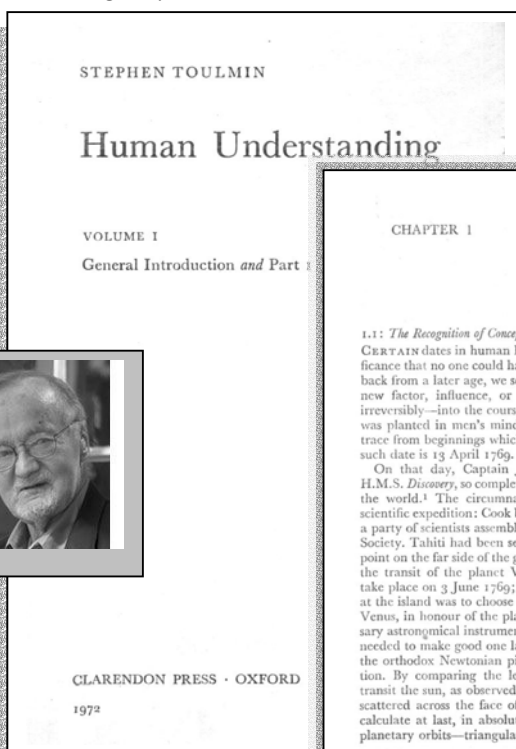
Μ' αυτές τις ρίζες, άρχισε η αμφισβήτηση κι απόρριψη των καθιερωμένων, τότε, επιστημολογικών και ψυχολογικών προτύπων στη Δύση, όπως του πλατωνισμού, του φορμαλισμού (ή τυποκρατίας) και του μπιχεβιορισμού.

Τόσο ο Piaget, όσο και ο Kuhn, υποστήριζαν τις ριζικές αλλαγές στην ανάπτυξη των επιστημονικών γνώσεων, σ' αντίθεση με τις κυρίαρχες επιστημολογικές και ψυχολογικές σχολές, εκείνης της περιόδου, που στηρίζονταν σε μια συσσωρευτική αντίληψη της επιστημονικής εξέλιξης. Πολύ χαρακτηριστικά ο Kuhn έθεσε και πρόβαλε τις επιστημονικές επαναστάσεις ως κεντρικό στοιχείο της νέας επιστημολογίας του. Ένα αρκετά πιστικό παράδειγμα, που χρησιμοποίησε, ήταν το εξής: η Αστρονομική Θεωρία του Νεύτωνα ανέτρεψε τη Θεωρία του Πτολεμαίου και η Θεωρία Σχετικότητας του Einstein ανέτρεψε τη Θεωρία του Νεύτωνα. Η ιδέα αυτή, συνυφασμένη στη δομική αντίληψη της ανθρώπινης νόησης και της επιστημονικής ανέλιξης, προκάλεσε, με

καταλύτη τη δυναμική των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και της Τεχνητής Νοημοσύνης, την έκρηξη της **Γνωστικής Επανάστασης**, που εκδηλώθηκε στις αρχές της δεκαετίας του 1970.

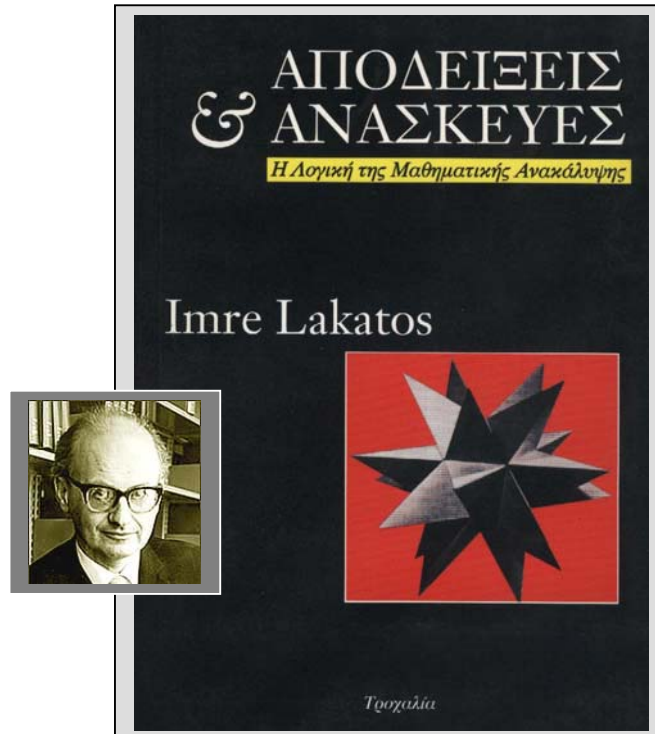


Στην κατεύθυνση αυτή ο προβληματισμός και οι αναλύσεις για τη φύση της επιστημονικής σκέψης μετατοπίστηκε από το πρότυπο της διαχείρισης πληροφοριών στο εννοιολογικό της υπόβαθρο. Έτσι πρόβαλε ένα ενδιαφέρον για τις **εννοιολογικές αλλαγές**, δηλ. για τη μετατροπή των επιστημονικών εννοιών στην πορεία της μόρφωσης και στην ιστορική εξέλιξη. Το 1972, ο Stephen Toulmin εισήγαγε την ιδέα των **εννοιολογικών αλλαγών** στο βιβλίο του : Human Understanding, που παρακίνησε κάποιους φιλόσοφους της εκπαίδευσης στις Η.Π.Α., οι οποίοι ήταν επηρεασμένοι από το ανανεωτικό ρεύμα του Piaget και του Kuhn.



ΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

Για την επιστημολογία των Μαθηματικών αποφασιστικό ρόλο έπαιξε, στη δεκαετία του 1970, η διάδοση και η επίδραση των ιδεών του Imre Lakatos (1922-1974), που υποστήριξε κι αυτός, από μια άλλη οπτική γωνία, **την τροποποίηση και αλλαγή των μαθηματικών εννοιών** στην πορεία ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης.

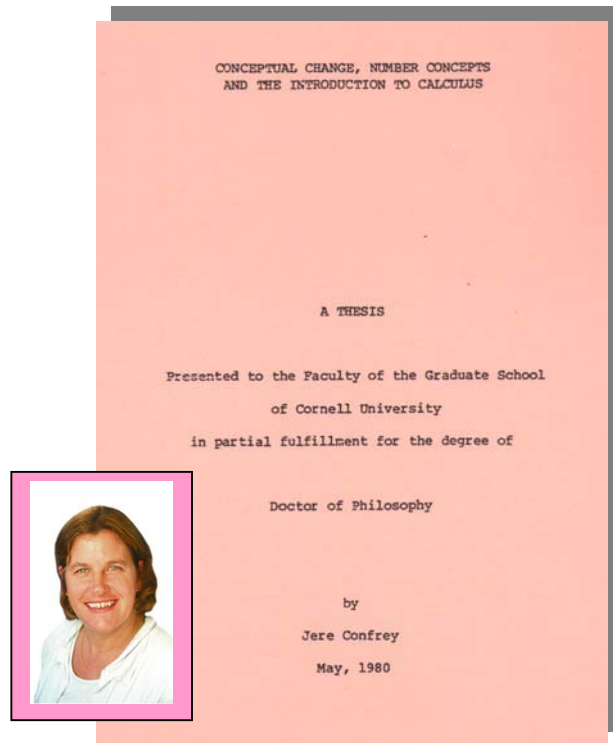


Η προώθηση των **Εννοιολογικών Αλλαγών** στα Μαθηματικά

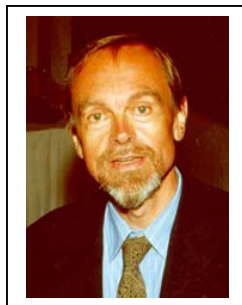
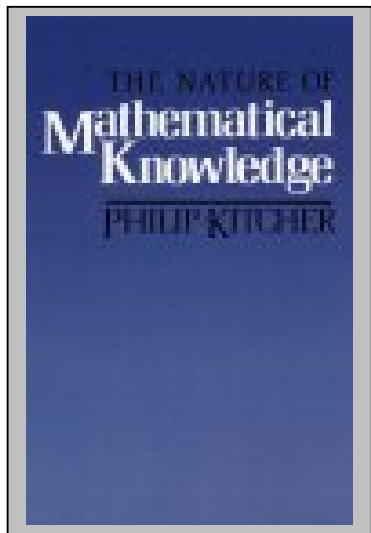
Το 1980 ολοκληρώθηκε στο πανεπιστήμιο Cornell των Η.Π.Α. η διδακτορική διατριβή της Jere Confrey, με θέμα : **Conceptual Change, Number Concepts and the Introduction to Calculus**. Η διατριβή αυτή αποτελεί την αφηγηρία της νέας προσέγγισης των Μαθηματικών από τη σκοπιά των **εννοιολογικών αλλαγών**. Λόγω αυτής της γενετικής σημασίας της αξίζει να επισημανθεί η βασική της θέση. Στην παράγραφο λοιπόν που γίνεται για πρώτη φορά η συσχέτιση των **εννοιολογικών αλλαγών** με τα Μαθηματικά τονίζονται τα εξής:

“Σύμφωνα με τη δεσπίζουσα άποψη για τα Μαθηματικά, αυτά είναι αδιαφιλονίκητα, απόλυτα, καθολικής αποδοχής και αιώνια. Οπότε, κατά την άποψη αυτή, η ιστορία των Μαθηματικών είναι μια συσσώρευση από αλήθειες που η εγκυρότητά τους είναι ανεξάρτητη από κάθε ιδιαίτερη θεωρία· κατά συνέπεια τα Μαθηματικά αναπτύσσονται γραμμικά (μονοδιάστατα), υποχρεωτικά (ακούσια) και μ’ ένα μονόδρομο τρόπο. Η μαθηματική αλήθεια απεικονίζεται ως αναμφισβήτητη, προκαθορισμένη (a priori) και ανεξάρτητη από την εμπειρία. Σ’ αντιπαράθεση, η προσέγγιση των εννοιολογικών αλλαγών αναγκάζει κάποιον να δει τα Μαθηματικά εξελικτικά, επηρεασμένα από ανταγωνιζόμενες θεωρίες και όχι αναγκαστικά προσεγγίζοντας μια απόλυτη Αλήθεια. Για τον περισσότερο κόσμο, αυτή η αλλαγή απαιτεί να αντιμετωπιστούν τα Μαθηματικά μ’ ένα ριζικά διαφορετικό τρόπο απ’ ό,τι ο καθιερωμένος τρόπος.”¹

¹ Βλ. Confrey, J.: *Conceptual Change, Number Concepts and the Introduction to Calculus*, Ph.D., Univ. Cornell, 1980, σελ. 42.



Τη δεκαετία του 1980 άρχισε να διαδίδεται η ιδέα των **εγνωσιολογικών αλλαγών** στη Διδακτική και την Ιστορία των Μαθηματικών. Κάποια πολύ χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι οι εξής δημοσιεύσεις:



The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass

First the derivative was used, then discovered, explored and developed, and only then, defined.



JUDITH V. GRABINER
Department of History
University of California, Los Angeles
Los Angeles, CA 90024

Some years ago while teaching the history of mathematics, I asked my students to read a discussion of maxima and minima by the seventeenth-century mathematician, Pierre Fermat. To start the discussion, I asked them, "Would you please define a relative maximum?" They told me it was a place where the derivative was zero. "If that's so," I asked, "then what is the definition of a relative minimum?" They told me, *that's* a place where the derivative is zero. "Well, in that case," I asked, "what is the difference between a maximum and a minimum?" They replied that in the case of a maximum, the second derivative is negative.

What can we learn from this apparent victory of calculus over common sense?

Mathematics Magazine, Vol. 56, No. 4. (Sep., 1983), pp. 195-206.

Instruction and Cognitive Change in Mathematics

James Hiebert and Diana Wearne
University of Delaware



A methodology for studying change during instruction in content-specific cognitive processes is presented. The methodology borrows both from the cognitive mediational approach in instructional effectiveness research and the instructional approach in cognitive psychology research. It is argued that learning from instruction must be understood in terms of the way in which instruction changes the cognitive processes used to solve tasks. The methodology is illustrated by summarizing a project on instructing middle-school students in semantic processes for solving decimal-fraction problems. The benefits of the methodology, such as tracing the effects of instruction on performance change, are discussed.

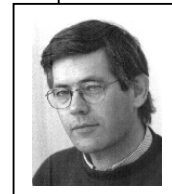
*EDUARD GLAS**

TESTING THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS IN THE HISTORY OF MATHEMATICS

PART I: THE SOCIOCOGNITIVE PROCESS OF CONCEPTUAL CHANGE

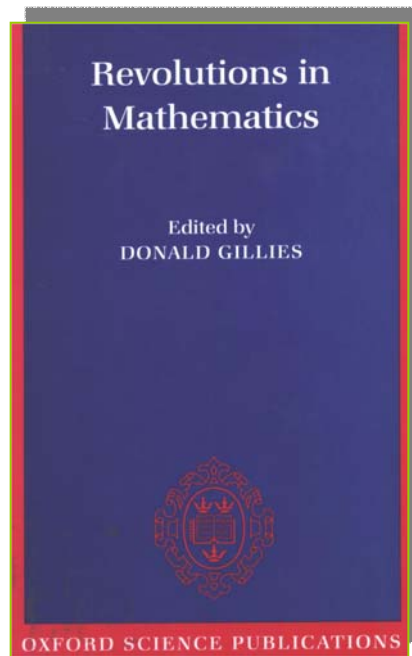
Contents

- Introduction
- I. Conceptual Variations within Mathematics
- II. Incommensurability of Conceptual Variations
- III. Internal versus External Explanation
- IV. Sociocognitive Explanation of Conceptual Variation
- V. The Sociocognitive Dynamics of Selection
- VI. Paradigms and Revolutions in Mathematics
- VII. Conclusion



Stud. Hist. Phil. Sci. . Vol. 20. No. 1. pp. 115-131. 1989.

Την περίοδο αυτή, η ιδέα των **εννοιολογικών αλλαγών** στα Μαθηματικά είχε μια δυσκολία, ένα εμπόδιο, για να γίνει ευρύτερα αποδεκτή. Πρόκειται για τις έντονες αντιστάσεις και αντιρρήσεις στο ζήτημα των **μαθηματικών επαναστάσεων**. Κι αυτό γιατί, σ' αντίθεση με τις άλλες θετικές επιστήμες, δεν υπάρχουν θεωρίες που ανέτρεψαν άλλες θεωρίες. Το θέμα, όπως φαίνεται, διευθετήθηκε το 1992, με τη δημοσίευση και διάδοση του βιβλίου: ***Revolutions in Mathematics***, όπου υποστηρίζεται από σημαντικούς ιστορικούς-επιστημολόγους των Μαθηματικών ότι οι μαθηματικές επαναστάσεις προκαλούνται στο μεταγνωστικό επίπεδο, δηλ. στο γνωστικό (εννοιολογικό, μεθοδολογικό και λογικό) παρασκήνιο.



Με το βιβλίο αυτό νομιμοποιήθηκε η ιδέα των **μαθηματικών επαναστάσεων** κι έτσι ομαλοποιήθηκε η σχέση των Μαθηματικών με τη νέα επιστημολογία. Κατά συνέπεια άνοιξε και ο δρόμος για την ευρύτερη ανάπτυξη των **εννοιολογικών αλλαγών** στα Μαθηματικά. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την ισχυροποίηση του ρεύματος του **κονστρουκτιβισμού** (“κατασκευαστικισμού”) στη γνωστική επιστημολογία, στα τέλη της δεκαετίας του 1980, προκάλεσε ισχυρή ώθηση στον απεγκλωβισμό της φιλοσοφίας της επιστήμης (και των Μαθηματικών ειδικότερα) από την κυριαρχία του πλατωνισμού και του φορμαλισμού (τυποκρατίας). Σύμφωνα με τις επιστημολογικές αρχές του **κονστρουκτιβισμού** η γνώση δεν προσλαμβάνεται παθητικά, αλλά κατασκευάζεται ενεργητικά από το άτομο σε μια συνεχή και προσαρμοστική σχέση με το περιβάλλον του. Η **κονστρουκτιβιστική** επιστημολογία αρνείται την προκαθορισμένη, την αυθύπαρκτη, γνώση και αναγνωρίζει τη διαλεκτική σχέση μεταξύ εμπειρίας και γνώσης. Φυσιολογικά, λοιπόν, ενισχύθηκαν οι τάσεις και τα ενδιαφέροντα για τη βαθύτερη κατανόηση των γνωστικών δομών σκέψης και των εννοιολογικών ανελίξεων και υπερβάσεων της.

Έτσι από τα μέσα της δεκαετίας του 1990 διαμορφώθηκαν οι προϋποθέσεις για την προώθηση και εκβάθυνση των μελετών και των ερευνών στις **εννοιολογικές αλλαγές** στα Μαθηματικά.

Conceptual change in mathematics: From rational to (un)real numbers

Erno Lehtinen
Kaarina Merenluoto
University of Turku, Finland

Eero Kasanen
Helsinki School of Economics, Finland



From an educational point of view, mathematics is supposed to have a completely hierarchical structure in which all new concepts logically follow from prior ones. In this article we try to show that there are also concepts in mathematics which are difficult to learn because of problematic continuity from prior knowledge to new concepts. We focus on the problems of conceptual change connected with the learning of calculus and the shift from rational to real numbers. We demonstrate the difficulty of this conceptual change with the help of historical and psychological evidence. In the empirical study 65 students of higher secondary school were tested after a 40 hour calculus course. In addition, 11 students participated in individual interview. According to the results the conceptual change from a discrete to a continuous idea of numbers seems to be difficult for students. None of the subjects had developed an adequate understanding of real numbers although they had learned to carry out algorithmic procedures belonging to calculus. We discuss how appropriate recent theoretical ideas on conceptual change are for explaining learning problems in this domain. Also some educational implications are presented.



Learning and Instruction 14 (2004) 503–518

Learning and
Instruction

www.elsevier.com/locate/learninstruc

The development of students' understanding of the numerical value of fractions

Stamatia Stafylidou, Stella Vosniadou*

*Cognitive Science Laboratory, Department of Philosophy and History of Science,
National and Kapodistrian University of Athens, Panepistimiopolis 15771, Ilissia, Athens, Greece*

Abstract

An experiment is reported that investigated the development of students' understanding of the numerical value of fractions. A total of 200 students ranging in age from 10 to 16 years were tested using a questionnaire that required them to decide on the smallest/biggest fraction, to order a set of given fractions and to justify their responses. Students' responses were grouped in categories that revealed three main explanatory frameworks within which fractions seem to be interpreted. The first explanatory framework, emerging directly from the initial theory of natural numbers, is that fraction consists of two independent numbers. The second considers fractions as parts of a whole. Only in the third explanatory framework, students were able to understand the relation between numerator and denominator and to consider that fractions can be smaller, equal or even bigger than the unit.

© 2004 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Strategies for Conceptual Change: Ratio and Proportion in Classical Greek Mathematics

Paul Rusnock and Paul Thagard**

...all men begin... by wondering that things are as they are...as they do about...the incommensurability of the diagonal of the square with the side; for it seems wonderful to all who have not yet seen the reason, that there is a thing which cannot be measured even by the smallest unit. But we must end in the contrary and, according to the proverb, the better state, as is the case in these instances too when men learn the cause; for there is nothing which would surprise a geometer so much as if the diagonal turned out to be commensurable (Aristotle, *Metaph.*, 983^a15)

Introduction

By the time of Aristotle, the mathematical phenomenon of incommensurability was so well known as to be regarded as commonplace.¹ But when it was first discovered, the anomaly of incommensurables posed difficult problems for classical Greek mathematicians.² According to a tradition with roots in antiquity, it precipitated a general crisis, some accounts adding the colorful touch that those who first published the result perished shortly thereafter for their indiscretion.³ While there is no solid evidence to support these claims, there is general agreement among historians that the discovery raised fatal objections to existing mathematical theory. Surviving documents indicate that much effort was put into the project of reformulating mathematics in the wake of this blow, with results that are revolutionary in their scope, and among the highest achievements of that tradition.⁴

*Department of Philosophy, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada N2L 3G1.
Received 8 March 1994; in revised form 17 September 1994.

¹Aristotle, *Metaphysics*, 983^a15f.

²For a recent contrary view see D. H. Fowler, 'The story of the discovery of incommensurability, revisited', in K. Gavroglu, J. Christianidis and E. Nicolaidis (eds), *Trends in the Historiography of Science* (Dordrecht: Kluwer, 1994), p. 221 f.

³Scholium to Euclid's *Elements*, Book X, 1. Bulmer-Thomas (ed. and trans), *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (London: Heinemann, 1941), vol. 1, p. 217.

⁴For a persuasive argument that the changes should be regarded as revolutionary see J. Dauben, 'Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge' (1984); reprinted with an appendix in D. Gillies (ed.), *Revolutions in Mathematics* (Oxford: Clarendon Press, 1992), p. 49 f.



Pergamon

Stud. Hist. Phil. Sci., Vol. 26, No. 1, pp. 107–131, 1995
Copyright © 1995 Elsevier Science Ltd
Printed in Great Britain. All rights reserved
0039–3681/95 \$9.50+00.00

Science & Education (2006)
DOI 10.1007/s11191-006-9041-y

© Springer 2006

Teaching the Conceptual Revolutions in Geometry

ROBERT N. CARSON¹ and STUART ROWLANDS²

¹College of Education, Montana State University, Department of Education, Bozeman, MT 59717, USA; ²Centre For Teaching Mathematics, University of Plymouth, Plymouth, PL4 8AA, UK

(E-mail: srowlands@plymouth.ac.uk)

Abstract Mathematics begins in human experience thousands of years ago as empirical and intuitive experiences. It takes the deliberate naming of concepts to help crystallize and secure those observations and intuitions as abstract concepts, and to begin separating the concept of number from specific instances of objects. It takes the creation of compact symbols to enable efficient calculation and to begin raising a consciousness of this activity we call mathematics. And it takes the sustained development and discussion of mathematical conventions and practices to create entire domains of mathematical thought, such as we find in geometry. The major innovations and conceptual reformulations are few in number, but these represent perhaps the greatest challenges to learners. Historically significant transformative events have their counterpart in the cognitive growth of the individual. This article examines the interplay between these big ideas in cultural history and the deliberate processes of cognitive change that are their counterpart in the educational process.

Δύο παραδείγματα εννοιολογικών αλλαγών στα Μαθηματικά

Το πρώτο παράδειγμα είναι για την έννοια του αριθμού, που “πέρασε από πολλά κύματα”, κατά την ιστορική εξέλιξή της.

Στον Αρχαίο Ελληνικό Πολιτισμό ο αριθμός αντιμετωπιζόταν ως συλλογή μονάδων. Αργότερα, από την Αναγέννηση και μετά, θεωρούσαν τον αριθμό ως αποτέλεσμα μιας μέτρησης. Με τη Γαλλική Επανάσταση το θέμα του αριθμού περιπλέχθηκε. Συγκεκριμένα, η δημιουργία της Δημόσιας Εκπαίδευσης και η εξύψωση της μαθηματικής μόρφωσης ως πρώτιστης σημασίας επέφεραν μια μεγάλη ανανέωση του περιεχομένου των μαθηματικών σπουδών, με έμφαση στα “Αναλυτικά” Μαθηματικά (π.χ. Αναλυτική Θεωρία Συναρτήσεων, Αναλυτική Γεωμετρία, Αναλυτική Μηχανική). Έτσι οι αρνητικοί αριθμοί άρχισαν να παίζουν αποφασιστικό ρόλο στη συστηματοποίηση του αλγεβρικού υπόβαθρου της νέας μαθηματικής παιδείας. Κατά συνέπεια το επιστημολογικό εμπόδιο της έννοιας του αριθμού, ως αποτέλεσμα της μέτρησης, έπρεπε να ξεπεραστεί, γιατί καμία μέτρηση δεν μπορεί να δώσει αρνητικό αριθμό. Και είναι αλήθεια ότι την περίοδο εκείνη υπήρχαν ισχυρότατες επιστημολογικές αντιπαραθέσεις για την αποδοχή ή όχι των αρνητικών αριθμών. Αυτοί που ήταν συνεπείς με την έννοια του αριθμού ως αποτέλεσμα της μέτρησης απέρριπταν τους αρνητικούς αριθμούς ως ασυμβίβαστα στοιχεία (και είχαν δίκαιο), από την άλλη μεριά αρκετοί πρωτοπόροι μαθηματικοί, όπως π.χ. ο Euler, χρησιμοποιούσαν τους αρνητικούς αριθμούς πετυχαίνοντας μια συνεκτική βάση που λειτουργούσε πολύ ικανοποιητικά στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, όπως π.χ. στις λύσεις των διαφορικών εξισώσεων ή στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

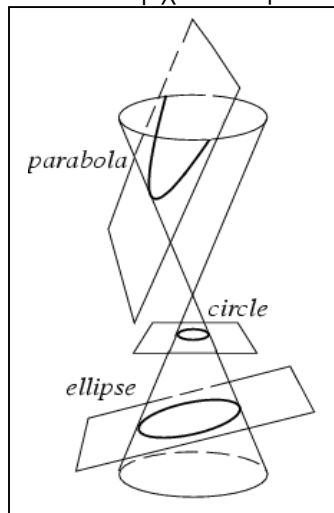
Το πρώτο βήμα για τη συγκεκριμένη υπέρβαση έγινε τη δεκαετία του 1820 με τη μετατόπιση της κατανόησης του αριθμού από την οντότητά του στις πράξεις του. Δηλαδή, αντί να περιορίζονται οι αριθμοί από την εμπειρική τους καταγωγή, δόθηκε έμφαση στη σημασία και τα χαρακτηριστικά των πράξεών τους, όπως και στις δυνατότητες επέκτασής τους, χωρίς, όμως, να αλλοιώνονται οι ιδιότητές τους (π.χ. η επιμεριστική ή προσεταιριστική ιδιότητα). Αυτή η συμπεριφορά μπορεί να παραλληλιστεί π.χ. με την υποβάθμιση της σημασίας του υλικού κατασκευής μιας μηχανής (λόγου χάρη του αργαλειού), ενώ ταυτόχρονα αναδεικνύεται ο ρόλος και ο χαρακτήρας των λειτουργιών της, ιδιαίτερα δε της δυνατότητας διεύρυνσής ή επέκτασής τους.

Καλό είναι να συνειδητοποιηθεί ότι αυτή η στροφή από την οντολογική αντίληψη του αριθμού στην πραξιακή του κατανόηση έγινε με υπόβαθρο το αρχικό δομικό και λειτουργικό πλαίσιο της Αριθμητικής **και** με την απαίτηση να επεκταθεί χωρίς να χαθούν τα λειτουργικά της πλεονεκτήματα.

Αυτή η “απο-οντολογικοποίηση” της έννοιας του αριθμού τον έσπρωξε προς μια δομική θεώρηση του, που εξελίχθηκε τον 19^ο αιώνα και στις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Έτσι σήμερα, αν και αποφεύγεται ο ορισμός του αριθμού, ωστόσο καλλιεργείται η αντίληψη των συστημάτων αριθμών (π.χ. ακεραίων, ρητών, πραγματικών), μ’ αποτέλεσμα στο ερώτημα: τι είναι αριθμός; η απάντηση μοιάζει με σοφιστεία του τύπου: αριθμός είναι ένα στοιχείο ενός συστήματος αριθμών. Αυτό σημαίνει ότι ορίζονται τα συστήματα αριθμών με βάση τις εσωτερικές ιδιότητές τους κι όχι με τα αντικείμενά τους. Οπότε ο αριθμός μορφοποιείται από την εσωτερική ταυτότητα του συστήματος που ανήκει. Η σκέψη αυτή μοιάζει με το λαϊκό ρητό “πες μου τους φίλους σου, να σου πω ποιος είσαι”.

Το δεύτερο παράδειγμά έχει να κάνει με την έλλειψη.

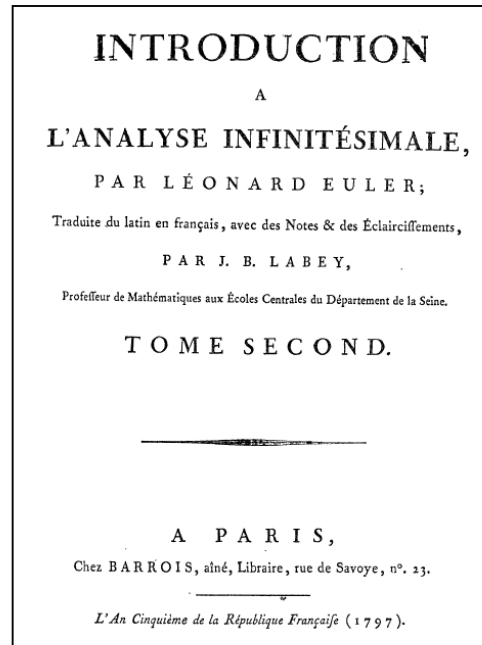
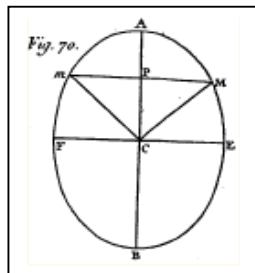
Έναυσμα για τον προβληματισμό γύρω από την έννοια της έλλειψης μπορεί να αποτελέσει η επισήμανση μιας ανακολουθίας. Αυτή η ανακολουθία διαπιστώνεται στη σχολική και πανεπιστημιακή εισαγωγή της συγκεκριμένης έννοιας, που συνήθως γίνεται ως μια κωνική τομή και στη συνέχεια παρουσιάζεται το σχήμα της απ’ όπου προκύπτει η εξίσωσή της. Με λίγη προσοχή μπορεί να παρατηρηθεί ότι η έλλειψη ως κωνική τομή είναι μόνο το περίγραμμά της και δεν περιλαμβάνει τις εστίες της. Οπότε, ο προκαθορισμός των εστιών στο περίγραμμά της έλλειψης, παρουσιαζόμενη ως κωνική τομή, είναι αντίφαση. Αν, όμως, η έλλειψη οριστεί ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που το άθροισμα των αποστάσεων τους από δύο δοσμένα σημεία (τις εστίες) είναι δοσμένο, τότε δεν υπάρχει αντίφαση.



Δημιουργείται έτσι το ερώτημα: πώς εξελίχθηκε η έννοια της έλλειψης;

Είναι γνωστό ότι ο Απολλώνιος όρισε και χειρίστηκε την έλλειψη ως κωνική τομή. Και το σημαντικότερο, βρήκε εκ των υστέρων τη θέση των εστιών της, στα τελευταία κεφάλαια του σχετικού έργου του. Στην ιστορική πορεία του θέματος, αν και ήταν γνωστή η ιδιότητα των σημείων της έλλειψης να έχουν σταθερό το άθροισμα των αποστάσεων

τους από τις εστίες της, ωστόσο τη μελετούσαν, κατά κανόνα, ως κωνική τομή και με τη βοήθεια των αξόνων και του κέντρου της. Αυτή η συμπεριφορά διατηρήθηκε μέχρι και τον Euler. Άλλαξε η κατάσταση, λίγο μετά τον Euler, πιθανότατα με τη συμβολή του ιησουΐτη μαθηματικού Ruggero Boscovich (1711-1787). Από τότε άρχισε να καθιερώνεται η μελέτη της έλλειψης με προκαθορισμένες της εστίες της και με βάση τη γνωστή εξίσωση της. Η αλλαγή αυτή δεν έγινε τυχαία, αλλά προέκυψε από την επικράτηση του αναλυτικού τρόπου σκέψης στη Γεωμετρία και η υποβάθμιση του συνθετικού τρόπου κατανόησης των κωνικών τομών.



Αυτή η ιστορική μετεξέλιξη αποτελεί μια εννοιολογική αλλαγή. Μια αλλαγή που, όπως φαίνεται δεν έχει συνειδητοποιηθεί και παρουσιάζεται το θέμα, μέχρι σήμερα, με μια υποκείμενη εννοιολογική σύγχυση.

Η Διαλεκτική Φιλοσοφία και οι εννοιολογικές αλλαγές

Διαφαίνεται, από τις προηγούμενες επισημάνσεις, ότι η γένεση και η ανάπτυξη της ιδέας των **εννοιολογικών αλλαγών** προωθήθηκε και καλλιεργείται μέσα στο νέο επιστημολογικό ρεύμα που διαμορφώθηκε στη Δύση από τις αρχές της δεκαετίας του 1960. Πρόκειται για ένα προοδευτικό ρεύμα σκέψης, που περιθωριοποίησε ή εξασθένησε τις κυρίαρχες, συντηρητικές, αντιλήψεις για την επιστήμη και τα Μαθηματικά, όπως αυτές του Λογικού Θετικισμού, του Πλατωνισμού και του Φορμαλισμού.

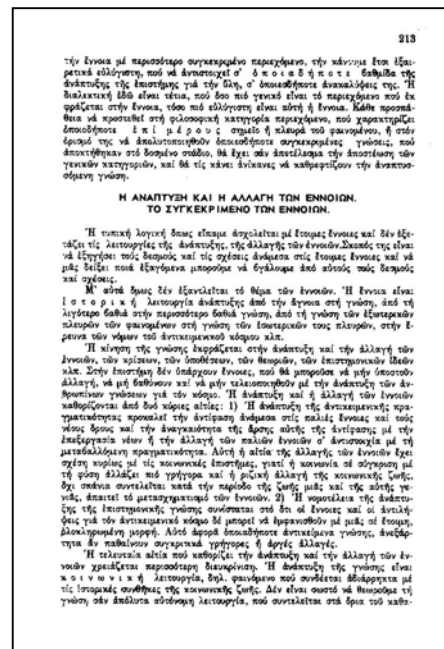
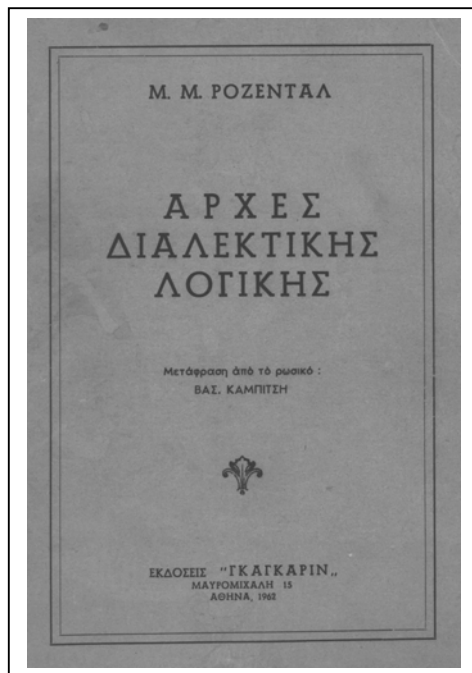
Φυσιολογικά δημιουργείται, τώρα, το εξής ερώτημα: ποια η σχέση της Διαλεκτικής Φιλοσοφίας με την ιδέα των **εννοιολογικών αλλαγών**;

Είναι ευρύτατα γνωστό ότι η Μαρξιστική Φιλοσοφία έχει ως βασικούς άξονές της: 1^ο την ιστορική κατανόηση των συμπεριφορών, των δραστηριοτήτων και των γνώσεων, και 2^ο την επίγνωση της γένεσης ενός νέου τρόπου σκέψης μέσα από τη σύγκρουση των αντιτιθέμενων νοοτροπιών. Οπότε η συμβατότητα της Διαλεκτικής Φιλοσοφίας με τις επαναστατικές αλλαγές της επιστημονικής σκέψης είναι αυτονόητη. Και κατά συνέπεια γιατί να μην είναι και με τις **εννοιολογικές αλλαγές**;

Χωρίς μεγάλη δυσκολία μπορούν να βρεθούν αρκετές επισημάνσεις, στη σχετική βιβλιογραφία, του τύπου:

“Η διαλεκτική λογική δε μελετάει τις έτοιμες έννοιες, αλλά τη λειτουργία, την εμφάνιση, την κίνηση, την ανάπτυξή τους.”²

Κάποιες αξιοσημείωτες μαρτυρίες αυτής της θέσης είναι οι εξής:



² Βλ. Ροζενταλ, Μ.Μ.: Αρχές Διαλεκτικής Λογικής, εκδ. “Γκαγκάριν”, 1962, σελ. 159.

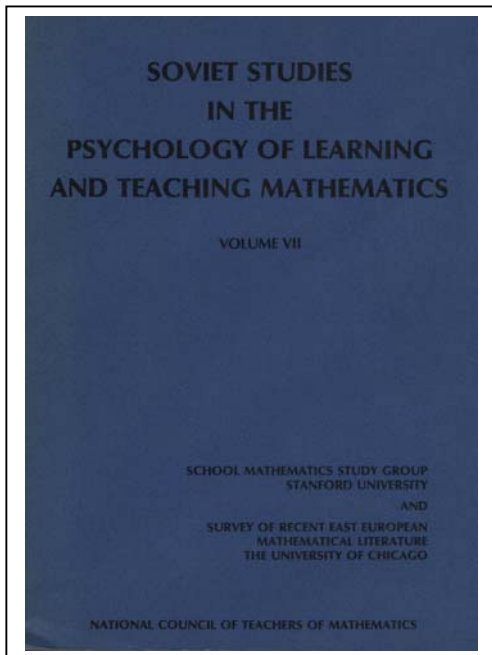
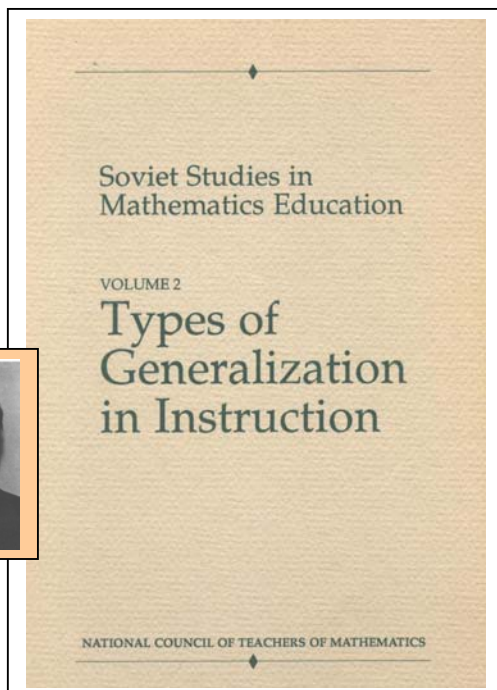
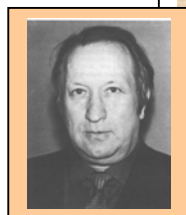


TABLE OF CONTENTS	
Introduction	xi
Learning Capacity and Age Level: Introduction D. B. El'konin and V. V. Davydov	1
Primary Schoolchildren's Intellectual Capabilities and the Content of Instruction D. B. El'konin.	13
Logical and Psychological Problems of Elementary Mathematics as an Academic Subject V. V. Davydov	55
The Psychological Characteristics of the "Prenumerical" Period of Mathematics Instruction V. V. Davydov	109
Developing the Concept of Number by Means of the Relationship of Quantities G. I. Minskaya.	207



The Dialectical Materialistic Theory of Thought 249

The Characteristics of Theoretical Thought

Mediated, reflected, essential being is the substance of theoretical thought. This thought is an idealization of the basic aspect of practical activity involving objects, and of the reproduction in that activity of the universal forms of things, their measures, and their laws. This reproduction occurs in labor activity as a unique sensory-object experiment. Then this sort of experimentation increasingly acquires a cognitive character, allowing people, with time, to pass to *mental* experimentation, to mentally ascribing a certain interaction, a definite form of movement, to objects.¹⁹

V. S. Bibler singles out the following basic features of mental experimentation: 1) the object of cognition is mentally transferred to conditions in which its essence can be discovered with a particular certitude, 2) this object becomes the object of subsequent mental transformations, 3) the *environment*, the system of connections in which this object is located, is mentally formed in this experiment; if the construction of a mental object can still be conceived as a simple "abstraction" of a real object's properties, then this third feature is, in essence, a productive addition to the mental object—only in this *particular* milieu does its content find its discovery [25, p. 30]. [34, p. 200].

These features of mental experimentation form the basis of theoretical thought, which operates by *scientific* concepts. A *concept* functions here as a form of mental activity by means of which an idealized object and the system of its connections, which reflect in their unity the *generality* or *essence* of movement of the material object, are reproduced. A concept simultaneously also functions as a form for reflecting the material object and as a means of mentally reproducing, constructing it—that is, as a particular *mental action*. The first feature permits man to be aware, in the thought process, of an object's existence independent of him—an object that is given as a prerequisite for activity. This prerequisite attaches a feature of *passivity*, a contemplative quality, a dependence on objective content, to a concept. And, at the same time, to have a concept of an object means to reproduce or construct it mentally.²⁰ This *action* of constructing

Όλα αυτά δείχνουν ότι το περιβάλλον της Διαλεκτικής Φιλοσοφίας είναι πολύ οικείο με τις ανελίξεις των εννοιών και των επιστημονικών εννοιών ειδικότερα. Κι αυτό σημαίνει ότι το συγκεκριμένο φιλοσοφικό πλαίσιο είχε προδιαγράψει την ιδέα των **εννοιολογικών αλλαγών**, πολλά χρόνια πριν την ανάδειξή τους στη νεώτερη επιστημολογία της Δύσης. Θα είναι, μάλιστα, ιδιαίτερα ενδιαφέροντα μια μελέτη του επιπέδου προώθησης των **εννοιολογικών αλλαγών** στη Μαρξιστική Φιλοσοφία.