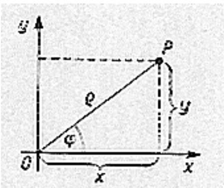
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ
ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Π. Μωυσιάδη – Ν. Καστάνη

ΜΕΡΙΚΕΣ ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ημ(α+β)=ημα συνβ + συνα ημβ συν(α+β)=συνα συνβ – ημα ημβ ημ2α=2ημα συνα συν2α=συν²α – ημ²α= =2συν²α – 1= =1 – 2ημ²α	$\text{εφ}(\alpha+\beta)=\frac{\text{εφ}\alpha+\text{εφ}\beta}{1-\text{εφ}\alpha\text{εφ}\beta}$ $\text{εφ}2\alpha=\frac{2\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha}$	$1+\text{εφ}^2\alpha=\frac{1}{\text{συν}^2\alpha}$ $\text{εφ}^2\alpha=\frac{1-\text{συν}2\alpha}{1+\text{συν}2\alpha}$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ



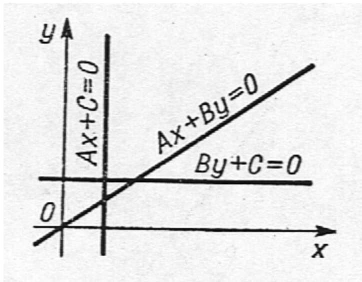
ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

x=ρσυνφ
y=ρημφ

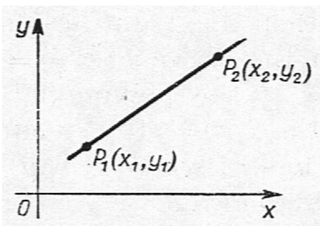
ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

Η γενική εξίσωση της ευθείας : **Ax+By+C=0**

Ειδικές περιπτώσεις



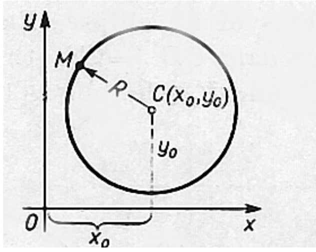
Η εξίσωση της ευθείας που περνάει απο δύο δοσμένα σημεία $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$:



$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

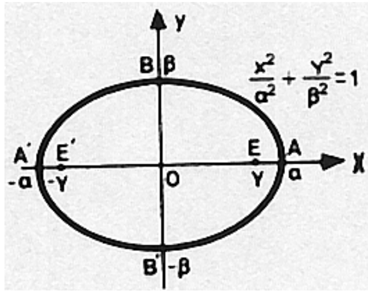
Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο $C(x_0,y_0)$ και ακτίνα R :

$$(x-x_0)^2 + (y-y_o)^2 = R^2$$



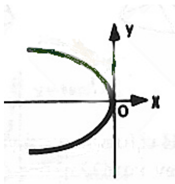
Η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το O(0,0), ημιάξονες α, β και εστιακή απόσταση γ $\{\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2\}$:

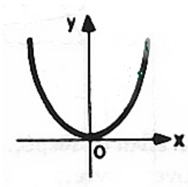
$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

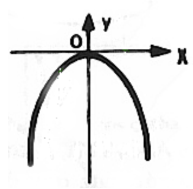


Οι εξισώσεις παραβολής κατα περίπτωση :

$x = \kappa y^2$	$x = -\kappa y^2$	$y = \kappa x^2$	$y = -\kappa x^2$

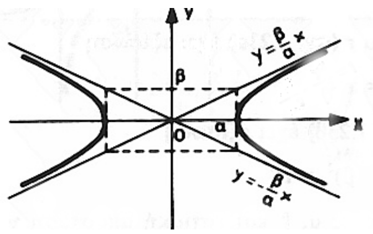






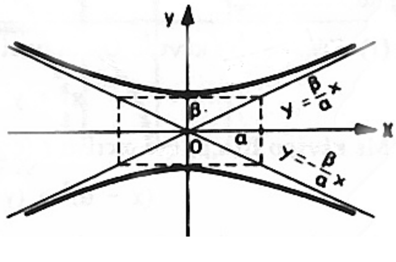
Η εξίσωση της υπερβολής :

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$



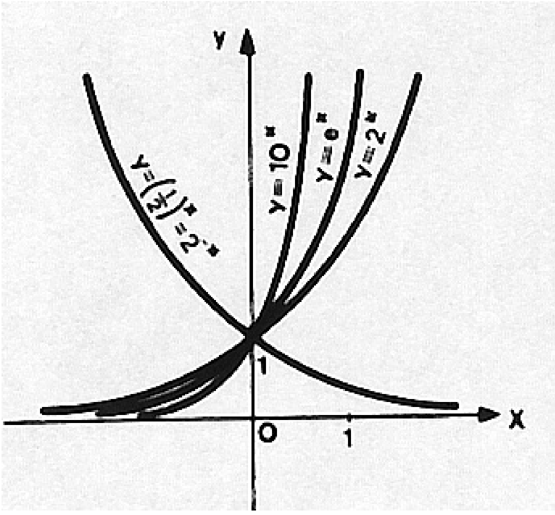
και της υπερβολής :

$$\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}=1$$

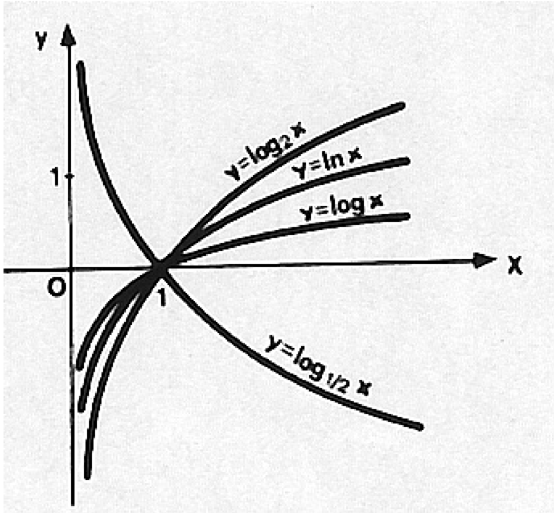


ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

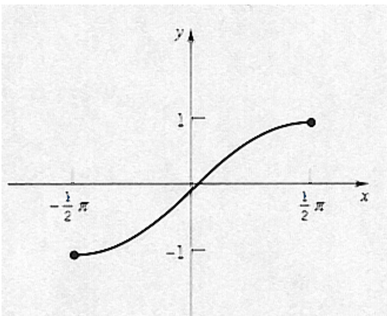
Κάποιες χαρακτηριστικές εκθετικές συναρτήσεις



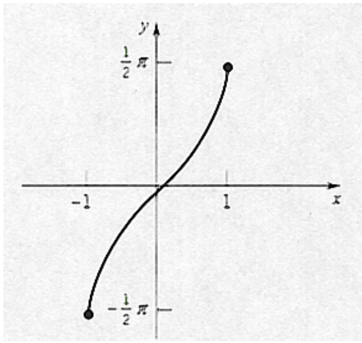
Και οι αντίστροφές τους λογαριθμικές συναρτήσεις



Η συνάρτηση : y= ημx, $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



Και η αντίστροφή της : y=τοξημx, [-1, 1]



ΚΑΠΟΙΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

y = ημx $\Leftrightarrow$ x = τοξημy ή y = τοξημx $\Leftrightarrow$ x = ημy

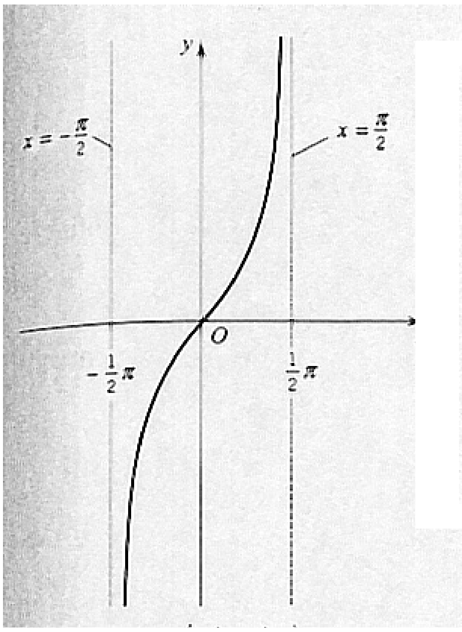
Η τιμή της συνάρτησης y = τοξημx για x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ προκύπτει απο τη σχέση $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ημy, που είναι y = $\frac{\pi}{3}$.

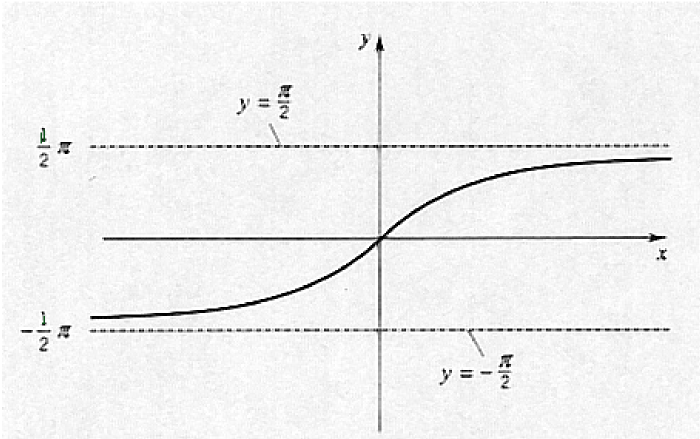
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΑΥΤΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

x	ημx
-π/2	-1
-π/3	$-\sqrt{3}/2$
-π/4	$-\sqrt{2}/2$
-π/6	-1/2
0	0
π/6	1/2
π/4	$\sqrt{2}/2$
π/3	$\sqrt{3}/2$
π/2	1

x	τοξημx
-1	-π/2
$-\sqrt{3}/2$	-π/3
$-\sqrt{2}/2$	-π/4
-1/2	-π/6
0	0
1/2	π/6
$\sqrt{2}/2$	π/4
$\sqrt{3}/2$	π/3
1	π/2

Η συνάρτηση : y= εφx, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ **Και η αντίστροφή της : y=τοξεφx, $(-\infty, \infty)$**





<u>ΚΑΠΟΙΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ</u>

y = εφx $\Leftrightarrow$ x = τοξεφy ή y = τοξεφx $\Leftrightarrow$ x = εφy

Η τιμή της συνάρτησης y = τοξεφx για x =1 προκύπτει απο τη σχέση 1= εφy, που είναι y = $\frac{\pi}{4}$.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΑΥΤΩΝ

x	εφx
-π/3	$-\sqrt{3}$
-π/4	-1
-π/6	$-\sqrt{3}/3$
0	0
π/6	$\sqrt{3}/3$
π/4	1
π/3	$\sqrt{3}$

x	τοξεφx
$-\sqrt{3}$	-π/3
-1	-π/4
$-\sqrt{3}/3$	-π/6
0	0
$\sqrt{3}/3$	π/6
1	π/4
$\sqrt{3}$	π/3

<u>ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ</u>

$\frac{d\kappa}{dx} = (\kappa)' = 0$, κ- σταθερά	$\frac{d\ln x}{dx} = (\ln x)' = \frac{1}{x}$
$\frac{dx^r}{dx} = (x^r)' = rx^{r-1}$, $r \in \mathbb{R}$	$\frac{d\alpha^x}{dx} = (\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$
$\frac{de^x}{dx} = (e^x)' = e^x$	$\frac{d\log_\alpha x}{dx} = (\log_\alpha x)' = \frac{1}{x\ln\alpha} = \frac{\log_\alpha e}{x}$

$\frac{d\eta\mu x}{dx} = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
$\frac{d\sigma\upsilon\nu x}{dx} = (\sigma\upsilon\nu x)' = -\ \eta\mu x$
$\frac{d\varepsilon\varphi x}{dx} = (\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1+\varepsilon\varphi^2 x$
$\frac{d\sigma\varphi x}{dx} = (\sigma\varphi x)' = -\ \frac{1}{\eta\mu^2 x} = -\ (1+\sigma\varphi^2 x)$

$\frac{d\tau o\xi\eta\mu x}{dx} = (\tau o\xi\eta\mu x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ -1< x < 1$
$\frac{d\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x}{dx} = (\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x)' = -\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ -1 < x < 1$
$\frac{d\tau o\xi\varepsilon\varphi x}{dx} = (\tau o\xi\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d\tau o\xi\sigma\varphi x}{dx} = (\tau o\xi\sigma\varphi x)' = -\ \frac{1}{1+x^2}$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$u=g(x) \Rightarrow du=\frac{dg(x)}{dx}dx = g'(x)dx$$

ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$\int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + c\ ,\ \ r \neq -1$
$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + c$
$\int e^u du = e^u + c$
$\int \alpha^u du = \frac{\alpha^u}{\ln\alpha} + c$
$\int \eta\mu u\, du = -\sigma\upsilon\nu u + c$

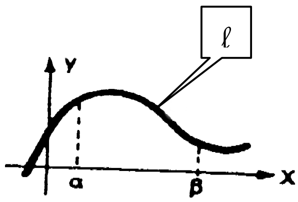
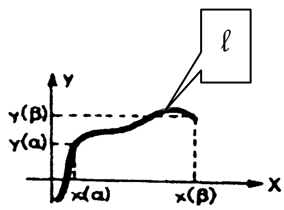
$\int \sigma\upsilon\nu u\, du = \eta\mu u + c$
$\int \frac{1}{\eta\mu^2 u} du = -\sigma\varphi u + c$
$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u} du = \varepsilon\varphi u + c$
$\int \frac{1}{1+u^2} du = \tau o\xi\varepsilon\varphi u + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \tau o\xi\eta\mu u + c\ ,\ \lvert u\rvert < 1$

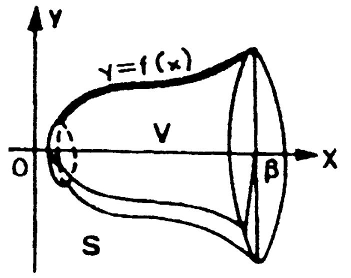
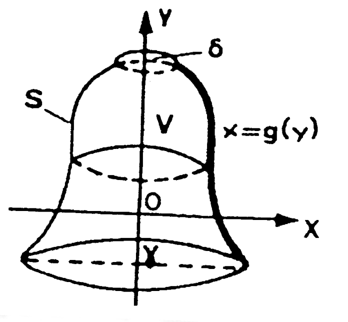
ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Μορφή Ολοκληρώματος	Αντικατάσταση	Διαφορικό
$\int R(e^x)dx$	$e^x = t \Leftrightarrow x = \ln t$	$dx=\frac{dt}{t}$
$\int R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)dx$	$\varepsilon\varphi\frac{x}{2} = t \Leftrightarrow x = \tau o\xi\varepsilon\varphi t$ $\eta\mu x=\frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \sigma\upsilon\nu x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$	$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$
$\int R(\eta\mu^2 x, \sigma\upsilon\nu^2 x)\, dx$	$\varepsilon\varphi x = t \Leftrightarrow x = \tau o\xi\varepsilon\varphi t$ $\eta\mu^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}\ ,\ \sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{2}{1+t^2}$	$dx=\frac{1}{1+t^2}dt$

$\int R(x, \sqrt[\nu]{\alpha x+\beta})dx$	$\sqrt[\nu]{\alpha x+\beta}=t \Leftrightarrow x=\dfrac{t^{\nu}-\beta}{\alpha}$	$dx=\dfrac{\nu}{\alpha}t^{\nu-1}dt$
$\int R(x, \sqrt{\alpha^2-x^2})dx$	$x=\alpha\eta\mu t \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2-x^2}=\alpha\sigma\upsilon\nu t$	$dx=\alpha\sigma\upsilon\nu t\ dt$
$\int R(x, \sqrt{\alpha^2+x^2})\ dx$	$x=\alpha\varepsilon\varphi t \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+x^2}=\dfrac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu t}$	$dx=\alpha(1+\varepsilon\varphi^2 t)dt$ ή $dx=\dfrac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt$
$\int R(x, \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})dx$	(i) $\alpha>0$ $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\sqrt{\alpha}\,(x\text{-}t) \Leftrightarrow x=\dfrac{\alpha t^2-\gamma}{\beta+2\alpha t}$ (ii) $\rho_1 \neq \rho_2$ οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\sqrt{\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)}=$ $=(x\text{-}\rho_1)t$ $\Leftrightarrow x=\dfrac{\rho_1 t^2-\alpha\rho_2}{t^2-\alpha}$	(i) $dx=\dfrac{2\alpha(\alpha t^2+\beta t+\gamma)}{(\beta+2\alpha t)^2}dt$ (ii) $dx=\dfrac{2\alpha t(\rho_2-\rho_1)}{(t^2-\alpha)^2}dt$

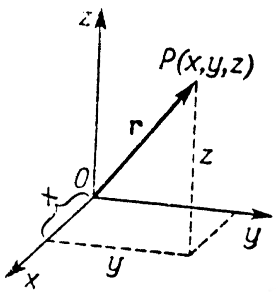
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Εφαρμογή	Σχήμα	Τύπος
Μήκος καμπύλης c που δίνεται με τη συνάρτηση y=f(x), απο x=α μέχρι x=β.		$\ell=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}dx$
Μήκος καμπύλης c που δίνεται με τις παραμετρικές συναρτήσεις x=x(t), y=y(t), απο t=α μέχρι t=β.		$\ell=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}dt$

Όγκος και Επιφάνεια εκ περιστροφής γύρω απο τον άξονα των x της καμπύλης c που δίνεται με τη συνάρτηση y=f(x), απο x=α μέχρι x=β.		$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx$ $S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$
Όγκος και Επιφάνεια εκ περιστροφής γύρω απο τον άξονα των y καμπύλης c που δίνεται με τη συναρτήση x=x(y), απο y=γ μέχρι y=δ.		$V=\pi\int_{\gamma}^{\delta} x^2 dy$ $S=2\pi\int_{\gamma}^{\delta} x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$

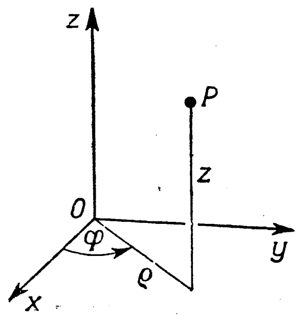
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

Καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y,z) ενός σημείου P στο χώρο.



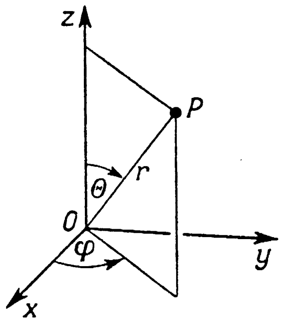
Κυλινδρικές συντεταγμένες (φ,ρ,z) ενός σημείου P και οι σχέσεις τους με τις καρτεσιανές συντεταγμένες.

x= ρσυνφ, y= ρημφ, z=z



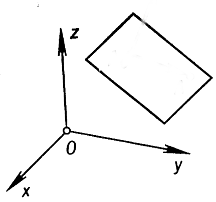
Σφαιρικές συντεταγμένες (φ,θ,r) ενός σημείου P και οι σχέσεις τους με τις καρτεσιανές συντεταγμένες.

x= r ημθ συνφ   y= r ημθ ημφ   z= r συνθ



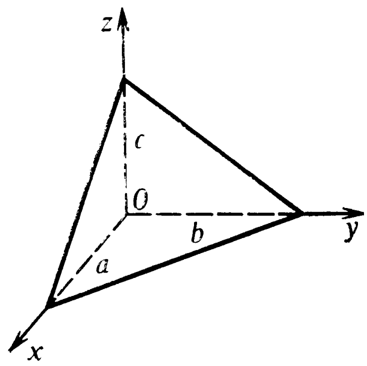
Η γενική εξίσωση ενός επιπέδου :

$$Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$$



Η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται απο τα σημεία $P_1(a,0,0)$, $P_2(0,b,0)$, $P_3(0,0,c)$:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

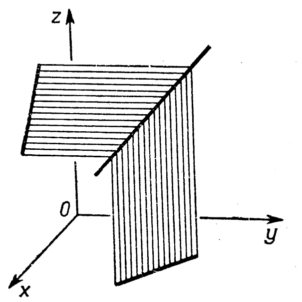


Η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται απο τα σημεία $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

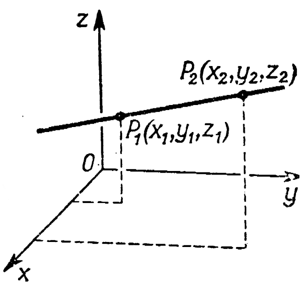
Η γενική εξίσωση μιας ευθείας στο χώρο θεωρείται ως η τομή δύο επιπέδων, δηλ. είναι της μορφής:

$$A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$$
$$A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$$



Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται απο δύο σημεία P_1, P_2 είναι η εξής:

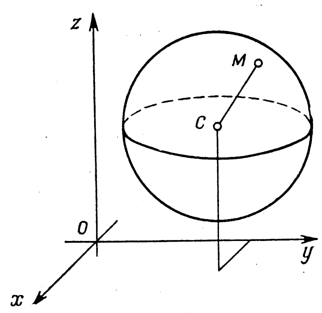
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$



ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

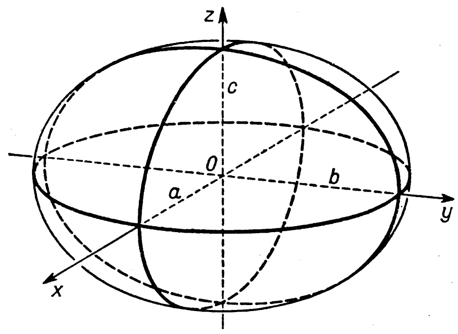
Η εξίσωση της σφαίρας με κέντρο το σημείο C(a,b,c) και ακτίνα R :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$$



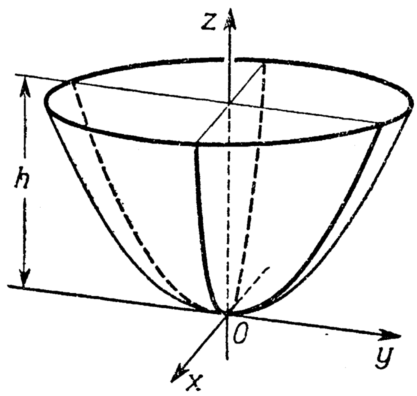
Η εξίσωση του ελλειψοειδούς με κέντρο O(0,0,0) και ημιάξονες a, b, c :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$$



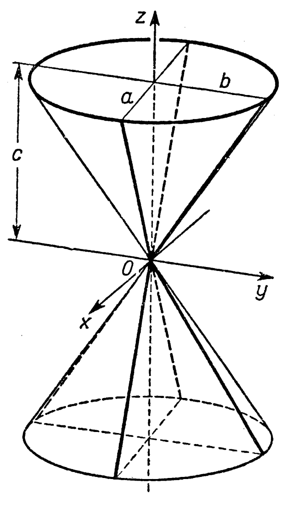
Η εξίσωση του ελλειπτικού παραβολοειδούς :

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ ,\ z\leq h$$



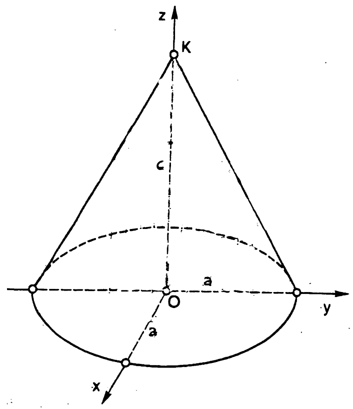
Η εξίσωση του ελλειπτικού κώνου :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 0$$



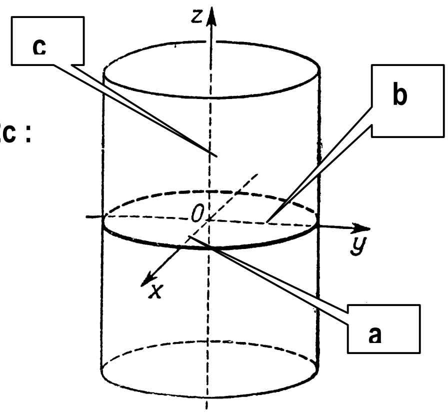
Η εξίσωση του κυκλικού κώνου με βάση στο επίπεδο xOy και κορυφή το σημείο K(0,0,c) :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{(z-c)^2}{c^2}=0\ ,\ z\leq c$$



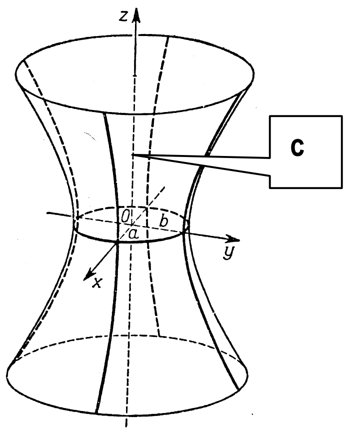
Η εξίσωση του ελειπτικού κυλίνδρου ύψους 2c :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad |z|\leq c$$



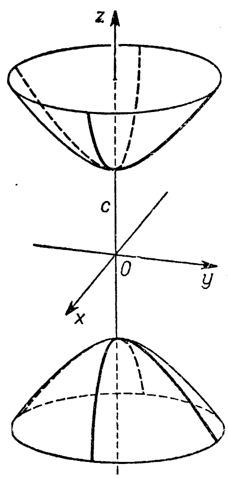
Η εξίσωση του μονόχωνου υπερβολοειδούς :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



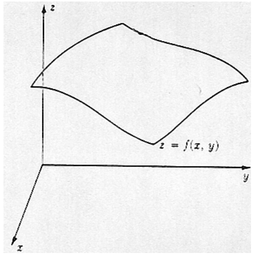
Η εξίσωση του δίχωνου υπερβολοειδούς :

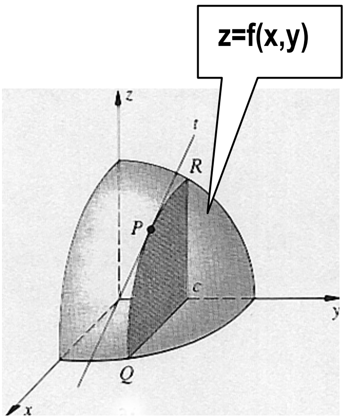
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ Ή ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΏΝ

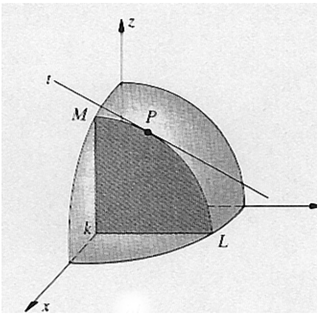
Η συνάρτηση δύο μεταβλητών z=f(x,y) παριστάνει μια επιφάνεια στο χώρο.





Αν z=f(x,y) και y=c , τότε η z=f(x,c) είναι συνάρτηση μιας μεταβλητης και παριστάνει μία καμπύλη στο χώρο. Στην περίπτωση αυτή ορίζεται η $\left.\dfrac{df(x,c)}{dx}\right|_{x=k}$ **, που ονομάζεται <u>μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο P(k,c)</u> και συμβολίζεται** $\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=k\\y=c}}$ **, δηλ.**

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=k\\y=c}} = \left.\frac{df(x,c)}{dx}\right|_{x=k} .$$



Όμοια, αν z=f(x,y) και x=k τότε ορίζεται η <u>μερική παραγωγος της f ως προς y στο σημείο P(k,c)</u> με τον εξής τρόπο:

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=k\\y=c}} = \left.\frac{df(k,y)}{dy}\right|_{y=c} .$$

<u>ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</u>

Αν z=f(x,y) και x=φ(t) , y=ψ(t) , τότε $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$.

Αν z=f(x,y) και x=g(u,v) , y=h(u,v), τότε

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} .$$

Αν z=f(x) και x=g(u,v), τότε

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} , \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} .$$

Το <u>ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ</u> της z=f(x,y) ορίζεται ως $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

Ανάλογα ισχύουν και για συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών

<u>ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ</u>

Αν μια συνάρηση z=f(x,y) έχει μερικές παραγώγους πρώτης και δευτερης τάξης, τότε τα σημεία (x_0,y_0) για τα οποία

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$$

είναι <u>κρίσιμα σημεία</u>, δηλ. είναι πιθανά σημεία ακρότατων της z=f(x,y). Για να δούμε αν αυτά αποτελούν ακρότατα θέτουμε

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}=A,\quad \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}=B,\quad \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}=\Gamma,$$

οπότε

1) αν $A\Gamma-B^2>0, A>0$, τότε η f(x,y) έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο (x_0,y_0).

2) αν $A\Gamma-B^2>0, A<0$, τότε η f(x,y) έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο (x_0,y_0).

3) αν $A\Gamma-B^2<0$, τότε η f(x,y) <u>δεν</u> έχει ακρότατο στο σημείο (x_0,y_0).

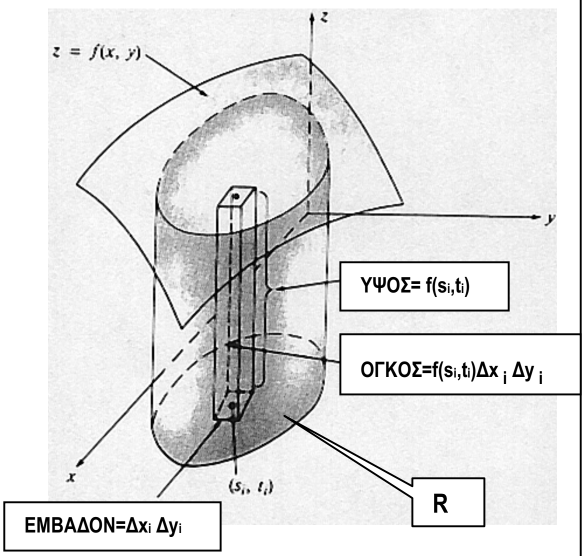
4) αν $A\Gamma-B^2=0$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

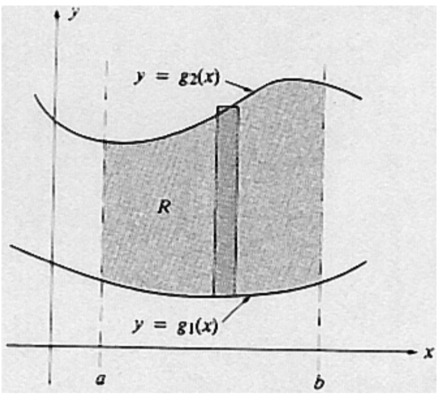
<u>ΔΙΠΛΑ ΚΑΙ ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ</u>

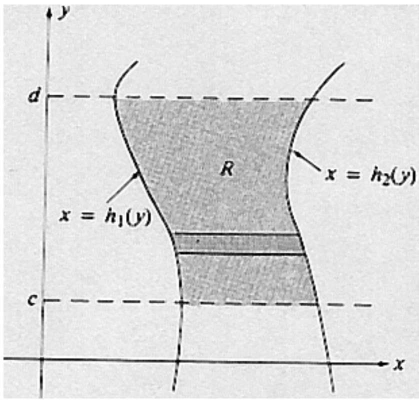
<u>ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ</u>

Αν z=f(x,y) έχει πεδίο ορισμού το R, τότε ορίζεται το διπλό ολοκλήρωμα της z ως εξής:

$$\iint_R f(x,y)dxdy=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta x_i\Delta y_i$$







$$\iint_R f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

$$\iint_R f(x,y)=\int_c^d\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

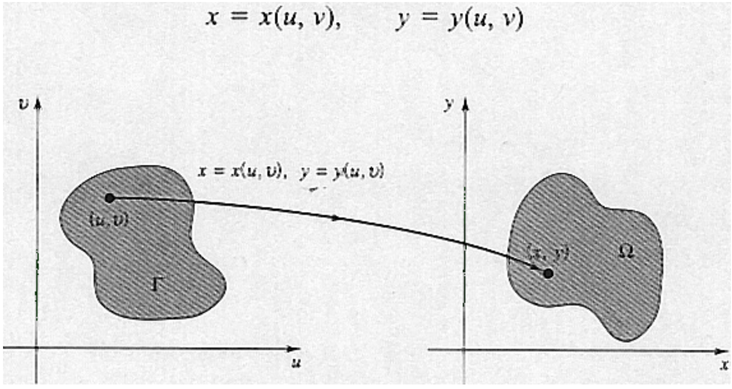
ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΕ ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Είναι γνωστό ότι όταν γίνεται αλλαγή μεταβλητής $x=\varphi(\omega)$ στην απλή ολοκλήρωση, τότε το αρχικό ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται ως εξής :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\omega_1}^{\omega_2} f\left[\varphi(\omega)\right]\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}d\omega .$$

Στην περίπτωση των διπλών ολοκληρωμάτων η αλλαγή μεταβλητών γίνεται με το μετασχηματισμό :

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v)$$



Τότε το διπλό ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται ως εξής :

$$\iint_R f(xy)dxdy = \iint_{R'} f\left[x(u,v), y(u,v)\right]\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv ,$$

όπου

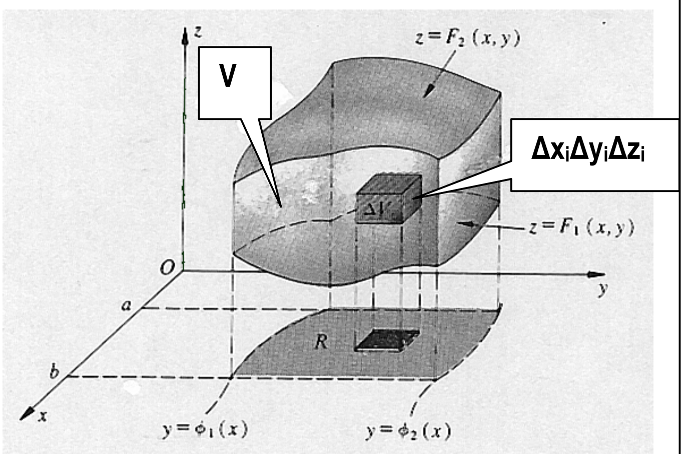
$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$ **, η Ιακωβιανή.**

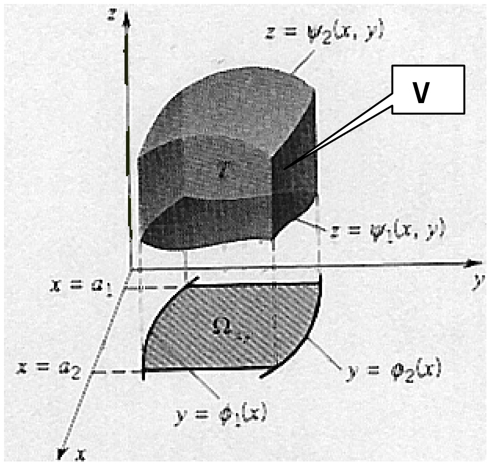
ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Αν w=f(x,y,z) έχει πεδίο ορισμού το V, τότε ορίζεται το τριπλό ολοκλήρωμα της w ως εξής:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$





$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right]dx \quad .$$

ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Αν $x=x(u,v,t)$, $y=y(u,v,t)$ και $z=z(u,v,t)$, τότε

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(x(u,v,t),y(u,v,t),z(u,v,t))\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,t)}\right| dudvdt \ ,$$

με

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} \ , \text{ η Ιακωβιανή .}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Δύο διανύσματα $\vec{a} = a_1\vec{x}_0 + a_2\vec{y}_0 + a_3\vec{z}_0 = (a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b} = b_1\vec{x}_0 + b_2\vec{y}_0 + b_3\vec{z}_0 = (b_1,b_2,b_3)$ **είναι ίσα εάν και μόνο εάν** $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

Το μέτρο ενός διανύσματος $\vec{a}$ **ορίζεται ως** $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Το άθροισμα δύο διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$ **ορίζεται ως** $\vec{a} + \vec{b} = (a_1+b_2)\vec{x}_0 + (a_2+b_2)\vec{y}_0 + (a_3+b_3)\vec{z}_0$.

Η διαφορά δύο διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$ **ορίζεται ως** $\vec{a} - \vec{b} = (a_1-b_1)\vec{x}_0 + (a_2-b_2)\vec{y}_0 + (a_3-b_3)\vec{z}_0$.

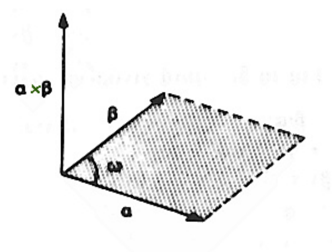
Το γινόμενο αριθμού λ επι διάνυσμα ορίζεται ως $\lambda\cdot\vec{\mathbf{a}} = \lambda a_1\vec{\mathbf{x}}_0 + \lambda a_2\vec{\mathbf{y}}_0 + \lambda a_3\vec{\mathbf{z}}_0$ **.**

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ **ορίζεται ως** $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$**.**

Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ **ορίζεται ως**

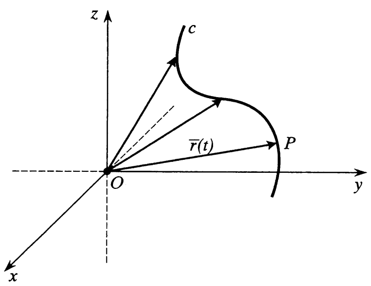
$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} = (a_2b_3-a_3b_2)\vec{\mathbf{x}}_0+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{\mathbf{y}}_0+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{\mathbf{z}}_0$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{x}}_0 & \vec{\mathbf{y}}_0 & \vec{\mathbf{z}}_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$



$$\left|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\right| = \left|\vec{\mathbf{a}}\right|\cdot\left|\vec{\mathbf{b}}\right|\cdot\text{ημω} \text{ .}$$

<u>ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ</u>



Μια διανυσματική συνάρτηση μιας μεταβλητής είναι η εξής :

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\vec{\mathbf{x}}_0+y(t)\vec{\mathbf{y}}_0+z(t)\vec{\mathbf{z}}_0 = (x(t),y(t),z(t))\ ,\quad t\in E\subset\mathbb{R}\ .$$

Μια διανυσματική συνάρτηση δύο μεταβλητών είναι της εξής μορφής :

$$\vec{\mathbf{r}}(u,v) = x(u,v)\vec{\mathbf{x}}_0 + y(u,v)\vec{\mathbf{y}}_0 + z(u,v)\vec{\mathbf{z}}_0 = (x(u,v),y(u,v),z(u,v))\ ,\ (u,v)\in E\times E\subset\mathbb{R}^2 .$$

<u>ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ</u>

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\mathbf{x}}_0+\frac{dy(t)}{dt}\vec{\mathbf{y}}_0+\frac{dz(t)}{dt}\vec{\mathbf{z}}_0\ ,$$

$$\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}(u,v)}{\partial u} = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\vec{\mathbf{x}}_0+\frac{\partial y(u,v)}{\partial u}\vec{\mathbf{y}}_0+\frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\vec{\mathbf{z}}_0\ ,$$

$$\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}(u,v)}{\partial v} = \frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\vec{\mathbf{x}}_0+\frac{\partial y(u,v)}{\partial v}\vec{\mathbf{y}}_0+\frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\vec{\mathbf{z}}_0\ .$$

Το διαφορικό μιας διανυσματικής συνάρτησης $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$ **είναι το εξής :**

$$d\vec{\mathbf{r}} = dx\,\vec{\mathbf{x}}_0+dy\,\vec{\mathbf{y}}_0+dz\,\vec{\mathbf{z}}_0\ .$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Αν ω=f(x,y,z) είναι μια πραγματική συνάρτηση, τότε ορίζεται η διανυσματική συναρτηση :

$$\mathbf{grad}f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\mathbf{x}}_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\mathbf{y}}_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{\mathbf{z}}_0 \ ,$$

η οποία ονομάζεται <u>κλίση</u>.

Αν $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}(x,y,z) = V_1(x,y,z)\,\vec{\mathbf{x}}_0 + V_2(x,y,z)\,\vec{\mathbf{y}}_0 + V_3(x,y,z)\,\vec{\mathbf{z}}_0$ **είναι μια διανυσματική συνάρτηση, τότε ορίζεται η πραγματική συνάρτηση :**

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{V}} = \nabla\cdot\vec{\mathbf{V}} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \ ,$$

η οποία ονομάζεται <u>απόκλιση.</u>

Αν $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}(x,y,z) = V_1(x,y,z)\,\vec{\mathbf{x}}_0 + V_2(x,y,z)\,\vec{\mathbf{y}}_0 + V_3(x,y,z)\,\vec{\mathbf{z}}_0$ **είναι μια διανυσματική συνάρτηση, τότε ορίζεται η διανισματική συνάρτηση :**

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{V}} = \nabla\times\vec{\mathbf{V}} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\vec{\mathbf{x}}_0 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\vec{\mathbf{y}}_0 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\vec{\mathbf{z}}_0 =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{x}}_0 & \vec{\mathbf{y}}_0 & \vec{\mathbf{z}}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \ ,$$

η οποία ονομάζεται <u>στροφή</u>.

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Αν η διανυσματική συνάρτηση $\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{x,y}) = P(x,y)\,\vec{\mathbf{x}}_0 + Q(x,y)\,\vec{\mathbf{y}}_0$ **είναι ορισμένη επί της καμπύλης c η οποία παριστάνεται με τη διανυσματική συνάρτηση**

$$\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{t}) = x(t)\ \vec{\mathbf{x}}_0 + y(t)\ \vec{\mathbf{y}}_0 \ , \quad \mathbf{t}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]$$

τότε ορίζεται το <u>επικαμπύλιο ολοκλήρωμα</u> στο επίπεδο ως

$$\int_{\mathbf{c}} \vec{\mathbf{F}}(x,y)\cdot \mathbf{d}\,\vec{\mathbf{r}} = \int_{\mathbf{c}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} P(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt}dt + Q(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}dt \ .$$

Ο ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ GREEN

Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε κλειστή καμπύλη c η οποία περικλείει τον τόπο R ισχύει ο εξής τύπος :

$$\oint_{\mathbf{c}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \ ,$$

γνωστός ως <u>τύπος του Green</u>.