

Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΑ ΤΟΥ ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΟΥ ΥΠΟΒΑΘΡΟΥ ΤΩΝ ΔΑΣΚΑΛΩΝ ΤΟΥ ΣΧΕΤΙΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

N. Καστάνη

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όλοι όσοι διδάσκουν Μαθηματικά έχουν ως εφόδιο τις αυθύπαρκτες και τελεσίδικες μαθηματικές γνώσεις που συσώρευσαν στη διάρκεια των σπουδών τους. Έχουν επίσης ως παρακαταθήκη την εξάσκησή τους στο χειρισμό των μαθηματικών ασκήσεων, που απέκτησαν κατά τη μακρόχρονη τριβή τους με τις εξεταστικές απαιτήσεις της σχολικής και πανεπιστημιακής μαθηματικής εκπαίδευσης. Μια εξάσκηση που μπορεί να χαρακτηριστεί από μια προσήλωση σε κατηγοροποιημένες και διαδικαστικές μορφές συμπεριφοράς κι αντίληψης.

Αρκεί όμως αυτός ο εξοπλισμός για τη διαμόρφωση κι ανάπτυξη μιας μαθηματικής μόρφωσης στα πλαίσια της γενικής παιδείας; Με άλλα λόγια, το απολυτοκρατικό υπόβαθρο των μαθηματικών σπουδών αυτών που διδάσκουν ή πρόκειται να διδάξουν σχολικά Μαθηματικών αποτελεί την ικανή προϋπόθεση για να καλλιεργήσουν ένα επίπεδο μαθηματικής παιδείας στην ευρύτερη κλίμακα των μαθητών; Είναι δηλαδή επαρκές για να μπορέσουν να ερμηνεύσουν και να εξηγήσουν τις σχολικές μαθηματικές γνώσεις, που υπερβαίνουν τις μηχανιστικές συμπεριφορές της απλής αναμετάδοσης της σχολικής ύλης να αναπτύξουν την κατανόηση και την κριτική σκέψη;

Είναι αλήθεια ότι αυτός ο προβληματισμός φέρνει στο προσκήνιο το ζήτημα της επιστημονικής και επαγγελματικής εξειδίκευσης αυτών που διδάσκουν ή πρόκειται να διδάξουν Μαθηματικά. Προβάλλει δηλαδή το θέμα όχι απλά της διαφοροποίησής τους από τις άλλες ειδικότητες των μαθηματικών, λόγου χάρη του αλγεβρίστα ή του στατιστικολόγου, αλλά των ειδικών προϋποθέσεων για την επιστημονική τους ιδιαιτερότητα και την επαγγελματική τους κατάρτιση. Για το σκοπό αυτό αξίζει να τονιστεί η έμφαση που δίνεται από ειδικούς της Διδακτικής των Μαθηματικών στην ετερογένεια των γνωστικών πλαισίων και απαιτήσεων μεταξύ αυτών που θα διδάξουν Μαθηματικά και αυτών που θα εξειδικευτούν στα καθαρά ή τα εφαρμοσμένα Μαθηματικά.¹

Αν επικεντρωθεί τώρα η προσοχή στην επιστημολογική και λειτουργική υποδομή αυτών που διδάσκουν ή πρόκειται να διδάξουν Μαθηματικά, τότε αποκαλυπτική είναι η επισήμανση² των τεσσάρων διαστάσεων της: **της γνώσης-της γνώσης σχετικά με τη γνώση-της γνώσης για**

¹ Βλ. Fletcher, T.J.: Is the Teacher of Mathematics a Mathematician or Not?, στο βιβλίο: Steiner, H.-G. *The Education of Mathematics Teacher*, Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld, 1979, όπως και η δημοσίευση: Dörfler, W.: Mathematics, Mathematics Education and Mathematicians: An Unbalanced Triangle, *Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction*, December 2000.

² Βλ. Καλδρυμίδου, Μ. / Καστάνη, Ν. / Οικονόμου, Α.: Μόρφωση και Επαγγελματική Κατάρτιση των Δασκάλων των Μαθηματικών, *Διάσταση*, 1-2, 1991, σελ. 18-28, ειδ. σελ. 26.

δράση-της δράσης. Η πρώτη διάσταση, αυτή **της γνώσης**, περιλαμβάνει: τη σφαιρική μάθηση των προχωρημένων μαθηματικών θεωριών που αποτελούν τις σύγχρονες βάσεις της Μαθηματικής Επιστήμης και μια προσέγγιση των σχολικών Μαθηματικών από ανώτερη σκοπιά, παράλληλα με μια παιδαγωγική και ψυχολογική θεώρηση της μαθηματικής παιδείας. Η δεύτερη διάσταση, δηλ. **της γνώσης σχετικά με τη γνώση**, αφορά το παρασκήνιο της γνώσης, με άλλα λόγια την επίγνωση της φύσης, του ρόλου και της δυναμικής των Μαθηματικών. Η τρίτη διάσταση, **της γνώσης για δράση**, έχει να κάνει με το θεωρητικό πλαίσιο της οργάνωσης και μεθόδευσης της διδασκαλίας των σχολικών Μαθηματικών, όπως και της αξιολόγησης του μαθηματικού έργου στην τάξη. Και η τέταρτη διάσταση, **της δράσης**, αντιπροσωπεύει την πρακτική εξάσκηση και την εμπειρία στη διδασκαλία των σχολικών Μαθηματικών και την ανάπτυξη της σχολικής μαθηματικής παιδείας γενικότερα.

Οι διαστάσεις αυτές απεικονίζουν τις καθοριστικές συνιστώσες της επιστημονικής μόρφωσης και της επαγγελματικής κατάρτισης αυτών που διδάσκουν ή πρόκειται να διδάξουν Μαθηματικά στο σχολείο. Πιο συγκεκριμένα, η συνισταμένη αυτών των συνιστωσών προσδιορίζει το ολοκληρωμένο εκείνο υπόβαθρο που διαμορφώνει και στηρίζει τους εκπαιδευτικούς με αρμοδιότητα τα σχολικά Μαθηματικά. Χωρίς δυσκολία, όμως, μπορεί να διαπιστωθεί ότι στην ελληνική πραγματικότητα η εν λόγω συνισταμένη είναι ακρωτηριασμένη. Στην προκειμένη περίπτωση η επιστημονική μόρφωση που παρέχουν τα Τμήματα Μαθηματικών στην Ελλάδα είναι απόλυτα προσηλωμένα σε μια συσσωρευτική αντίληψη της μαθηματικής γνώσης, όπου δεσπόζουν τα ιδιόρρυθμα τεχνάσματα εφαρμοσμένα σε προδιαγραμμένες θεματολογίες. Το μορφωτικό τους ιδεώδες είναι αυτό των σκληρών Μαθηματικών, δηλ. των ερευνητικών Μαθηματικών, που εν πολλοίς διαπνέονται από μια νοοτροπία των Μαθηματικών για τα Μαθηματικά. Με άλλα λόγια επικρατεί μια τεχνοκρατική αντίληψη στις μαθηματικές σπουδές στην Ελλάδα. Είναι μάλιστα πολύ ενδεικτική η άποψη, που είναι αρκετά διαδεδομένη στα εν λόγω Τμήματα, ότι *“η ποιότητα της διδασκαλίας στα Πανεπιστήμια ακολουθεί την έρευνα [στα σκληρά Μαθηματικά] σαν σκιά”*, ή ότι *“για να είσαι καλός δάσκαλος των Μαθηματικών πρέπει να ξέρεις καλά Μαθηματικά και να είσαι καλός άνθρωπος”*.³ Κι αυτό δεν είναι επιλήξιμο αν η αποκλειστική αποστολή τους είναι η επιστημονική προετοιμασία των αυριανών μαθηματικών της έρευνας. Η αντίφαση είναι ότι η συντριπτική πλειοψηφία των πτυχιούχων αυτών των Τμημάτων έχουν, στην πραγματικότητα, ως αντικείμενο απασχόλησης τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Η περιχαράκωση λοιπόν της προετοιμασίας των μαθηματικών της Μέσης Εκπαίδευσης στα πρότυπα των μαθηματικών της έρευνας αποτελεί μέγιστο εμπόδιο στην ανάπτυξη των ικανοτήτων κατανόησης της επιστημολογικής και πολιτιστικής υποδομής των Μαθηματικών και κατά συνέπεια μειώνει δραστικά τις δυνατότητες επικοινωνίας με μη μαθηματικούς. Από την άλλη μεριά τα Παιδαγωγικά Τμήματα αν και παρέχουν μια ευρεία παιδαγωγική και διδακτική μόρφωση, που στα Τμήματα Μαθηματικών αυτού του είδους μόρφωση είναι κατά κανόνα περιθωριοποιημένη έως ανύπαρκτη, εν τούτοις υστερούν κι αυτά, εκτός κάποιων εξαιρέσεων, στην καλλιέργεια **της γνώσης σχετικά με τη μαθηματική γνώση**, δηλ. υπολείπονται στο είδος εκείνο των σπουδών που αναδεικνύει το γνωστικό και πολιτισμικό υπόβαθρο της μαθηματικής δραστηριότητας.

Από τις επισημάνσεις αυτές διαφαίνεται ότι οι μαθηματικές σπουδές στα Ελληνικά Πανεπιστήμια κυριαρχούνται από μια τεχνοκρατική συσσώρευση, δηλ. από μια αθροιστική αντίληψη απόλυτων, αυθύπαρκτων, αμετάβλητων μαθηματικών γνώσεων⁴ και στερούνται της μεταγνωστικής μόρφωσης, δηλ. της “ευαισθητοποιημένης” γνώσης για τη φύση, τη σημασία

³ Βλ. Καστάνη, Ν.: *Μια Εισαγωγή στη Διδακτική των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη 1996, σελ. 29.

⁴ Βλ. Καστάνη, Ν.: *Τύποι διδακτικής ορθολογικότητας και είδη ιστορικής κατανόησης των Μαθηματικών*, *Θέματα Παιδείας*, τευχ. 1, 2001, σελ. 51-57, ειδ. σελ. 52-53.

και το ρόλο των Μαθηματικών. Έχει ωστόσο υπογραμμιστεί η σημασία της μεταγνωστικής παιδείας στη διδακτική δραστηριότητα των εκπαιδευτικών γενικά⁵ και των μαθηματικών ειδικότερα.⁶

ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΤΑΓΝΩΣΗ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Διαισθητικά φαίνεται ότι ο περιορισμός της μαθηματικής γνώσης στο πλαίσιο της **απλής πληροφόρησης** δεν οδηγεί παρά σε μια μηχανιστική αποδοχή και συμπεριφορά. Διαφαίνεται επίσης ότι για τον απεγκλωβισμό από μια τέτοια περιχαράκωση απαιτείται ο εμπλουτισμός της μαθηματικής μόρφωσης με μια “ισχυρή δόση” **επίγνωσης** των Μαθηματικών, δηλ. συνειδητοποίησης του παρασκήνιου της μαθηματικής γνώσης και της μαθηματικής παιδείας γενικότερα. Εύκολα, τώρα, μπορεί να παρατηρηθεί ότι το πεδίο καλλιέργειας κι ανάπτυξης της επίγνωσης του χαρακτήρα και του ρόλου των Μαθηματικών δεν είναι άλλο από το μεταγνωστικό υπόβαθρο της μαθηματικής κουλτούρας. Γι’ αυτό το λόγο, δημιουργείται ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την υφή της μεταγνώσης στα πλαίσια της μαθηματικής παιδείας.

Στο πλαίσιο της Διδακτικής των Μαθηματικών ο όρος **μεταγνώση των Μαθηματικών** παρουσιάστηκε για πρώτη φορά το 1975 από την ερευνητική ομάδα του Ινστιτούτου Διδακτικής των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Bielefeld της Γερμανίας.⁷ Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του σεμιναρίου για τις “Τάσεις και τα Προβλήματα της Εκπαίδευσης των Δασκάλων των Μαθηματικών”, που πραγματοποιήθηκε στις 2 με 6 Δεκεμβρίου 1975 στο Bielefeld.⁸ Μια σχετική, όμως, προσέγγιση είχε αναπτύξει νωρίτερα ο διαπρεπής άγγλος ειδικός στη Διδακτική των Μαθηματικών Richard R. Skemp. Ήδη από το 1961 χρησιμοποίησε τον όρο **αναστοχαστική νοημοσύνη** (*reflective intelligence*),⁹ με την έννοια “της ικανότητας να αντιμετωπίζει κάποιος τις δικές του νοητικές διαδικασίες ως αντικείμενο συνειδητής παρατήρησης”,¹⁰ ένα είδος δηλ. ενδοσκόπησης και αυτοκριτικής ενός ατόμου για τις νοητικές του λειτουργίες και μεταλλαγές. Όπως μάλιστα διευκρίνισε, σε μια δημοσίευσή του,¹¹ η ιδέα αυτή αναπτύχθηκε από τον Jean Piaget στο αξιοσημείωτο βιβλίο του *La Psychologie de l' Intelligence*, που πρωτοεκδόθηκε το 1947, με τον όρο “αναστοχαστική αφαίρεση” και με τη σημασία της κατανόησης ή της συνειδητοποίησης του μηχανισμού άντλησης, αναδιοργάνωσης και εδραίωσης της γνώσης. Η αναστοχαστική λοιπόν νοημοσύνη αποτελεί ένα είδος αυτο-επίγνωσης του τρόπου ανάπτυξης της σκέψης, μ’ άλλα λόγια είναι μια προσέγγιση στο παρασκήνιο της γνωστικής συμπεριφοράς ενός ανθρώπου και κατά συνέπεια αντιπροσωπεύει μια ψυχολογική διάσταση του μεταγνωστικού υπόβαθρου της μαθηματικής γνώσης.

⁵ Βλ. Smith, B.O. : *Teachers for the Real World*, The American Association of Colleges for Teacher Education, 1969, σελ. 125 κ.ε.

⁶ Βλ. Otte, M. : Η Μόρφωση των Δασκάλων, *Διάσταση*, 1, 1994, σελ. 52-59, ειδ. σελ. 56 κ.ε.

⁷ που απαρτίζονταν από τους : Thomas Mies, Michael Otte, Veronika Reiss, Heinz Steinbring, Dankwart Vogel, και συνεργαζόταν ο Gert Schubring.

⁸ Βλ. *Tendencies and Problems of the Training of Mathematics Teachers, Materials prepared by the working group “Mathematiklehrerbildung”*, Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, December 1975, σελ. 106. Πρόκειται για ένα ερευνητικό πρόγραμμα που ολοκληρώθηκε το 1981 με την έκδοση του βιβλίου: Bromme, R. et al. : *Perspektiven für die Ausbildung der Mathematiklehrer*, Aulis Verlag Deubner, 1981.

⁹ Βλ. Skemp, R. R. : Reflective intelligence and mathematics, *British Journal for the Educational Psychology*, 31, 1961, σελ. 45-55.

¹⁰ Βλ. Skemp, R. R.: *Intelligence, learning and action*, Wiley, 1979, σελ. 175.

¹¹ Βλ. Skemp, R. R.: Reflective Intelligence, and the Use of Symbols, στο βιβλίο *The Process of Learning Mathematics*, ed. by L. R. Chapman, Pergamon Press, 1972, σελ. 195-205, ειδ. σελ. 195.

Αξίζει να αναφερθεί ότι ο όρος μεταγνώση (metacognition) εμφανίστηκε στη Γνωστική Ψυχολογία στις αρχές της δεκαετίας του 1970,¹² την εποχή δηλ. της πρωτοανάπτυξης του συγκεκριμένου κλάδου της Ψυχολογίας και σε συνάρτηση με τη δυναμική και τις αναζητήσεις της Τεχνητής Νοημοσύνης και των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών γενικότερα. Στα επόμενα χρόνια οι γνωστικοί ψυχολόγοι έδειξαν ενδιαφέρον στο συγκεκριμένο θέμα και ανέλυαν διάφορες πλευρές του.¹³ Ο σχετικός προβληματισμός είχε ως αφετηρία τα ερωτήματα για το “πως και υπό ποιες συνθήκες το άτομο συλλέγει, συντονίζει, και ολοκληρώνει την υπάρχουσα γνώση και δεξιότητές του σε νέες λειτουργικές οργανώσεις”. Οπότε υποστήριζαν ότι “για να γίνει κάτι τέτοιο θα πρέπει το άτομο να κατανοεί ποια είναι η υπάρχουσα γνώση του, αν αυτή επαρκεί για την αντιμετώπιση της συγκεκριμένης κατάστασης, αν πρέπει να τροποποιηθεί και να προσαρμοστεί στις νέες συνθήκες, αν χρειάζεται σχεδιασμός και στρατηγική πριν τη λύση του προβλήματος, αν η εκτέλεση των ενεργειών επίλυσης είναι ορθή και οδηγεί στο επιζητούμενο αποτέλεσμα. Αυτού του είδους η κατανόηση κινείται στην πραγματικότητα σε ένα επίπεδο ανώτερο από το επίπεδο της αυτόματης γνωστικής επεξεργασίας ή του εκτελεστικού μηχανισμού, γιατί προϋποθέτει ενημερότητα από πλευράς του ατόμου για προηγούμενες γνωστικές καταστάσεις. Για το λόγο αυτό είναι μετα-, ακολουθεί και παρακολουθεί τη γνώση, είναι μεταγνώση. Η μεταγνώση αναφέρεται, επομένως, στη γνώση που διαθέτει το άτομο για τις γνωστικές του λειτουργίες και τα προϊόντα τους και για ό,τι σχετίζεται με αυτά. Συνέπεια της γνώσης αυτής είναι η ενεργός παρέμβαση, παρακολούθηση, διόρθωση και συντονισμός των γνωστικών λειτουργιών προκειμένου να εξυπηρετηθεί κάποιος στόχος”.¹⁴

Μέσα σ' αυτό το πλαίσιο η έμφαση των αναλύσεων της μεταγνώσης δόθηκε στην
 -αυτογνωσία των προσωπικών νοητικών λειτουργιών και πεποιθήσεων και στη
 -ρύθμιση και τον έλεγχο των ατομικών γνωστικών δραστηριοτήτων.

Στο ψυχολογικό αυτό πρόγραμμα δεν άργησε να εκδηλωθεί το ενδιαφέρον και να εξεταστεί το μεταγνωστικό υπόβαθρο της μαθηματικής σκέψης. Οι πρώτες σχετικές δημοσιεύσεις αυτής της σκοπιάς εμφανίστηκαν στα μέσα της δεκαετίας του 1980, με σημαντικότερη αυτή του γνωστού αμερικάνου ερευνητή της Διδακτικής των Μαθηματικών Alan Schoenfeld.¹⁵ Η δημοσίευση του Schoenfeld, η οποία σημειωτέον προκάλεσε μια ευρεία συζήτηση,¹⁶ εστίαστηκε στο μεταγνωστικό υπόστρωμα της διαδικασίας μάθησης των Μαθηματικών και υπέδειξε τρεις όψεις του : τις πεποιθήσεις και προδιαθέσεις (intuitions), την αυτο-επίγνωση των προσωπικών διαδικασιών σκέψης, τον έλεγχο και την αυτο-ρύθμιση. Συγκεκριμένα υποστήριξε ότι κάθε μαθητής διαμορφώνει τη μαθηματική του δραστηριότητα και συμπεριφορά, όχι ανεξάρτητα από τις πεποιθήσεις του και τις προδιαθέσεις του περί Μαθηματικών, ούτε ξεκομμένα από τις προηγούμενες εμπειρίες του στη προσπάθειά του να κατανοήσει τον κόσμο και να δώσει νόημα στην πραγματικότητα που βιώνει. Επισήμανε χαρακτηριστικά ότι οι μαθητές που αποκτούν την πεποίθηση ότι τα σχολικά Μαθηματικά δεν είναι άλλο παρά χειρισμοί μαθηματικών τύπων και τυποποιημένες διαδικασίες, χωρίς καμία σχέση με την πραγματική ζωή, την ανακάλυψη και τη λύση προβλημάτων συμπεριφέρονται, κατά κανόνα, μηχανιστικά και αναπτύσσουν μια απωθητική ή παθητική στάση για τα

¹² Βλ. Flavell, J. H., Friedrichs, A. G. & Hoyt, J. D.: Developmental changes in memorization processes, *Cognitive Psychology*, 1, 1970, σελ. 323-340, ειδ. σελ. 323.

¹³ Βλ. Livingston, J.A.: Metacognition: An Overview, 1997, <http://www.gse.buffalo.edu/fas/shuell/cep564/Metacog.htm>

¹⁴ Βλ. Κωσταρίδου-Ευκλείδη, Α. : *Γνωστική Ψυχολογία*, εκδ. Art of Text, 1992, σελ. 135.

¹⁵ Βλ. Garofalo, J. / Lester, F.K. JR. : Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance, *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 1985, σελ. 163-176, και Schoenfeld, A.H. : What's all the Fuss about Metacognition?, στο Schoenfeld, A.H.(ed.) : *Cognitive Science and Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum Associates, 1987, σελ. 189-215.

¹⁶ Βλ. <http://mathforum.org/epigone/geometry-pre-college/clarwaysterd/> , <http://mathforum.org/epigone/geom.pre-college/234/>

Μαθηματικά.¹⁷ Παράλληλα υπογράμμισε τη σημασία της αυτό-συνείδησης των μαθητών για τη γνωστική τους κατάσταση, των γνωστικών τους δεξιοτήτων και ικανοτήτων. Στην προκειμένη περίπτωση ισχυρίστηκε ότι “η καλή [δεξιότητα] επίλυσης προβλημάτων [από ένα μαθητή] απαιτεί τη αποτελεσματική χρήση του τι γνωρίζει, εάν αυτός δεν έχει μια καλή επίγνωση του τι γνωρίζει, ίσως βρει δυσκολία στο να γίνει ένας επιδέξιος λύτης προβλημάτων”.¹⁸ Επίσης συσχέτισε τον έλεγχο και την αυτο-ρύθμιση με την οργάνωση και τη μεθόδευση του χρόνου και της προσπάθειας για την αντιμετώπιση ενός προβλήματος, ενός καθήκοντος. Ένα τέτοιο επιτελικό έργο προϋποθέτει: α) κατανόηση του προβλήματος ή του καθήκοντος, β) σχεδιασμό, γ) επίβλεψη των ενεργειών και των επιμέρους εκβάσεων και δ) εξέταση των διεξόδων ή αποφάσεις για το τι γίνεται και σε τι μάκρος χρόνου.¹⁹

Γίνεται φανερό ότι η οπτική γωνία του Schoenfeld για τη μεταγνωστική διάσταση της μαθηματικής σκέψης στηρίζεται στη Γνωστική Ψυχολογία που αναπτύχθηκε και καλλιεργήθηκε στις Η.Π.Α. από τα τέλη της δεκαετίας του 1960. Το κύριο γνώρισμα αυτής της προσέγγισης είναι η έμφαση στα προσωποπαγή χαρακτηριστικά του αναστοχασμού, δηλ. επικεντρώνεται στην αυτογνωσία και αυτοκριτική των υποκειμένων, που σημαίνει ότι αναδεικνύει την υποκειμενική, ατομοκεντρική, πλευρά του θέματος. Αυτή η προσήλωση παρατηρείται και στις άλλες σχετικές δημοσιεύσεις των αμερικάνων (και των επηρεασμένων απ’ αυτούς) ειδικών στη Διδακτική των Μαθηματικών.²⁰

Διαφορετική είναι η προσέγγιση της μεταγνώσης, δηλ. της “αναστοχαστικής αφαίρεσης”, στο πλαίσιο της Γενετικής Επιστημολογίας του Piaget. Και αυτό γιατί είχε για βάση “την ύπαρξη παραλληλισμού μεταξύ της λογικής και θεωρητικής οργάνωσης της γνώσης και των αντίστοιχων ψυχολογικών διαδικασιών διαμόρφωσής της”²¹ από τη μια και αλληλοσυσχέτιζε την ιστορικο-γνωστική ανέλιξη της επιστημονικής σκέψης με την ψυχο-γενετική ανάπτυξη της νοημοσύνης ενός ανθρώπου²² από την άλλη. Οπότε η προσέγγιση του συνδύαζε την υποκειμενική πλευρά με την επιστημολογική πλευρά (δηλ. με τα χαρακτηριστικά του περιεχομένου της επιστημονικής γνώσης) υπό το πρίσμα μιας ιστορικο-αναπτυξιακής θεώρησης.

Μετατοπισμένη προς μια πιο επιστημολογική απόχρωση ήταν η μεταγνωστική ανάλυση της ερευνητικής ομάδας του Bielefeld. Στην προκειμένη περίπτωση πρόβαλε τις εξής τρεις μεταγνωστικές συνιστώσες της μαθηματικής γνώσης : *Μεθοδολογία και Θεωρία της Επιστημονικής Εργασίας, Ιστορία των Μαθηματικών και Γνώση περί των Σχέσεων μεταξύ Μαθηματικών και άλλων Επιστημών ή Σχολικών Μαθημάτων*.²³ Αναφορικά με το μεταγνωστικό ρόλο της *Ιστορίας των Μαθηματικών* υποδεικνύεται η επιστημολογική ιστορία, που θα αναδεικνύει το παρασκήνιο της εννοιολογικής ανάπτυξης, την ιδιαίτερη φύση των

¹⁷ Βλ. Schoenfeld, πρ. υπ. 15, σελ. 195-198.

¹⁸ Στο ίδιο, σελ. 190.

¹⁹ Στο ίδιο, σελ. 190-191.

²⁰ Βλ. Campione, C / Brown, A.L. / Connell, M.L. : Metacognition: On the Importance of Understanding What You Are Doing, στο Charles, R.I. / Silver, E.A.(eds.): *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*, Lawrence Erlbaum Associates, 1988, σελ. 93-114, Lester, F.K.: Reflections about Mathematical Problem-Solving Research, στο ίδιο, σελ. 115-124, Schoenfeld, A.: Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics, στο Grouws, D.(ed.): *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, MacMillan, 1992, σελ. 334-370, Hegedus, S.J.: Advanced Mathematical Thinking, Metacognition & The Calculus, 1998, στο <http://www.soton.ac.uk/~amt/amtpaper.htm> .

²¹ Βλ. Otte, M. : On the Question of the Development of Theoretical Concepts, *Communication & Cognition*, 13(1), 1980, σελ. 63-76, ειδ. σελ. 66.

²² Βλ. Damerow, P. : *Abstraction and Representation*, Kluwer Acad. Publ., 1996, σελ. 309.

²³ Βλ. Otte, M. : The Education and the Professional Life of Mathematics Teachers, στο *New Trends in Mathematics Teaching*, Vol. IV, Unesco, 1979, σελ. 107-133, ειδ. σελ. 125.

μαθηματικών υλικών και την αλληλεξάρτηση της ανέλιξης των Μαθηματικών με την κοινωνική ανάπτυξη.²⁴

Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΜΕΣΟ ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΜΟΡΦΩΣΗΣ

Τις περισσότερες φορές η *Ιστορία των Μαθηματικών* προβάλλεται ως ένα χρονογράφημα επιτευγμάτων και προικισμένων μαθηματικών.²⁵ Σε πολύ μικρότερη κλίμακα παρουσιάζεται ως συλλογή εύστροφων τεχνικών και αποδείξεων μαθηματικών προβλημάτων και θεωρημάτων του παρελθόντος.²⁶ Και σε ελάχιστες, έως σπάνιες, περιπτώσεις αντιμετωπίζεται ως ανέλιξη της μαθηματικής σκέψης ή ως πολιτισμική ανάπτυξη της μαθηματικής παιδείας.²⁷ Στα διαφορετικά αυτά είδη αναπαραστάσεων της *Ιστορίας των Μαθηματικών* αντιστοιχούν διαφορετικοί τύποι ιστορικής κατανόησης των Μαθηματικών και κατά συνέπεια διαφορετικά μεταγνώστικα πλαίσια. Συγκεκριμένα η χρονολογική περιγραφή των μαθηματικών επιτευγμάτων δημιουργεί, κατά κύριο λόγο, την αντίληψη ότι τα Μαθηματικά διαμορφώθηκαν και διαμορφώνονται ως μια αλληλουχία ιδιοφυών εμπνεύσεων προικισμένων μαθηματικών. Η ιστορική παρουσίαση των έξυπνων τεχνασμάτων και αποδείξεων προβάλλει, ως επί το πλείστον, έναν μονοδιάστατο μεθοδολογισμό με μεταφυσικές αποχρώσεις. Αντίθετα η ανάδειξη των επιστημολογικών ιδιαιτεροτήτων, σε συνάφεια με τις αντίστοιχες πολιτισμικές συγκυρίες, φωτίζει τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της μαθηματικής γνώσης και τα συσχετίζει με τη δυναμική του πολιτισμικού πλαισίου μέσα στο οποίο αναπτύσσεται και καλλιεργείται. Στην περίπτωση αυτή αποκαλύπτεται η φύση της μαθηματικής σκέψης και συμπεριφοράς ως συνέπεια συλλογικών καταστάσεων και μ' αυτό τον τρόπο εμπλουτίζεται σφαιρικά η μεταγνώστική πλευρά των Μαθηματικών.²⁸

Κατά κανόνα, το προσωπικό ή ακαδημαϊκό ενδιαφέρον για την ιστορία των Μαθηματικών δημιουργείται ως αντίδραση ή αντιπερισπασμό στην τεχνοκρατική καταπίεση της καθιερωμένης μαθηματικής παιδείας. Συνήθως η στροφή προς την ιστορία των Μαθηματικών γίνεται για να μετριαστεί ή να απεμπλακεί η παρεχόμενη μαθηματική παιδεία από την έντονη τυποκρατία και τον αντίστοιχο δογματισμό. Επιδιώκεται μ' αυτό τον τρόπο να εμπλουτιστούν τα σχολικά Μαθηματικά με μια ανθρωπιστική διάσταση, η οποία θα αναδεικνύει τη μαθηματική δημιουργικότητα ως ανέλιξη της ανθρώπινης σκέψης σε δυναμικές πολιτισμικές καταστάσεις. Κι έτσι να περιοριστεί η φορμαλιστική μονολιθικότητα. Αυτό όμως το ενδιαφέρον, για λιγότερη τεχνοκρατική και περισσότερη ανθρωπιστική μαθηματική παιδεία, κινδυνεύει να περιοριστεί σ' έναν επιφανειακό εξωραϊσμό, σε μια περικόσμηση της μαθηματικής γνώσης με ιστορικά επιθέματα, χωρίς οργανική σύνδεση του σύγχρονου μαθηματικού λόγου με τη διαχρονική κατανόησή του. Μάλιστα, σ' αυτές τις περιπτώσεις δεν είναι απίθανο να "δαιμονοποιηθεί" ο τυποκρατικός χαρακτήρας των σύγχρονων Μαθηματικών και να προβληθούν ως αντιστάθμισμα τα "ζωντανά" Μαθηματικά ή τα Μαθηματικά της "πραγματικής ζωής", μ' άλλα λόγια να επικρατήσει μια ωφελμιστική, πραγματιστική ή πρακτικο-ιστορική αντίληψη των Μαθηματικών ως η κατ' εξοχήν παιδαγωγικά αρμόζουσα

²⁴ Βλ. πρ. υπ. 8, σελ. 122.

²⁵ Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το έργο του G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, εκδ. Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 1972.

²⁶ Π.χ. το βιβλίο των N. Bourbaki, *Elements of the History of Mathematics*, Springer-Verlag, 1994.

²⁷ Για παράδειγμα το βιβλίο του R. Callinger *A Contextual History of Mathematics to Euler*, Prentice Hall, 1999, ή το βιβλίο *The Growth of Mathematical Knowledge*, edited by E. Grosholz and H. Breger, Kluwer Acad. Publishers, 2000.

²⁸ Βλ. Jahnke, H.N. : The Historical Dimension of Mathematical Understanding-Objectifying the Subjective, στο Ponte, J. da / Matos, J. : *Proceedings of the 18th PME Conference*, Univ. of Lisbon, 1994, vol. 1, σελ. 139-156, και Dennis, D.: The Role of Historical Studies in Mathematics and Science Educational Research, http://www.oswego.edu/multi-campus-nsf/Devid_Dennis_Chapter.htm.

σκοπιά. Ένα τέτοιο ολίσθημα έχει ή θα έχει επίσης ανασταλτικές επιπτώσεις στην καλλιέργεια της μαθηματικής παιδείας, όπως και η φορμαλιστική διόγκωση.

Είναι αλήθεια ότι η σύγχρονη Μαθηματική Επιστήμη έχει αναπτυχθεί σ' ένα υψηλό επίπεδο θεωρητικής σκέψης, που χωρίς αμφιβολία εκφράζει μια κατάκτηση του σύγχρονου πολιτισμού. Το γεγονός αυτό όχι μόνο δεν μπορεί να αγνοηθεί, αλλά πρέπει να βρει μια απήχηση στη διαμόρφωση της μαθηματικής κουλτούρας του πολίτη της ηλεκτρονικής εποχής. Η δυσκολία πραγματοποίησης αυτής της προσδοκίας βρίσκεται στην αποκάλυψη της ιδιαιτερότητας του νέου τρόπου σκέψης των Μαθηματικών και στην ανάδειξή της στα σημερινά πλαίσια της μαθηματικής μόρφωσης των νέων. Αυτό προϋποθέτει τη συνειδητοποίηση του γνωστικού χαρακτήρα των Μαθηματικών απ' αυτούς που τα διδάσκουν ή θα τα διδάξουν. Έτσι γίνεται φανερή η ανάγκη να είναι εφοδιασμένοι μ' έναν εξοπλισμό από τη *Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Έναν εξοπλισμό που θα αναπτύξει το επιστημολογικό υπόβαθρο της κατανόησης του μαθηματικού τρόπου σκέψης και όχι έναν λογικοκρατικό σχολαστικισμό, ο οποίος έχει μια δεσπόζουσα θέση στον ακαδημαϊκό χώρο των μαθηματικών. Ανακύπτει λοιπόν το ζήτημα των διαφορετικών προσεγγίσεων στη *Φιλοσοφία των Μαθηματικών* και του προσδιορισμού της κατάλληλης, για την περίπτωση, οπτικής γωνίας.

Στο σημείο αυτό χρειάζονται κάποιες διευκρινίσεις για τη σημερινή κατάσταση της *Φιλοσοφίας των Μαθηματικών*. Και εκείνο που θα πρέπει να τονιστεί, πρώτα απ' όλα, είναι η παρουσία δύο βασικών τάσεων στις τελευταίες εξελίξεις του εν λόγω τομέα. Η πρώτη που κυριαρχεί, από τη δεκαετία του 1930, στον κόσμο των ακαδημαϊκών μαθηματικών έχει για βάση τη λογικο-θεωρητική δομή και ορθολογικότητα, όπου η έμφαση δίνεται στη συντακτική συμπεριφορά των μαθηματικών προτάσεων και στη κωδικοποίηση της μαθηματικής αλήθειας. Μέσα σ' αυτό το σκηνικό η μαθηματική γνώση προβάλλεται ως παράγωγο των συνδυαστικών δυνατοτήτων ενός λογικού λογισμού και τα αντικείμενα της μαθηματικής σκέψης παρουσιάζονται ως γλωσσικές μορφές που λειτουργούν στα πλαίσια συντακτικο-παραγωγικών συστημάτων.²⁹ Το φιλοσοφικό αυτό ρεύμα ανάδειξε και ισχυροποίησε στη μαθηματική κοινότητα μια νοοτροπία "*θεμελιωτισμού*" (foundationalism), δηλαδή μια πεποίθηση και μια αξιολογική σκοπιά της μαθηματικής δραστηριότητας όπου η επίγνωση της λογικο-συντακτικής δομής των θεμελίων της αποτελεί την πεμπουσία της βαθύτερης κατανόησης των Μαθηματικών.³⁰ Το δεύτερο ρεύμα στη *Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, που ξεπρόβαλε από τα τέλη της δεκαετίας του 1970 υπό την επίδραση των ιδεών του Imre Lakatos (1922-1974) και της *Γνωστικής Επιστήμης*, εστιάζει την προσοχή στις εννοιολογικές και μεθοδολογικές αλλαγές των Μαθηματικών σε συνάρτηση με το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο αναφοράς.³¹ Ο προσανατολισμός αυτός έδωσε μια ισχυρή ώθηση στις επιστημολογικές διεισδύσεις και στις ιστορικές αναλύσεις των μαθηματικών γνώσεων, δηλαδή τους δύο βασικούς άξονες που ακτινογραφούν τη φύση και την ανέλιξη του περιεχομένου της μαθηματικής σκέψης.³² Παράλληλα διαπλέκονται οι ψυχολογικές και οι ανθρωπολογικές ή

²⁹ Βλ. Machover, M.: Towards a New Philosophy of Mathematics, *The British Journal for the Philosophy of Science*, 34, 1983, σελ. 1-11

³⁰ Βλ. Corry, L.: Linearity and Reflexivity in the Growth of Mathematics, *Science in Context*, 3(2), 1989, σελ. 409-410.

³¹ Βλ. Καστάνη, Ν., πρ. υπ. 4, σελ. 53.

³² Βλ. για παράδειγμα Ernest, P.: *Philosophy of Mathematics Education*, The Falmer Press, 1991, Sierpinski, A. and Lerman, S.: Epistemology of Mathematics and of Mathematics Education, στο Bishop, A.J. et al.(eds.): *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Acad. Publ., 1996, σελ. 827-876, Thagard, P.: *Conceptual Revolutions*, Princeton Univ. Press, 1992, Rusnock, P. and Thagard, P.: Strategies for Conceptual Change: Ratio and Proportion in Classical Greek Mathematics, *Studies in History and Philosophy of Science*, 26(1), 1995, σελ. 107-131.

πολιτισμικές συνιστώσες στην κατανόηση της δομής, της λειτουργίας και της ανάπτυξης των Μαθηματικών.

Μέσα από τη σύγχρονη αυτή οπτική γωνία εμφανίστηκε στο προσκήνιο η ανάγκη του μεταγνωστικού εξοπλισμού των μαθηματικών της εκπαίδευσης. Κι αυτό γιατί η μαθηματική παιδεία απεγκλωβίστηκε από τη νοοτροπία και την ορθολογικότητα του *Λογικού Θετικισμού*, που περιόριζε τον ορίζοντα κατανόησης σε μια λογικοκρατική αυταρέσκεια και σ' ένα φορμαλιστικό επιφαινόμενο, σε αντιπαράθεση με τα άλλα πεδία της ανθρώπινης εμπειρίας.³³ Τόσο η ορμητική εισαγωγή και οι διδακτικές δυσκολίες του *δομικού τρόπου σκέψης*, στη δεκαετία του 1960, όσο και οι γνωστικές αλλαγές που απαιτούσε η *ηλεκτρονική παιδεία*, από τις αρχές του 1980, προκάλεσαν την ανάγκη για εμπάθυνση, κριτική σκέψη και αναστοχασμό στα ποιοτικά και πολιτισμικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης και μόρφωσης, η οποία οδήγησε στην αποδέσμευση της θεώρησης των Μαθηματικών από την επικυριαρχία του *Λογικού Θετικισμού*. Οι εναλλακτικές προσεγγίσεις, όπως η φιλοσοφική σκοπιά του Imre Lakatos ή της *Γνωστικής Επιστήμης*, προϋποθέτουν τη μεταγνωστική συνειδητοποίηση, η οποία δεν είναι ανεξάρτητη από την ιστορική κατανόηση των αλλαγών της μαθηματικής σκέψης και κουλτούρας.

Με τη βοήθεια του μεταγνωστικού προβληματισμού ανατέμνονται μια σειρά ζητημάτων για τη φύση και αλλαγή του μαθηματικού πνεύματος, για τη γένεση και την καθιέρωση των νέων μαθηματικών ιδεών, θεωριών και μεθόδων, όπως και για τις μορφές αξιοποίησης των Μαθηματικών. Αξίζει, στην προκειμένη περίπτωση, να επισημανθεί ότι το υψηλό θεωρητικό επίπεδο των σύγχρονων Μαθηματικών οφείλεται, εν πολλοίς, στη *σχεσιακή* φύση των μαθηματικών εννοιών, που σημαίνει ότι το περιεχόμενό τους δεν προέρχεται από γενίκευση εμπειρικών αντικειμένων, ούτε αντιπροσωπεύουν ονόματα ομοειδών πραγμάτων, αλλά σχέσεις μεταξύ πραγμάτων. Πολύ χαρακτηριστικά ο διακεκριμένος γερμανός φιλόσοφος Ernest Cassirer (1874-1945) υποστήριξε:

«Δεν μπορούμε να μιλήσουμε για μεμονωμένους ή απομονωμένους αριθμούς. Η ουσία του αριθμού είναι πάντοτε σχετική, όχι απόλυτη. Ο μεμονωμένος αριθμός είναι μονάχα μια μεμονωμένη θέση μέσα σε μια γενική συστηματική τάξη. Δεν έχει δικό του είναι, ούτε αυτοτελή πραγματικότητα. Το νόημά του καθορίζεται από τη θέση που κατέχει στο όλο αριθμητικό σύστημα....Στην πρόοδο των αριθμών δε συναντάμε εξωτερικό περιορισμό, ούτε “τελευταίο όρο”. Εκείνο που συναντάμε είναι ένας περιορισμός που απορρέει από μια ενδογενή λογική αρχή. Όλοι οι όροι συνδέονται μ' έναν κοινό δεσμό. Προέρχεται από μια και μόνη γενετική σχέση, τη σχέση που συνδέει έναν αριθμό n με τον αμέσως επόμενο ($n+1$). Από την πολύ απλή τούτη σχέση μπορούμε να βγάλουμε όλες τις ιδιότητες των ακεραίων αριθμών. Το διακριτικό σημάδι και το μέγιστο λογικό προνόμιο αυτού του συστήματος είναι η πλήρης διαύγειά του. Στις σύγχρονες θεωρίες – του Φρέγκε και του Ράσσελ, του Πεάνο και του Ντέντεκιντ – ο αριθμός έχασε όλα τα οντολογικά του μυστικά».³⁴

Αυτή η απώλεια της οντολογικής βάσης, η οποία δεν προέκυψε αυθαίρετα αλλά ως συνέπεια της αλλαγής του μαθηματικού τρόπου σκέψης στις πρώτες δεκαετίες του 19^{ου} αιώνα (για παράδειγμα η ανάπτυξη των Αριθμητικών Συστημάτων, των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών, της Θεωρίας Ομάδων), ανάδειξε τον φορμαλισμό ως ουσιαστικό επιστημολογικό άξονα των σύγχρονων Μαθηματικών. Μέσα από μια τέτοια μεταγνωστική ευαισθησία, διαφαίνεται ότι

³³ Βλ. Otte, M. / Seeger, F.: The Human Subject in Mathematics Education and in the History of Mathematics, στο Biehler, R. et al.(eds.): *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Kluwer Acad. Publ., 1994, σελ. 351-365, ειδ. σελ. 352-353.

³⁴ Βλ. Cassirer, E.: *Δοκίμιο για τον Άνθρωπο. Εισαγωγή στη Φιλοσοφία του Ανθρώπινου Πολιτισμού*, εκδ. Κάλβος, 1972, σελ. 317.

είναι μάλλον αφέλεια να εξορκίζεται ο φορμαλισμός, αντί να συνειδοποιείται η ιστορική του σημασία και η σημερινή του γνωστική αξία.

Από τις προηγούμενες επισημάνσεις φάνηκε η μορφωτική σημασία της μεταγνώσης των Μαθηματικών και σε συνάρτηση μ' αυτή ο αναστοχαστικός ρόλος της ιστορικής διείσδυσης στην ανέλιξη του μαθηματικού τρόπου σκέψης. Πολύ ενδεικτικά, μάλιστα, τονίστηκε:

«Η Διδακτική των Μαθηματικών πρέπει να πάρει σοβαρά υπ' όψη ότι δεν υπάρχει γνώση χωρίς μεταγνώση, ότι κάποιος δεν μπορεί να μάθει μια θεωρητική έννοια χωρίς μια ευαισθητοποίηση σχετικά με την έννοια, για να γίνει κατανοητό το είδος των υποστάσεων που εκείνες είναι. Η μεταγνώση, ωστόσο, μπορεί να αναπτυχθεί δια μέσου των ιστορικών μελετών».³⁵

ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σ' όλο, σχεδόν, τον κόσμο, η ανάπτυξη της αρχαίας ελληνικής σκέψης αποτελεί ένα αξιοθαύμαστο γεγονός. Κάποιοι, μάλιστα, μιλούν για **“ελληνικό θαύμα”**. Κατ' επέκταση, μέσα σ' αυτό το πνεύμα, αναφέρεται και το **“ελληνικό θαύμα στα Μαθηματικά”**. Ίσως αυτή η στάση να εκφράζει μια υπερβολική έκπληξη και έναν διογκωμένο ενθουσιασμό. Δεν προέρχεται, όμως, από μια μυθοπλασία, από ένα πλασματικό κατασκευάσμα, γιατί απηχεί μια αξιοσημείωτη ιστορική πραγματικότητα: την πολιτισμική αναμόρφωση του Αρχαίου Κόσμου, η οποία αποτέλεσε τη μήτρα της σύγχρονης κουλτούρας. Και είναι αλήθεια ότι η πολιτισμική αυτή αναμόρφωση ήταν και είναι το επίκεντρο του ιστορικού ενδιαφέροντος κι ο απώτερος σκοπός μιας πληθώρας μελετών και αναλύσεων του αρχαίου ελληνικού τρόπου σκέψης και συμπεριφοράς. Πρόκειται για μια οπτική γωνία που είναι στενά συνυφασμένη με τη διαχρονική και ευρύτατα διαδεδομένη πεποίθηση ότι

Η ευρωπαϊκή σκέψη αρχίζει με τους αρχαίους Έλληνες.³⁶

Αυτή η στάση είναι, όπως φαίνεται, αρκετά ισχυρή, γιατί εμπνέει, ενεργοποιεί και νομιμοποιεί τους μελετητές της αρχαίας ελληνικής δημιουργίας. Αποτελεί ταυτόχρονα και το πλαίσιο διαμόρφωσης του θαυμασμού για την πνευματική και πολιτισμική ανέλιξη των αρχαίων Ελλήνων.

Μέσα σ' αυτό το υψηλό επίπεδο ενδιαφέροντος και ιστοριογραφικής δυναμικής η ανάπτυξη των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών κατέχει μια κεντρική θέση. Κι όχι τυχαία, γιατί το συγκεκριμένο είδος επιστημονικής σκέψης άφησε ανεξίτηλα τα ίχνη του από την Αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Στην προκειμένη περίπτωση αξίζει να αναφερθεί η πολύ χαρακτηριστική ρήση του διαπρεπή άγγλου ιστορικού των Μαθηματικών Sir Thomas L. Heath (1861-1940), όσον αφορά τα *“Στοιχεία”* του Ευκλείδη, η αντιπροσωπευτικότερη πραγματεία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών:

Κανένα ίσως έργο, εκτός από τη Βίβλο, δεν έχει τέτοια διάδοση.³⁷

Μια επισήμανση που δεν έχασε την αξία της μέχρι τώρα, στην αρχή, δηλαδή, της 3ης χιλιετίας μ. Χ. Κι αυτό γιατί το διεθνές ενδιαφέρον για το συγκεκριμένο έργο του Ευκλείδη διατηρείται αμείωτο, όπως καταδεικνύει η ανανεωμένη επανέκδοσή του στα γαλλικά, τη δεκαετία του 1990, η βελτιωμένη επανέκδοσή του στα κινεζικά το 1990 και η πρώτη μετάφρασή του στα μογγολικά το 1987.

³⁵ Βλ. Otte, M. / Seeger, F., πρ. υπ. 33, σελ. 354.

³⁶ Βλ. Snell, B.: *Η Ανακάλυψη του Πνεύματος. Ελληνικές Ρίζες της Ευρωπαϊκής Σκέψης*, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τράπεζας, 1984, σελ. 9.

³⁷ Βλ. Καστάνη, Ν. / Τοκμακίδη, Τ.: *Η ιστορική κληρονομιά των “Στοιχείων” του Ευκλείδη στην Ανθρωπότητα*, στο βιβλίο: *ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΑ ΔΟΚΙΜΙΑ*, επιμέλεια Δ. Αναπολιτάνου και Β. Καρασμάνη, εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα, 1993, σελ. 67-92, ειδ. σελ. 67.

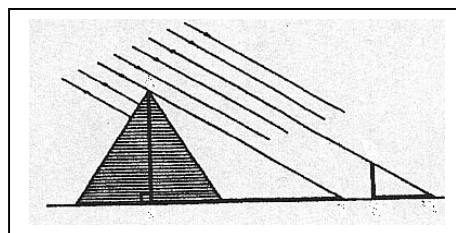
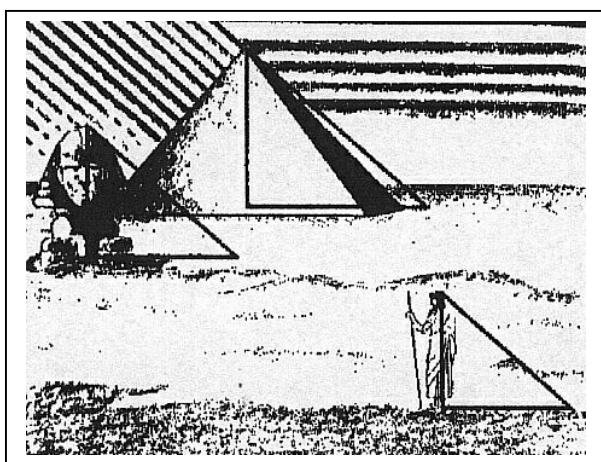
Χωρίς αμφιβολία πρόκειται για μια απήχηση του Ευκλείδη σ' όλα τα γεωγραφικά μήκη και πλάτη του κόσμου και σ' όλες τις εποχές. Γεγονός που αναδεικνύει όχι μόνο τη δική του διαχρονικότητα και διαπολιτισμικότητα, αλλά και τη σπουδαιότητα όλης της μαθηματικής κληρονομιάς του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού. Κι αυτό γιατί η επιστημονική και ιστορική αξία του έργου του δεν είναι ανεξάρτητη από την ωριμότητα και τη δυναμική του διανοητικού περιβάλλοντος απ' όπου προήλθε. Με άλλα λόγια, το έργο του Ευκλείδη δεν ήταν, ούτε μπορούσε να είναι αποκομμένο από την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των αρχαίων Ελλήνων της προ-αλεξανδρινής περιόδου. Θα μπορούσε, μάλιστα, να θεωρηθεί ως η πρώτη αποκορύφωση αυτής της πνευματικής ανέλιξης.

Είναι αλήθεια ότι οι σκέψεις αυτές διαπερνούν τον επιφανειακό θαυμασμό και φθάνουν σ' έναν βαθύτερο προβληματισμό, στο ζήτημα της συνεκτικότητας των εξατομικευμένων μαθηματικών γνώσεων του Αρχαίου Ελληνικού Πολιτισμού. Ανακύπτει, δηλαδή, το ερώτημα της διαμόρφωσης, τότε, ενός νέου είδους μαθηματικής σκέψης που διακρίνεται από τα αντίστοιχα είδη των προ-ελληνικών πολιτισμών της Μεσοποταμίας και της Αιγύπτου. Ο προβληματισμός αυτός μπορεί να τεθεί ως εξής:

Τι χαρακτηρίζει τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά;

Ποια είναι η ιδιαιτερότητα της μαθηματικής σκέψης του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού;
Δίνεται έτσι μια οπτική γωνία για την κατανόηση του χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης στην Αρχαία Ελλάδα και για την πολιτισμική δικαιολόγησή του. Αυτό σημαίνει ότι διεγείρεται ένας μεταγνωστικός προβληματισμός για το επιστημολογικό και πολιτισμικό παρασκήνιο της ιδιομορφίας της μαθηματικής νοοτροπίας και δραστηριότητας των αρχαίων Ελλήνων. Με άλλα λόγια, ανοίγεται ένας δρόμος για τη διείσδυση στο υπόβαθρο της μαθηματικής σκέψης και συμπεριφοράς του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού, με προσανατολισμό τα γνωστικά και συλλογικά χαρακτηριστικά κι όχι διαμέσου ενός προπετάσματος από τεχνοκρατικά επιτεύγματα και ατομοκεντρική σπουδαιολογία.

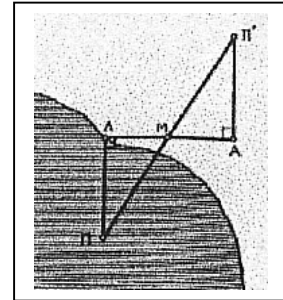
Μια από τις πρώτες ενδείξεις του νέου τρόπου σκέψης την περίοδο της αρχαίας ελληνικής Αναγέννησης, του 6^{ου} π.Χ. αιώνα, είναι η μέτρηση του ύψους της πυραμίδας. Σύμφωνα με τον Πλούταρχο (περ. 50-130 μ.Χ.) και τον Διογένη Λαέρτιο (3^{ος} αιώνας μ.Χ.) ο Θαλής ο Μιλήσιος (περ. 625-546 π.Χ.) μέτρησε το ύψος της πυραμίδας συσχετίζοντας τη σκιά της με τη σκιά μιας ράβδου.³⁸ Όπως υποδεικνύουν όλες οι ιστορικές ανακατασκευές για το σκοπό αυτό ο μιλήσιος σοφός μέτρησε τη σκιά της πυραμίδας, όταν η σκιά της ράβδου είναι ίση με το ύψος της, οπότε το μήκος της σκιάς της πυραμίδας θα ήταν όσο και το ύψος της. Από τη μεθόδευση



³⁸ Βλ. Τέζα, Χ.Α.: *Ο Θαλής ο Μιλήσιος και οι Αρχές των Επιστημών. Η Οδός προς τη Φιλοσοφία*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Επιστημονική Επετηρίδα της Φιλοσοφικής Σχολής, Παράρτημα αρ. 44, 1990, σελ. 81-82.

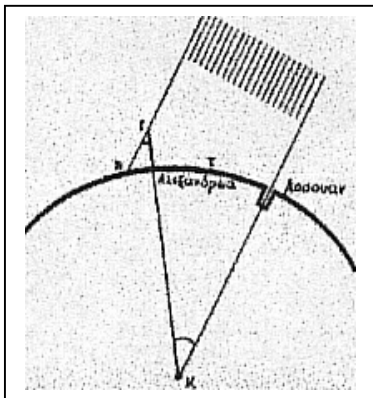
αυτή διαπιστώνεται, χωρίς δυσκολία, ότι το θεωρητικό της υπόβαθρο στηρίζονταν σ' έναν **έμμεσο τρόπο σκέψης**. Δεν αντιμετωπίσθηκε δηλαδή, ούτε μπορούσε να αντιμετωπισθεί, η μέτρηση αυτή μ' έναν άμεσο τρόπο, λόγου χάρη με την απ' ευθείας μέτρηση του συγκεκριμένου ύψους μ' ένα σχοινί που διαπερνάει κατακόρυφα την πυραμίδα από την κορυφή μέχρι τη βάση της.

Παρατηρείται λοιπόν ένας ιδιότυπος τρόπος σκέψης και πρωτότυπος, εφ' όσον δεν έχει σηματοδοτηθεί κάτι παρόμοιο στην ιστορία των Μαθηματικών πριν τον Θαλή. Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι το περιστατικό αυτό του έμμεσου τρόπου σκέψης δεν είναι το μοναδικό που αποδίδεται στον Θαλή. Σύμφωνα με την δοξογραφική παράδοση, ένα δεύτερο μεθοδολογικά όμοιο πρόβλημα που έλυσε ο μιλήσιος σοφός ήταν η μέτρηση της απόστασης ενός πλοίου από το λιμάνι.³⁹ Στην περίπτωση αυτή μια υποθετική ανακατασκευή της συγκεκριμένης λύσης είναι η εξής: χαράσσεται η κάθετη ευθεία ΛΜΑ στη νοητή γραμμή ΛΜ (Λιμάνι-Πλοίο), έτσι ώστε $ΛΜ=ΜΑ$, στη συνέχεια προσδιορίζεται το σημείο Π' πάνω στην κάθετη ευθεία της ΛΜΑ στο Α και με την ιδιότητα να φαίνεται απ' αυτό το Π μέσω του Μ (μ' άλλα λόγια το Π' να είναι στην ίδια ευθεία με το Π και το Μ).⁴⁰

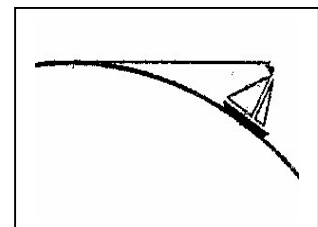


Το ερώτημα που δημιουργείται, τώρα, είναι: υπάρχουν άλλες ιστορικές μαρτυρίες, ενδείξεις ή εκφάνσεις που να πιστοποιούν τον έμμεσο τρόπο σκέψης στον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό και να είναι ιστοριογραφικά ισχυρότερες απ' αυτές που αποδίδονται στον Θαλή;

Η πιο πειστική περίπτωση είναι η μέτρηση της ακτίνας της γης από τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο, τον 3^ο αιώνα π.Χ. Πρόκειται για ένα επίτευγμα που ήταν αδύνατον να προκύψει με άμεσο τρόπο. Προήλθε μ' έναν έμμεσο συλλογισμό. Συγκεκριμένα συνδυάστηκε η μέτρηση της γωνίας που σχηματίζει η κατακόρυφος με τις προσπίπτουσες ακτίνες του ηλίου (πιθανότατα με τη βοήθεια του λόγου μιας ράβδου προς τη σκιά της) στην Αλεξάνδρεια, τη στιγμή που οι ακτίνες του ήλιου έπεφταν κατακόρυφα στη Σύνη (σημερινό Ασσουάν), τη μέτρηση της Απόστασης Αλεξάνδρειας-Σύνης και την αξιοποίηση των μαθηματικών ιδιοτήτων για τις εντός εναλλάξ γωνίες και των ισοσκελών τριγώνων.⁴¹



Μια επίσης χαρακτηριστική περίπτωση έμμεσου τρόπου σκέψης είναι η συνειδητοποίηση του σφαιρικού σχήματος της γης. Πρόκειται για μια γνωστική εξέλιξη που πραγματοποιήθηκε, όπως φαίνεται, με την αξιοποίηση κάποιων παρατηρησιακών ενδείξεων, όπως π.χ. η σταδιακή απώλεια οπτικής επαφής ενός πλοίου όταν απομακρύνεται από το λιμάνι, όπου χάνεται πρώτα το σκάφος και μετά το κατάρτι, ή το εσωτερικό τόξο της σελήνης στις διάφορες



³⁹ Βλ. στο ίδιο σελ. 82-83.

⁴⁰ Βλ. Τσιμπουράκη, Δ.: *Η Γεωμετρία και οι Εργάτες της στην Αρχαία Ελλάδα*, Αθήνα, 1985, σελ. 40-41.

⁴¹ Βλ. Cohen, M.R. and Drabkin, I.E.: *A Source Book in Greek Science*, Harvard Univ. Press, 1975, σελ. 151-153, Couder, P.: *Η Ιστορία της Αστρονομίας*, εκδ. Ι. Ν. Ζαχαρόπουλος, 1964, σελ. 47-48, Τσιμπουράκη, Δ., πρ. υπ. 40, σελ. 95.

φάσεις της, ή ακόμη η αλλαγή των αστερισμών με τη μετατόπιση σε διαφορετικά γεωγραφικά μήκη. Τα πρώτα ίχνη της ιδέας αυτής σηματοδοτούνται στην προ-πλατωνική περίοδο και καθιερώθηκε την εποχή του Πλάτωνα.⁴²

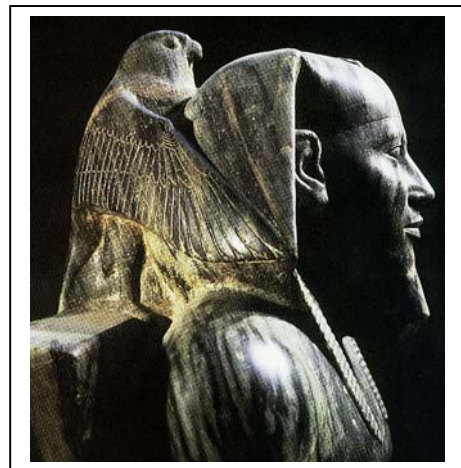
Διαφαίνεται λοιπόν ότι ο έμμεσος τρόπος σκέψης διαποτίζει το επιστημολογικό υπόβαθρο του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού. Δύσκολα, όμως, έως αδύνατο μπορεί να αποδοθεί κάτι ανάλογο στους προ-ελληνικούς πολιτισμούς. Περιπτώσεις όπως αυτές που αναφέρθηκαν ήταν μάλλον ασύμβατες με τους πρώτους μεγάλους πολιτισμούς που δημιουργήθηκαν στη Μεσοποταμία και στην Αίγυπτο, οι οποίοι χαρακτηρίζονται κύρια από έναν εμπειρισμό και μια αμεσότητα. Έτσι δημιουργείται το ερώτημα:

**Τι μεσολάβησε και άνοιξε ο πνευματικός εκείνος ορίζοντας
που εξέθρεψε τον έμμεσο τρόπο σκέψης;**

Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να επισημανθούν οι αλλαγές στην αρχαία ελληνικά κουλτούρα και συμπεριφορά, που αναμόρφωσαν τη θεωρητική υποδομή του περιεχομένου και των διαδικασιών σκέψης.

Τρεις σημαντικότερες πολιτισμικές καινοτομίες άλλαξαν τη νοοτροπία και την πνευματική στάση των αρχαίων Ελλήνων και πρώτα αυτών που ζούσαν στο Ανατολικό Αιγαίο, από τον 6^ο π.Χ. αιώνα περίπου. Συγκεκριμένα εμφανίστηκε και εδραιώθηκε ένα νέο είδος διακυβέρνησης και εξουσίας, ένας νέος τρόπος εμπορικών συναλλαγών και ένα νέο μέσο επικοινωνίας.⁴³ Μ' άλλα λόγια πρόβαλαν, γύρω στον 6^ο αιώνα π.Χ., τρεις νέες θεσμικές και νοητικές καταστάσεις: **η δημοκρατία, το νόμισμα και το αλφάβητο**. Αξίζει να αναλυθούν, λίγο, αυτές οι νέες συνιστώσες του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού.

Είναι κοινή αλήθεια ότι ένα από τα κύρια στοιχεία που χαρακτηρίζουν την αρχαία ελληνική κοινωνία, την προ-αλεξανδρινή περίοδο, αποτελεί η δημοκρατία σε μια σειρά από ελληνικές πόλεις. Και όλοι λίγο-πολύ γνωρίζουν ότι η δημοκρατία ως σύστημα διακυβέρνησης, άσκησης εξουσίας και συλλογικής συμπεριφοράς είναι κάτι πολύ διαφορετικό, διαμετρικά αντίθετο, από τα δεσποτικά καθεστώτα των προ-ελληνικών πολιτισμών της Μεσοποταμίας, της Αιγύπτου, της Περσίας, αλλά και αυτών της αρχαϊκής ελληνικής περιόδου. Η ειδοποιός διαφορά τους εκδηλώνεται στον τρόπο άσκησης της εξουσίας. Στην προκειμένη περίπτωση τα δεσποτικά συστήματα διακυβέρνησης από μια αμεσότητα στην άσκηση της εξουσίας, του είδους "αποφασίζουμε και διατάσσουμε". Αντίθετα, στις δημοκρατίες των ελληνικών πόλεων υπήρχαν έμμεσες μόνο δυνατότητες άσκησης της διακυβέρνησης, δια μέσου της συγκατάθεσης και του ελέγχου θεσμοθετημένων συλλογικών οργάνων. Πολύ χαρακτηριστικά ο έγκριτος άγγλος ιστορικός Antony Andrewes παρατήρησε ότι "*Στην Αθήνα κανένας δεν ασκούσε εξουσία για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα από όσο μπορούσε να πείθει την εκκλησία του δήμου ότι οι απόψεις του είναι*



⁴² Βλ. Dicks, D.R.: *Η Πρώιμη Ελληνική Αστρονομία*, εκδ. Δαίδαλος/Ι. Ζαχαρόπουλος, 1991, σελ. 68, 129, Couder, P., πρ. υπ. 41, σελ. 47-48.

⁴³ Βλ. Lloyd, G.E.R.: *Αρχαία Ελληνική Επιστήμη. Μέθοδοι και Προβλήματα*, Τόμος Α', εκδ. Αλεξάνδρεια, 1996, σελ. 212 κ.ε. Vernant, J.-P.: *Η Καταγωγή της Ελληνικής Σκέψης*, εκδ. Δίπτυχο, 1966. Austin, M.M. / Vidal-Naquet, P.: *Οικονομία και Κοινωνία στην Αρχαία Ελλάδα*, εκδ. Δαίδαλος/Ι. Ζαχαρόπουλος, 1998, σελ. 88 κ.ε.

σωστές, και ήταν αναγκασμένος να πείθει το ίδιο ή ελαφρώς διαφορετικό ακροατήριο με την πάροδο του χρόνου, χωρίς διακοπή”.⁴⁴ Και ο Αγησίλαος Ντόκας συμπληρώνει “οι αρμοδιότητες των ανωτέρων κρατικών αξιωματούχων ήσαν, εξαιτίας της δύναμης που είχαν η Εκκλησία του Δήμου, η Βουλή και τα λαϊκά δικαστήρια, εξαιρετικά περιορισμένες... Ακόμη και ο Περικλής, που είχε συγκεντρώσει ένα πλήθος πολιτικών, κυβερνητικών και στρατιωτικών αρμοδιοτήτων, ήταν κυρίαρχος στην Εκκλησία του Δήμου και καθόριζε τις αποφάσεις της μόνο χάρη στη δύναμη της προσωπικότητας του και του λόγου. Η θέση του ήταν νομικά επισφαλής, γιατί ο Δήμος μπορούσε στην επιχειροτομία που γινόταν σε κάθε πρυτανεία να τον απομακρύνει από το αξίωμα και να τον παραπέμψει σε δικαστήριο”.⁴⁵ Επισημαίνεται, λοιπόν,



όχι μόνο ο έμμεσος τρόπος διακυβέρνησης, αλλά και η αντίστοιχη κοινωνική συμπεριφορά και νοοτροπία των πολιτών της δημοκρατικής πόλης. Εδώ αξίζει να αναφερθεί ότι η πρώτη δημοκρατική διακυβέρνηση, που είναι γνωστή, πραγματοποιήθηκε στη Χίο, γύρω στο 600 π.Χ.⁴⁶

Στο πεδίο, τώρα, των εμπορικών δραστηριοτήτων παρατηρείται ένας σημαντικός νεωτερισμός στο δυτικό τμήμα της Μικράς Ασίας, κατά τον 7^ο αιώνα π.Χ. Ήταν η χρήση του νομίσματος ως μέσο συναλλαγών. Η εμφάνιση και η κυκλοφορία των νομισμάτων “διέλυε”, σύμφωνα με τον



⁴⁴ Βλ. Andrewes, A.: *Αρχαία Ελληνική Κοινωνία*, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, 1987, σελ. 273.

⁴⁵ Βλ. Ντόκα, Α.: *Η Αθηναϊκή Δημοκρατία*, Βιβλιοπωλείον της “Εστίας”, σελ. 78.

⁴⁶ Βλ. Thomson, G.: *Η Αρχαία Ελληνική Κοινωνία. Οι Πρώτοι Φιλόσοφοι*, εκδ. Κέδρος, 1987, σελ. 211.

διαπρεπή άγγλο ιστορικό George Thomson, “όλες τις παλιές συνθήκες”,⁴⁷ γεγονός που δεν ήταν άσχετο με τις κοινωνικές ανακατατάξεις, ούτε με τη θεσμοποίηση και λειτουργία των μορφών δημοκρατικού πολιτεύματος σε κάποιες ελληνικές πόλεις. Αναφορικά με το θέμα ο Αριστοτέλης τόνισε, στα *Ηθικά Νικομάχεια*, τον διαμεσολαβητικό ρόλο του νομίσματος στην ποσοτική εκτίμηση και σύγκριση ετερογενών προϊόντων και έτσι την ανταλλακτική ισοδυναμία ανόμοιων πραγμάτων.⁴⁸ Έχει μάλιστα επισημανθεί ότι το ζήτημα αυτό της ισοδυναμίας ανάγεται στους Πυθαγόρειους, που το αντιμετώπισαν με τη βοήθεια των αναλογιών.⁴⁹ Η ανέλιξη των ανταλλακτικών ισοδυναμιών από το εμπειρικό πλαίσιο του εμπορίου σ’ ένα ευρύτερο πεδίο θεώρησης, όπως για παράδειγμα στις σχέσεις των μηκών



χορδής με τους παραγόμενους μουσικούς ήχους, αντίστοιχα, ή των διαφορετικών πολιτικών δικαιωμάτων και υποχρεώσεων στο δημοκρατικό πολίτευμα, δεν ήταν άσχετη με την ανάπτυξη της ισότητας και των αναλογιών στα Μαθηματικά.⁵⁰ Από την άλλη μεριά οι προ-ελληνικοί πολιτισμοί, όπως και στην αρχαϊκή ελληνική περίοδο, έκαναν τις ανταλλαγές άμεσα, δηλ. είδος με είδος. Συγκεκριμένα “από πολύ νωρίς στην ιστορία της Μεσοποταμίας χρησιμοποιείται το κυριότερο δημητριακό, το κριθάρι, σαν μέτρο της αξίας και γενικό ανταλλακτικό μέσο”.⁵¹ Στην αρχαία Αίγυπτο “χρησιμοποιούνται αρχικά ως μονάδες αναφοράς για τη μέτρηση της ανταλλακτικής αξίας διάφορα είδη-αλυσίδες, φουσερά, σανδάλια κ.ο.κ. Αργότερα θα χρησιμοποιηθεί σαν μέτρο της ανταλλακτικής αξίας ένα σταθερό βάρος μετάλλου, χρυσού, ασημιού ή και χαλκού”.⁵² Αλλά και “ο Όμηρος αναφέρει στην *Ιλιάδα* πως ο Γλαύκος αντάλλαξε τη χρυσή του πανοπλία αξίας 100 βοδιών με τη μπρούτζινη πανοπλία του Διομήδη αξίας 9

βοδιών”.⁵³

Η τρίτη αξιοσημείωτη καινοτομία του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού είναι η επαναστατική αλλαγή του τρόπου επικοινωνίας με την εδραίωση της αλφαβητικής κωδικοποίησης του γραπτού λόγου. Το νέο αυτό σύστημα γραφής διέυρνε αρκετά τις εκφραστικές δυνατότητες μ’



⁴⁷ Στο ίδιο, σελ. 208.

⁴⁸ Βλ. Austin, M.M. / Vidal-Naquet, P., πρ. υπ. 43, σελ. 308.

⁴⁹ Βλ. Snell, B., πρ. υπ. 36, σελ. 290.

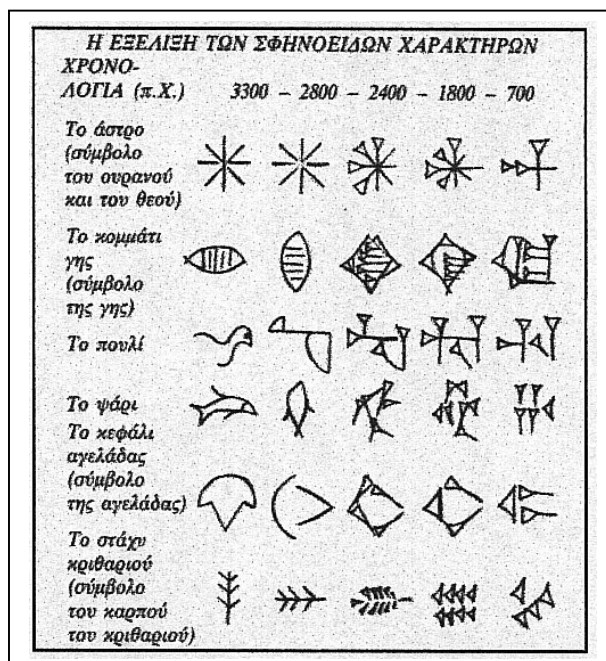
⁵⁰ Βλ. Harvey, F.D.: Two Kinds of Equality, *Classica et Mediaevalia*, 26, 1965, σελ. 101-146.

⁵¹ Βλ. Θεοχάρη, Π.Δ.: *Αρχαία και Βυζαντινή Οικονομική Ιστορία*, εκδ. Παπαζήση, 1983, σελ. 36.

⁵² Στο ίδιο, σελ. 27.

⁵³ Στο ίδιο, σελ. 70.

επακόλουθο να ανοίξει ένας νέος ορίζοντας αφηρημένης σκέψης.⁵⁴ Και αυτό γιατί η αλφαβητική γραφή πρόβαλε μια νέα γλωσσική και γνωστική συμπεριφορά. Η συγκεκριμένη αλλαγή γίνεται φανερή όταν συγκριθούν τα εικονογραφικά, κατά βάση, συστήματα γραφής των προ-ελληνικών πολιτισμών με την αλφαβητική γραφή. Στην προκειμένη περίπτωση μπορεί να διαπιστωθεί ότι στα εικονογραφικά συστήματα τα σημαινόμενα εκφράζονται άμεσα με την οπτική τους αναπαράσταση, ενώ στην αλφαβητική γραφή αυτό γίνεται έμμεσα, γιατί



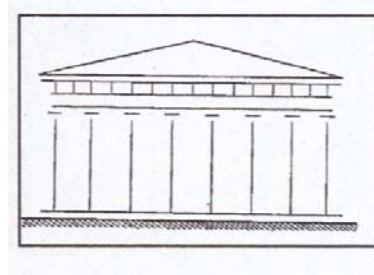
κάθε γραπτή λέξη είναι ένας συνδυασμός συμβόλων που δεν έχουν νόημα από μόνα τους. Να σημειωθεί ότι το ελληνικό αλφάβητο προήλθε από το φοινικικό αλφάβητο και εξελίχθηκε από τον 8^ο αιώνα π.Χ. με διάφορες τοπικές ιδιομορφίες. Το 403 π.Χ. έγινε ένα σημαντικό βήμα ομογενοποίησης του, όταν οι Αθηναίοι υιοθέτησαν, με ψήφισμα, το ιωνικό αλφάβητο της Μιλήτου.⁵⁵

Οι τρεις αυτές καινοτομίες αποτελούν το “γενετικό υλικό” του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού και τον επιστημολογικό του φορέα. Ο πυρήνας αυτού του “υλικού” είναι ο έμμεσος τρόπος σκέψης. Αξίζει να αναφερθεί ένα παράδειγμα, από τα πολλά που υπάρχουν, όπου μπορεί να επισημανθεί η πολιτισμική αξία του έμμεσου τρόπου σκέψης στην αρχαία ελληνική πραγματικότητα και να φανεί η δημιουργικότητά του.

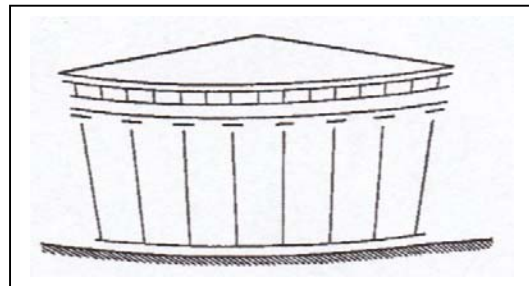
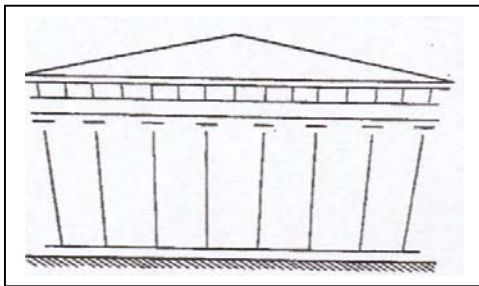
Ο Παρθενώνας είναι ένα από τα χαρακτηριστικότερα σύμβολα του “ελληνικού θαύματος”. Η ακτινοβολία του, στον κόσμο όλο, είναι πολύ μεγάλη. Γιατί, όμως; Τι είναι αυτό που προκαλεί τον υπέρμετρο θαυμασμό; Είναι μόνο ένα μνημείο που σηματοδοτεί μια ένδοξη περίοδο της ιστορίας του πολιτισμού; Ή αναδεικνύει μια σημαντική ιδιαιτερότητα της κατασκευής του που εναρμονίζεται με την πολιτισμική και πνευματική πρόοδο της ελληνικής κουλτούρας; Η σκοπιά αυτή δίνει τη δυνατότητα να ξεπεραστεί το επιφανόμενο και να αποκαλυφθούν στοιχεία του καλλιτεχνικού και διανοητικού “παρασκηνίου” του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού. Και αυτό γιατί μπορεί να φωτίσει την πολιτισμική απήχηση του τρόπου σκέψης και συμπεριφοράς στις αισθητικές ευαισθησίες των αρχαίων Ελλήνων. Συγκεκριμένα ο Ικτίνος (5^{ος} αιώνας π.Χ.), ο αρχιτέκτονας του Παρθενώνα, ήθελε να δώσει στο ναό της Ακρόπολης την εξής μορφή:

⁵⁴ Βλ. Vernant, J.-P.: *Μύθος και Σκέψη στην Αρχαία Ελλάδα*, εκδ. Εγνατία, σελ. 356.

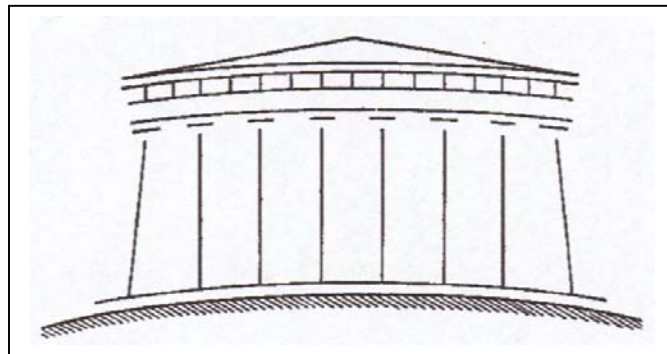
⁵⁵ Βλ. Jean, G.: *Η γραφή, η Μνήμη του Ανθρώπου*, εκδ. Δελθανάση, 1991, σελ. 206-207.



Γνώριζε, όμως, ότι αν τον κατασκεύαζε μ' αυτό το πρότυπο, τότε το αποτέλεσμα θα είχε τις εξής οπτικές παραμορφώσεις:



Για να αποφύγει τις αισθητικές αυτές ατέλειες έκανε τις εξής αντισταθμιστικές παρεμβάσεις:



Έτσι δημιούργησε ένα αρχιτεκτόνημα υψηλής ποιοτικής στάθμης, που οφείλεται σε μια εκλεπτυσμένη ευαισθησία και σ' ένα βαθύ αναστοχασμό. Τα χαρακτηριστικά αυτά γίνονται φανερά όταν το εν λόγω μνημείο συγκριθεί με τις Πυραμίδες και τα Ζιγκουράτ. Στην περίπτωση αυτή ο Παρθενώνας ακτινοβολεί το μεγαλείο της αρμονίας και της αισθητικής ανάτασης, ενώ οι Πυραμίδες και τα Ζιγκουράτ προβάλλουν το μεγαλοπρεπές του όγκου τους. Με άλλα λόγια, στην πρώτη περίπτωση αντανακλάται η δεισδυτικότητα του έμμεσου τρόπου σκέψης και καλλιτεχνικής στάσης, ενώ στη δεύτερη αποτυπώνεται η υπερβολή της άμεσης δύναμης και αίγλης, δηλαδή τη μεγαλοπραγμοσύνη της εξουσίας που αντιπροσωπεύει.

Μέσα στη ριζοσπαστική αλλαγή που επέφερε ο έμμεσος τρόπος σκέψης στον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό, η μαθηματική σκέψη δεν μπορούσε να μείνει στατική. Εκτινάχθηκε σε πολύ υψηλό

επίπεδο και δημιούργησε την πρώτη “επανάσταση” στην ιστορία των Μαθηματικών.⁵⁶ Αξίζει να επισημανθούν ότι δύο νέες συνιστώσες που επέφεραν την επιστημολογική μεταλλαγή στη μαθηματική σκέψη του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού ήταν η ισότητα και η απόδειξη. Όσο αφορά την πρώτη έχει επισημανθεί η συνάφεια της με τις πολιτισμικές διαστάσεις που εξέθρεψαν τον έμμεσο τρόπο σκέψης. Εκείνο όμως που θα πρέπει να υπογραμμισθεί είναι η απουσία της ισότητας και της λειτουργικότητάς της από την πολιτισμική και την επιστημολογική συγκυρία της προ-ελληνικής ιστορικής πραγματικότητας. Και αυτό γιατί οι σύγχρονοι ιστορικοί των Μαθηματικών παραγνωρίζουν το γεγονός αυτό και παραμορφώνουν την ιστορική κατανόηση προβάλλοντας, κατά κανόνα, αναχρονιστικές ανακατασκευές.⁵⁷

Επίσης και η προέλευση της απόδειξης είναι στενά συνυφασμένη με τον έμμεσο τρόπο σκέψης, γιατί αποτελεί το απαραίτητο στήριγμα για την αποδοχή των αποτελεσμάτων και των συμπερασμάτων της. Για παράδειγμα ο Θαλής δεν μπορούσε απλώς να ανακοινώσει το αποτέλεσμα των συλλογισμών και των μετρήσεων του για τον υπολογισμό του ύψους της πυραμίδας, έπρεπε να το τεκμηριώσει, διαφορετικά θα εκλαμβάνονταν ως μαγική ή μεταφυσική η ικανότητά του αυτή. Στον άμεσο τρόπο σκέψης και συμπεριφοράς δεν τίθεται, εκ των πραγμάτων, τέτοιο ζήτημα. Θα πρέπει, ωστόσο, να σημειωθεί ότι η ανάπτυξη της απόδειξης στον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό δεν ήταν ανεξάρτητη και από την καλλιέργεια της επιχειρηματολογίας στη Ρητορική, στη Φιλοσοφία, στην πολιτική και στη δημόσια ζωή.

Αυτή η θεώρηση της αρχαίας ελληνικής μαθηματικής σκέψης, που δεν περιχαράκωνεται απλά στις περιγραφές των σπουδαίων επιτευγμάτων και στις αυθεντίες του συγκεκριμένου πολιτισμού, αλλά επιδιώκει την ανάδειξη της επιστημολογικής ιδιαιτερότητας σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες ανθρωπολογικές μεταλλαγές, έχει ως κύριο άξονα τη μεταγνωστική προσέγγιση του θέματος. Και αυτή η μεταγνωστική προσέγγιση μπορεί να χαρακτηριστεί ως πολιτισμικός αναστοχασμός (cultural reflexivity). Αρκετά ενδεικτική, για τον εν λόγω προβληματισμό, είναι η εξής επισήμανση:

“Ο πρώτος ακρογωνιαίος λίθος της [επιστημονικής ανάπτυξης] ήταν το δεύτερο επίπεδο κατανόησης (second-order concept) της απόδειξης που αναπτύχθηκε στην κλασική Ελλάδα”.⁵⁸

Και αυτό το δεύτερο επίπεδο κατανόησης δεν είναι άλλο παρά εκείνο της συνειδητής και συστηματικής σκέψης σχετικά με τη σκέψη, δηλαδή της μεταγνωστικής κατανόησης.

Η μεταγνωστική, λοιπόν, κατανόηση των Μαθηματικών, και στην κατεύθυνση αυτή της ιστορικής τους ανάπτυξης, αποτελεί τον *ακρογωνιαίο λίθο* των μαθηματικών της εκπαίδευσης. Και αυτό γιατί ενισχύει σημαντικότερα τον “επαγγελματικό” τους εξοπλισμό που τους επιτρέπει να εξηγήσουν και να ερμηνεύσουν τα Μαθηματικά. Με άλλα λόγια τους διευκολύνει να επικοινωνήσουν με μη-μαθηματικούς στο θεματικό πλαίσιο της ειδικότητάς τους.

⁵⁶ Βλ. Dauben, J.: Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge, στο Gillies, D.(ed.): *Revolutions in Mathematics*, Clarendon Press, 1992, σελ. 49-82, ειδ. σελ. 52-57.

⁵⁷ Τις περισσότερες φορές γιατί είναι επηρεασμένοι από έναν ιστοριογραφικό πλατωνισμό, βλ., για παράδειγμα, Θωμαΐδη, Γ. / Καστάνη, Ν.: Ο όρος “Γεωμετρική Άλγεβρα” στο στόχαστρο μιας σύγχρονης επιστημολογικής διαμάχης, στο βιβλίο: *ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΑ ΔΟΚΙΜΙΑ*, επιμέλεια Δ. Αναπολιτάνου και Β. Καρασμάνη, εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα, 1993, σελ. 27-52.

⁵⁸ Βλ. Elkana, Y.: The Emergence of Second-order Thinking in Classical Greece, στο Eisenstadt, S.N.(ed.): *Axial Age Civilizations*, State Univ. of New York Press, 1986, σελ. 40-64, ειδ. σελ. 64.