

ΔΟΜΙΣΜΟΣ-ΒΟΥΡΒΑΚΙ-ΜΠΟΥΡΜΠΑΚΙΣΜΟΣ*

ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΣ Α. ΠΑΥΛΟΠΟΥΛΟΥ**

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όταν στη μέση του 20^{ου} αιώνα επιχειρήθηκε η εκπαιδευτική μεταρρύθμιση εδώ στην Ελλάδα ήταν σαφές ότι ο δρόμος και η βάση γι' αυτές τις αλλαγές ήταν η μεταρρύθμιση που είχε πραγματοποιηθεί λίγα χρόνια πριν στις χώρες-μέλη του ΟΟΣΑ (Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης). Αυτό όμως που φαίνεται ότι δεν ήταν γνωστό ήταν το που στηρίχθηκε η ίδια η μεταρρύθμιση της εκπαίδευσης των χωρών του ΟΟΣΑ. Στο κείμενο που ακολουθεί επιχειρούμε μια προσέγγιση στον δομισμό (στρουκτουραλισμό), το ρεύμα που επηρέασε περισσότερο τη δυτική και κατ' επέκταση και την ελληνική εκπαιδευτική μεταρρύθμιση, αλλά και στην ομάδα των Βουρβακι, τον κύριο εκπρόσωπο του δομισμού στα μαθηματικά. Είναι χαρακτηριστικό, εξάλλου, ότι το έργο των Βουρβακι επηρεάζει ακόμα τη μαθηματική εκπαίδευση στην Ευρώπη αλλά και την Ελλάδα αφού η σφαίρα επιρροής τους δεν περιορίστηκε στα μαθηματικά. Έτσι θα αναφερθούμε και στο ρεύμα του Μπουρμπακισμού, χαρακτηριστικό δείγμα του βαθμού της επίδρασης που άσκησαν για τουλάχιστον 40 χρόνια.

*Ειδικό Θέμα που πραγματοποιήθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ., με την επίβλεψη του κ. Ν. Καστάνη. Παρουσιάστηκε στις 5-7-2002.

** Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Ν. Καστάνη, χωρίς τις πολύτιμες υποδείξεις του οποίου δεν θα ήταν δυνατό να ολοκληρωθεί αυτή η εργασία

Ο ΔΟΜΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΣΚΕΨΗΣ

Τρόπος έκφρασης, τρόπος σκέψης, φιλοσοφικό ή φιλολογικό φαινόμενο, εφαλτήριο επιστημονικών και κοινωνικών εξελίξεων, ο δομικός τρόπος σκέψης (structuralism = στρουκτουραλισμός, δομισμός) αποτελεί το ρεύμα που κυριάρχησε στην επιστημονική ζωή της Ευρώπης από αρχές του 20^{ου} αιώνα. Ξεπήδησε από την τάση όλων των επιστημονικών κλάδων να ξεπεράσουν τον ατομισμό και την υποκειμενικότητα αντικαθιστώντας τα με τον ολισμό και κατ' επέκταση με τον δομισμό. Ο όρος δομισμός δηλώνει ένα σύμπλεγμα επιστημονικών και φιλοσοφικών ιδεών που συνδέονται με την εφαρμογή της δομικής μεθόδου. Βάση της δομικής μεθόδου είναι η αποκάλυψη της δομής ως συνόλου των σχέσεων που είναι αμετάβλητες σε ορισμένους μετασχηματισμούς¹. Είναι όμως κι ένας όρος που αποδόθηκε σε τόσες επιστήμες και χρησιμοποιήθηκε όσο λίγοι ώστε να έχει σταθερό ορισμό.

Επιστήμες όπως η φιλοσοφία, η γλωσσολογία, η κοινωνιολογία, η ανθρωπολογία², η ψυχολογία και η λογοτεχνία επηρέασαν και επηρεάστηκαν από το δομικό τρόπο σκέψης. Στα τέλη του 19^{ου} αιώνα – αρχές του 20^{ου} ο γλωσσολόγος Ferdinand de Saussure (1857-1913) ήταν από τους πρώτους επιστήμονες που εργάστηκαν υπό τον τίτλο του δομιστή. Αντιπροσωπευτικό των αντιλήψεών του ήταν το βιβλίο που εκδόθηκε το 1916 και είχε τίτλο "Μάθημα στη γενική γλωσσολογία"(Course in general linguistics) και ήταν ένα μεγάλο μέρος των διαλέξεών του³. Πολύ σημαντική ήταν η συμβολή του Lucien Levy – Bruhl (1857-1939) ο οποίος υποστήριξε την ύπαρξη κοινωνικών δομών που διαρθρώνονται σύμφωνα με τον "τύπο" σκέψης. Χαρακτηριστικό είναι το έργο του "Οι νοητικές διεργασίες στις κατώτερες κοινωνίες" (Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures) του 1922⁴. Στη φιλοσοφία, όμως, το χαρακτηριστικότερο έργο το έδωσε ο Ernst Cassirer (1874-1945) ο οποίος στο έργο του " Ουσία και Συνάρτηση " (Substanzbegriff und Funktionsbegriff) του 1910 μεταξύ άλλων υποστηρίζει ότι " ...η σχετική δομή αυτή καθ' αυτή συνιστά το πραγματικό αντικείμενο της μαθηματικής έρευνας"⁵. Στην ψυχολογία, από την άλλη, ο Jean Piaget (1896-1980)

¹ Ιλίσεφ, Λ.Φ.-Φεντοσέγιεφ, Π.Ν. : "Φιλοσοφικό εγκυκλοπαιδικό Λεξικό", εκδ. Καπόπουλος, Αθήνα, 1986, τόμος 5, σελ. 97.

² Στις τρεις αυτές επιστήμες υπάρχει διαφορετική αντίληψη του δομισμού (φιλοσοφία, γλωσσολογία, ανθρωπολογία). Στην ανθρωπολογία οι δομιστές εξετάζουν τις ανθρώπινες συμπεριφορές, τα ήθη, τα έθιμα σαν δομές με στοιχεία τους ανθρώπους. Στη γλωσσολογία η προσπάθεια των δομιστών επικεντρώθηκε στην μελέτη του συντακτικού και την επέκταση του σε ουσιαδέστερες τεχνικές. Η φιλοσοφική ερμηνεία του δομισμού τέλος, μπορεί να χωριστεί σε δύο κατευθύνσεις: στις φιλοσοφικές ιδέες των ίδιων των δομιστών, κατά τις οποίες γίνεται προσπάθεια για το πέρασμα από τη γνώση της ανθρωπιστικής παιδείας στο αφηρημένο και στο θεωρητικό, και στη δομιστική ιδεολογία των φιλοσόφων κατά τους οποίους η σύγχρονη κοσμοθεωρία βασίζεται στη δομική αντιπαράθεση ανθρώπου και ιστορίας." Φιλ. Εγκ. Λεξικό", τόμος 5, σελ.99.

³ Βώκος, Γεράσιμος: " Η θεμελίωση της γλωσσολογίας ως επιστήμης στο έργο του Ferdinand de Saussure", περιοδικό Φιλολόγος, τεύχος 42, 1985, σελ. 325-337

⁴ "Φιλ. Εγκ. Λεξικό", τόμος 3, σελ. 204.

⁵ Cassirer, Ernst: " Substance and function and Einstein's theory of Relativity ", Dover Publications, 1953, σελ.93.



Jean Piaget

ήταν εκείνος που με το έργο του έθεσε γερές τις βάσεις του δορισμού τόσο στην ψυχολογία όσο και στις παιδαγωγικές επιστήμες. Στο έργο του “Η ψυχολογία της ευφυΐας” (1947) ανέφερε χαρακτηριστικά ότι “Η προϋπόθεση της κατανόησης των εννοιών είναι η οργάνωση των ολικών δομών”. Είκοσι χρόνια αργότερα με το έργο του “Στρουκτουραλισμός” όρισε τον σύγχρονο δορισμό⁶. Το έργο του Levy-Bruhl όμως δεν έθεσε τις βάσεις μόνο για την ανάπτυξη της φιλοσοφίας και της ψυχολογίας στο δορισμό. Ο ανθρωπολόγος Claude Levi – Strauss (γεν. 1908), ο οποίος θεωρείται ο χαρακτηριστικότερος εκπρόσωπος του δορισμού στη Γαλλία, είχε σαν πρότυπό του το έργο του Levy – Bruhl. Εξέδωσε έργα όπως η “Δομική Ανθρωπολογία 1 και 2” (1958 και 1973) στα οποία αναζητά τις κοινωνικές δομές. Ο Levi – Strauss επίσης ήταν από τους πρώτους που συνέδεσαν φανερά τον μαθηματικό δορισμό με τον θεωρητικό δορισμό⁷. Επιβάλλεται, επίσης, να αναφερθούμε σε έναν από τους σημαντικότερους γλωσσολόγους του 20^{ου} αιώνα, τον Noam Chomsky (γεν.1928) ο οποίος με το έργο του “Σημαντικές Δομές” (1957) σηματοδότησε την πορεία του δορισμού μέσα στη γλωσσολογία αλλά και τη σημασία της γλωσσολογίας στη σύγχρονη επιστημονική κοινότητα⁸. Τέλος, στη λογοτεχνία εμφανίστηκαν αρκετοί πεζογράφοι ή ποιητές που επηρεασμένοι από τον δομικό τρόπο σκέψης συνέγραψαν εξαιρετικά έργα. Πιο χαρακτηριστική όμως είναι η ίδρυση του OULIPO (Ouvroir de Literature Potentielle = Εργαστήριο Δυναμικής Λογοτεχνίας) του 1960. Δυναμική λογοτεχνία είναι η συνεχής αναζήτηση νέων μορφών και δομών για τη συγγραφή πεζού και ποίησης⁹. Δε γίνεται, φυσικά, να παραλείψουμε τον ρόλο των μαθηματικών στο δομικό

⁶ "Εκπαιδευτική Ελληνική Εγκυκλοπαίδεια- Παγκόσμιο Βιογραφικό Λεξικό", τόμος 8, Εκδοτική Αθηνών, 1988, σελ. 263-264.

⁷ Aubin, David: "The withering immortality of Nicolas Bourbaki", Science in Context, vol. 10, 2, 1997, σελ. 301-302.

⁸ Chomsky, Noam: "Προπαγάνδα και ΜΜΕ", εκδ. Πρίσμα, 1992, εισαγωγή του Π.Καλαμαρά

⁹ Aubin (1997), σελ. 320-321.

τρόπο σκέψης. Ανάμεσα τους υπάρχει μια αμφίδρομη σχέση, σ' αυτό όμως θα αναφερθούμε εκτενώς στο επόμενο κεφάλαιο. Προς το παρόν, ήρθε η ώρα να ορίσουμε τη δομή.

Σαν δομή θεωρούμε το σύνολο των σχέσεων ανάμεσα στα εξεταζόμενα στοιχεία είτε αυτά είναι λέξεις είτε συμπεριφορές είτε άνθρωποι είτε αριθμός. Η δομή δεν εξαρτάται τόσο από τα στοιχεία αυτά καθαυτά όσο από τις σχέσεις που τα συνδέουν, είναι κάτι γενικό. Ο δομισμός ενδιαφέρεται για τις δομές εξετάζοντας τους γενικούς νόμους με τους οποίους αυτές λειτουργούν. Ο δομισμός περιέχει την πεποίθηση ότι οι ατομικές μονάδες κάθε συστήματος έχουν νόημα μόνο χάρη στις μεταξύ τους σχέσεις. Οι εικόνες ενός ποιήματος δεν έχουν ουσιαστικό νόημα αλλά μόνο συσχετιστικό : οι εικόνες εξηγούν και καθορίζουν η μία την άλλη¹⁰. Ο δομισμός αφορά την γενική εξέταση των προβλημάτων που σχετίζονται με τις δομές. Αυτά είναι : 1) η περιγραφή, σύγκριση και ταξινόμηση των τύπων δομής που χαρακτηρίζουν την εσωτερική οργάνωση των συστημάτων, 2) η σχέση των δομών με την πραγματικότητα και την μέθοδο γνώσης και 3) η μεταβολή των δομών¹¹. Ως δομή μπορούμε να ορίσουμε το σύστημα των μετασχηματισμών το οποίο διέπεται από νόμους (άσχετους με τα στοιχεία που συναποτελούν τη δομή) και το οποίο διατηρείται ή εμπλουτίζεται από τους ίδιους τους μετασχηματισμούς χωρίς αυτοί να ξεπερνούν τα όριά τους ή να προσφεύγουν σε εξωτερικά στοιχεία¹². Κατ' επέκταση, ο δομισμός είναι το επιστημολογικό ρεύμα ανάμεσα στα στοιχεία μιας ομάδας, την οποία ορίζουμε σαν σύστημα, και επεκτείνει αυτήν την ομάδα-σύστημα σε κάθε μια από τις δομές που θα θέλαμε να μελετήσουμε¹³.

Είναι γεγονός ότι υπήρξαν πολλές δυσκολίες και διαφωνίες στην προσπάθεια αυστηρού ορισμού για τον δομικό τρόπο σκέψης¹⁴. Κατ' αρχάς, στις διάφορες επιστήμες διαφέρουν και οι ορισμοί. Επίσης καθώς εμφανίστηκαν πολλά παρακλάδια του δομισμού οι υποστηρικτές καθ' ενός απ' αυτά έδωσαν δικούς τους ορισμούς. Ο ορισμός που δώσαμε παραπάνω είναι ο ευρύτερα διαδεδομένος και αυτός που χαρακτήρισε την πορεία του ρεύματος στη Γαλλία. Κατά τον Piaget οι δυσκολίες αυτές εμφανίστηκαν γιατί πρώτον ο δομισμός έχει πάρει τόσες μορφές ώστε να μην βρίσκεται ένας κοινός παρανομαστής και δεύτερον επειδή οι δομές που προέκυψαν πήραν εντελώς διαφορετικές σημασίες. Συγκρίνοντας τις διάφορες σημασίες που πήρε ο δομισμός στις σύγχρονες επιστήμες και στις καθημερινές συζητήσεις φαίνεται ότι είναι δυνατό να επιχειρήσουμε μια διαφορετική σύνθεση ορισμού συναντώντας όμως παράλληλα δύο σημαντικά προβλήματα : το πρώτο αφορά το ιδεώδες που εμπεριέχει η έννοια της δομής και που εκδηλώνεται

¹⁰ Ηγκλετον, Τέρι: "Εισαγωγή στη θεωρία της λογοτεχνίας", μετ.Τζιόβας Δ., εκδόσεις Οδυσσέας, 1989, σελ. 148-149

¹¹ Δημητρίου, Σωτήρης: "Λεξικό Όρων: Φιλοσοφικό", τόμος Va, εκδόσεις Καστανιώτη, Αθήνα, 1987, σελ. 107

¹² Piaget, Jean: "Στρουκτουραλισμός", μετ. Παπαρδέλης Θ., εκδόσεις Καστανιώτη, Αθήνα, 1972, σελ. 32.

¹³ www.Britannica.com/structuralism.

¹⁴ Όπως τα συνέδρια της Cerisy-la-Salle και του Παρισιού το 1959 που έγιναν για να δώσουν ορισμούς για το "Dictionnaire Terminologique de sciences sociales" (Λεξικό Όρων των κοινωνικών Επιστημών) και έδωσαν δύο διαφορετικούς ορισμούς.

Aubin (1997), σελ. 314-315

στις κατακτήσεις ή τις ελπίδες των διάφορων ειδών του δορισμού και το δεύτερο αφορά τους σκοπούς που συνόδευσαν τη γένεση και ανάπτυξη του κάθε είδους, σε αντίθεση με τις κυρίαρχες τάσεις των διαφόρων επιστημών¹⁵.

Οι διάφορες μορφές του δορισμού στις οποίες αναφερθήκαμε είναι ο γενετικός και ο μη γενετικός δορισμός, οι βαθιές και οι επιφανειακές δομές κ.α. Ο γενετικός δορισμός ήταν το κυρίαρχο σε σχέση με τα υπόλοιπα ρεύματα και ο χαρακτηριστικότερος εκπρόσωπος του είναι ο Lucien Goldman, μαθητής του Piaget. Κατά τον Goldman, λοιπόν, η δομική συνεκτικότητα δεν είναι στατική πραγματικότητα αλλά δυναμική δυναμικότητα στο εσωτερικό των ομάδων¹⁶. Στον γενετικό δορισμό "η γένεση χωρίς τη δομή θα ήταν τυφλή και η δομή χωρίς γένεση θα παρέμενε κενή"¹⁷. Στον μη γενετικό δορισμό από την άλλη μεριά σηματοδοτείται η ύπαρξη των μόνιμων και οικουμενικών δομών με την εξάλειψη κάθε προσπάθειας να τις εξηγήσουμε όπως η θέση του Θεού στις θρησκείες και τις αξιωματικής μεθόδου στα μαθηματικά¹⁸. Σε ότι αφορά τις επιφανειακές και τις βαθιές δομές η διάκριση γίνεται με διαφορετικά κριτήρια. Κατά τον A. Cicourel η αίσθηση της κοινωνικής δομής, την οποία προσπαθούμε να εδραιώσουμε κατά την μεταξύ μας διαντίδραση, αποτελεί συνδυαστικό προϊόν αφενός "επιφανειακών" και αφετέρου "ερμηνευτικών" ή "βαθέων" κανόνων, όπως τους αποκαλεί, αντλώντας τις έννοιες αυτές από το έργο του Chomsky. Οι επιφανειακοί κανόνες είναι οι κανόνες της κοινωνικής ζωής τους οποίους οι άλλες θεωρητικές προσεγγίσεις θεωρούν δεδομένους και μη προβληματικούς¹⁹. Η "επιφανειακή" δομή, λοιπόν, δηλώνει τα καταγεγραμμένα και κοινώς αποδεκτά χαρακτηριστικά ενός φαινομένου. Όταν όμως περνάμε στην ερμηνεία του φαινομένου ερχόμαστε αντιμέτωποι με την "βαθιά" δομή. Ο Rene Thom αναφέρει ότι η "βαθιά" δομή δεν είναι παρά ένα εργαλείο για την περιγραφή της σημασίας των φαινομένων²⁰. Μια διαφορετική μορφή του δορισμού είναι η εφαρμογή του στα μαθηματικά. Ακολούθως θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε ακριβώς αυτό, τον δομικό τρόπο σκέψης στα μαθηματικά.

¹⁵ Piaget (1972), σελ. 31.

¹⁶ Goldman, Lucien: " Διαλεκτικές Έρευνες", εκδόσεις Γνώση, 1986, μετ. Κ. Παπαγιώργης, σελ. 134.

¹⁷ Bruner, S. Jerome: "Η διαδικασία της παιδείας", εκδόσεις Καραβία, Αθήνα, 1960, σελ. 23.

¹⁸ Δημητρίου (1987), Va, σελ. 108.

¹⁹ Craib, I. : " Σύγχρονη Κοινωνική Θεωρία. Από τον Πάρσονς στον Χάμπερμας", εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, 1998, σελ. 206-207.

²⁰ Thom, René: "Τα μαθηματικά πρότυπα της μορφογένεσης", εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού, 1985, σελ. 206.

Ο ΔΟΜΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΣΚΕΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τα μαθηματικά δεν είναι μόνο επιστήμη αλλά και τρόπος σκέψης. Δε θα ήταν δυνατό, λοιπόν, τα μαθηματικά να μην είχαν τις επιρροές τους από το δομισμό αλλά και να μην επηρέαζαν αυτά με τον τρόπο τους την εξέλιξη του ρεύματος αυτού. Υπάρχει η άποψη ότι: "Στα μαθηματικά δεν έχουμε αντικείμενα με εσωτερικούς νόμους σύνθεσης που φτιάχνουν μια "δομή", έχουμε μόνο "δομές". Τα αντικείμενα των μαθηματικών, δηλαδή οι οντότητες που οι μαθηματικές μεταβλητές και ποσοδείκτες δηλώνουν, είναι σημεία χωρίς δομή ή θέσεις σε δομές. Σαν θέσεις σε δομές δεν έχουν ταυτότητα ή χαρακτηριστικά έξω απ' αυτές"²¹.

Μπορούμε χαρακτηριστικά να αναφέρουμε την προσπάθεια ορισμού των κλασμάτων με τη βοήθεια των διατεταγμένων ζευγών ή ακόμα και τη θεώρηση της γεωμετρίας μέσω των διανυσματικών χώρων. Τα κλάσματα σαν κλάσεις ισοδυναμίας

$$Q = \{ (a_1, a_2) : a_1/a_2, a_1 \in \mathbb{Z}, a_2 \in \mathbb{Z}, a_2 \neq 0 \}^{22}$$

δεν εισάγονται από μεμονωμένες καταστάσεις αλλά προέρχονται από μια ολότητα. Η σημασία τους δεν αποκτιέται άμεσα αλλά έμμεσα από τις εσωτερικές διασυνδέσεις του συστήματος τους. Όπως για παράδειγμα, το γεγονός ότι το $\frac{1}{2}$ είναι μικρότερο από τη μονάδα είναι εμφανές. Πρέπει να τα ορίσουμε ως διατεταγμένο ζεύγος και μέσω των αξιωμάτων των πράξεών τους να αποδείξουμε την ανισότητα $\frac{1}{2} < 1$ ²³. Η γεωμετρία ξεφεύγοντας από την παραστατικότητα και περνώντας στην γενικότητα των διανυσματικών χώρων, κινείται στο θεωρητικό πλαίσιο της δομής και του δομικού τρόπου σκέψης²⁴.

Είναι φανερό λοιπόν ότι ο δομικός τρόπος σκέψης και οι δομές είναι ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της μαθηματικής επιστήμης. Μάλιστα, στα μαθηματικά υπήρξαν δείγματα τρόπου σκέψης που συνέκλιναν σ' αυτό που αργότερα ονομάστηκε δομισμός, πολύ πριν εμφανιστούν στις άλλες επιστήμες. Μια πρώτη προσέγγιση έγινε από τον Martin Ohm (1792-1872) όταν το 1828 με το έργο του "Αναζήτηση ενός κοινώς αποδεκτού συστήματος Μαθηματικών"(Versuch eines vollkommen consequenten systems der Mathematik) μίλησε για το γεγονός ότι η μοντέρνα άλγεβρα θα έπρεπε να έχει σαν κύριο άξονά της τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων που ορίζουν τα εκάστοτε σύνολα²⁵. Λίγα χρόνια αργότερα, στη Μ. Βρετανία, ο μαθηματικός George Peacock (1791-1850) αναφέρθηκε στις λογικές δομές της συμβολικής

²¹ Tymoczko, Thomas: "Structuralism and post- Modernism in the philosophy of mathematics", Palmer Press, 1994, σελ.49.

²² Λάκκης, Κ.: "Άλγεβρα", Πανεπιστημιακές Εκδόσεις, Θεσσαλονίκη, 1993, σελ.98-99.

²³ Καστάνης, Νικόλαος: "Μια εισαγωγή στη διδακτική των Μαθηματικών", τεύχος Α', Θεσσαλονίκη, 1996, σελ.7.

²⁴ Καστάνης (1996), σελ.8.

²⁵ Nový, Luboš: "Origins of modern algebra", Noordhoff International Publishing, Leyden, 1973, σελ.83 &89.

άλγεβρας και κατέθεσε σημαντικά συμπεράσματα μέσα από ένα φορμαλιστικό πρίσμα στο έργο του " Αναφορά στην πρόσφατη πρόοδο και παρούσα κατάσταση συγκεκριμένων κλάδων της ανάλυσης"(Report on the recent progress and the present state of certain branches of analysis)²⁶. Ο χαρακτηριστικότερος όμως και πλέον γνωστός από τους εισηγητές του δομικού τρόπου σκέψης στα μαθηματικά ήταν ο Evariste Galois (1811-1832).



Evariste Galois

Ο Galois θεωρείται θεμελιωτής της θεωρίας ομάδων—οι ομάδες είναι από τις κυριότερες μαθηματικές δομές. Είναι όμως γεγονός πως, παρότι ο Galois περιέγραψε στο έργο του τη διαδικασία ομαδοποίησης των στοιχείων και αναγνώρισης των ήδη υπάρχουσών ομάδων, η λέξη ομάδα χρησιμοποιείται αρχικά στο έργο του με το πιο κλασικό νόημα της λέξης, αυτό του συνόλου στοιχείων και όχι όπως την ξέρουμε σήμερα στα μαθηματικά²⁷. Πέρα από τις ομάδες, δύο πολύ σημαντικές δομές είναι οι δακτύλιοι και τα σώματα. Ο πρώτος μαθηματικός που όρισε τους δακτυλίους ως δομή ήταν ο Richard Dedekind (1831-1916)²⁸.

Το 1872 ήρθε και το χαρακτηριστικότερο δείγμα δομικού τρόπου σκέψης στη γεωμετρία. Αυτή τη χρονιά ο Felix Klein (1849-1925) εξέδωσε το περίφημο " Πρόγραμμα του Ερλάγκεν" (Erlangen Programme) το οποίο θεωρήθηκε η βίβλος της νέας γεωμετρικής σκέψης. Εκεί ξεκαθαρίζει τη βαθύτερη σύνδεση μεταξύ της μετρικής γεωμετρίας, της προβολικής γεωμετρίας και των μη Ευκλείδειων γεωμετριών γενικότερα χρησιμοποιώντας ως βάση τις ομάδες των γεωμετρικών μετασχηματισμών²⁹. Ο σημαντικότερος, όμως, μαθηματικός που εργάστηκε με βάση τον δομικό τρόπο σκέψης στα τέλη του 19^{ου} αιώνα ήταν ο David Hilbert (1862-1943).

²⁶ Nový(1973), σελ.190 & 199.

²⁷ Wussing, H.: "The genesis of the abstract Group concept", The MIT press, London, 1984, σελ.102 & 111.

²⁸ "Companion Encyclopedia of the history of Philosophy", vol.1, I.Grattan-Guinness, UK, 1994, σελ.752.

²⁹ Wussing (1984), σελ.28.



David Hilbert

Ο Hilbert με την ομιλία του στο Διεθνές Συνέδριο των Μαθηματικών του 1900 δήλωσε ότι "...η μαθηματική επιστήμη είναι ένα αδιάσπαστο όλο, ένας οργανισμός του οποίου η ζωτικότητα στηρίζεται στις συνδέσεις των κομματιών του" εκφράζοντας έτσι το βασικό άξονα του δομισμού³⁰. Ο στενός συνεργάτης του Hilbert, Paul Bernays, αναφέρει ότι ο Hilbert ήταν από τους πρώτους και κύριους εισηγητές της άποψης ότι ένα σύστημα αξιωμάτων δεν είναι ένα σύστημα δεδομένων γύρω από ένα ζήτημα αλλά ένα σύστημα προϋποθέσεων που δίνουν αυτό που ονομάζεται συσχετιστική δομή. Μια τέτοια δομή είναι το άμεσο αντικείμενο της αξιωματικής θεωρίας ή αυτού που λέμε "μοντέρνα αξιωματική προσέγγιση" με την οποία έχει συνδέσει το όνομά του³¹. Ο Hilbert θεωρείται, επιπλέον, και ο ιδρυτής της σχολής του φορμαλισμού στα μαθηματικά ενώ με το σύγγραμμά του "Θεμέλια της Γεωμετρίας" (Grundlagen der geometrie) του 1899, στο οποίο αναλύει διεξοδικά την αξιωματική μέθοδο, δίνει ένα πρώιμο "μανιφέστο" της φορμαλιστικής θέσης που κράτησε από το 1920 κι έπειτα³². Παράλληλα με τον Hilbert εργάστηκε και ο Elie Cartan ο οποίος ήταν από τους πρώτους που χρησιμοποίησε ξεκάθαρα τον όρο "δομή" στο έργο του και πιο συγκεκριμένα στο βιβλίο "Η δομή των σχετικών συνόλων" του 1894³³. Ο Elie Cartan ήταν ο πατέρας του Henri Cartan ενός από τα ιδρυτικά μέλη της ομάδας των Bourbaki. Η πορεία του δομικού τρόπου σκέψης στα μαθηματικά σίγουρα δε σταματά στους Bourbaki αλλά εν προκειμένω μας ενδιαφέρει το ιστορικό υπόβαθρο στο οποίο στηρίχτηκε αυτή η ομάδα και όχι οι μεταγενέστεροι³⁴.

³⁰ Aubin (1997), σελ.305.

³¹ The Encyclopedia of Philosophy: Hilbert, David by Paul Bernays, The Macmillan Company and the Free Press, NY, 1967, σελ.497.

³² Corry, Leo:"The origins of eternal truth in mathematics: Hilbert to Bourbaki and beyond", Science in Context, is.10, vol.2, σελ.256.

³³ Aubin (1997), σελ.341.

³⁴ Όπως ο René Thom, ο Benoît Mandelbrot και ο Michael Resnik. Aubin (1997), σελ.330.

Δεν είναι δύσκολο, λοιπόν, να καταλάβουμε ότι η μαθηματική δομή είχε μια εξελικτική πορεία μέσα στα χρόνια. Η δομή στα μαθηματικά είναι ένα όργανο συνοχής που εμπεριέχει την ίδια της τη λογική με την αυτορρύθμιση³⁵. Η δομή είναι ένα κλειστό σύνολο που μένει αναλλοίωτο για τις πράξεις του³⁶. Μπορούμε να διαχωρίσουμε και τη μαθηματική δομή σε επιφανειακή και βαθιά. Εδώ επιφανειακή δομή είναι η συντακτική περιγραφή των χαρακτηριστικών των πράξεων που περιέχονται στη δομή. Η βαθιά δομή είναι η σημασιολογική κατανόηση της σχεσιακής υποστάσεως της σύγχρονης μαθηματική γνώσης. Πρέπει, όμως, να τονίσουμε κάτι: το κάθε ζήτημα που πραγματεύονται οι μαθηματικές δομές είναι αφηρημένο-γενικό. Είτε το περιεχόμενο είναι το σύνηθες αριθμητικό είτε είναι αλγεβρικό, δύσκολο ή εύκολο, είναι απαραίτητως αφηρημένο για να κατανοηθεί ορθά. Ο δομικός τρόπος σκέψης στα μαθηματικά έχει νόημα μόνο όταν θεωρούμε γενικά συστήματα³⁷. Πολύ σημαντικό δείγμα του δομισμού στα μαθηματικά είναι οι "μητρικές δομές" τις οποίες θεμελίωσαν οι Bourbaki. Γι' αυτές, όμως, θα μιλήσουμε λίγο αργότερα.

³⁵ Η αυτορρύθμιση είναι η εφαρμογή των τριών βασικών αρχών του ορθολογισμού: η αρχή της μη αντίφασης, η αρχή της ταυτότητας και η αρχή σύμφωνα με την οποία το σημείο αφίξεως είναι ανεξάρτητο από την πορεία που ακολουθούμε, Piaget (1972), σελ.43.

³⁶ Δημητρίου (1987), σελ.107-108.

³⁷ Rickart, Charles: "Structuralism and Mathematical thinking", The nature of mathematical thinking, ed. Lawrence Erlbaum Associates, NJ, 1996, σελ.290.

BOURBAKI ΕΝΑ ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ- ΕΡΓΟΓΡΑΦΙΑ

Όταν θέλουμε να αναφερθούμε στην πιο χαρακτηριστική περίπτωση του δομισμού στα μαθηματικά δεν έχουμε παρά να μιλήσουμε για την ομάδα των Bourbaki³⁸. Οι Bourbaki (B.) από την πρώτη μέρα δημοσίευσης των εργασιών τους έδωσαν το στίγμα τους σε ό,τι αφορούσε τα μαθηματικά και τη δομική προσέγγισή τους. Πολλοί παραλλήλισαν την εποχή των B. με την εποχή της ακμής του δομισμού³⁹. Παρ' ότι, όπως αναφέραμε νωρίτερα, οι B. δεν ήταν οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με τις μαθηματικές δομές το έργο τους ήταν χαρακτηριστικό και παράλληλα με την εξάπλωση της φήμης τους εξαπλώθηκε και η χρήση των δομών γενικότερα. Γι' αυτό και θεωρούνται αντιπρόσωποι του δομισμού στον ευρύτερο επιστημονικό χώρο.



Τα μέλη των Bourbaki σε ηλικία ... λίγο πριν μπουν στην ομάδα.

Οι Bourbaki⁴⁰ δημιουργήθηκαν στη Γαλλία το 1934 μετά από την παρακίνηση δύο σπουδαίων μαθηματικών, του André Weil και του Henri Cartan, οι οποίοι τότε ήταν καθηγητές στο πανεπιστήμιο του Στρασβούργου. Αυτοί αποφάσισαν να αρχίσουν μια οργανωμένη προσπάθεια για την ανάκαμψη των γαλλικών μαθηματικών⁴¹ και την προσέγγισή τους μέσα από ένα διαφορετικό πρίσμα.

³⁸ Corry, Leo: "Nicolas Bourbaki and the concept of mathematical structure", περ. Synthése, is.92, Kluwer Academic Publishers, 1992, σελ.315.

³⁹ Aubin (1997), σελ.299.

⁴⁰ Λέγεται ότι η ομάδα Nicholas Bourbaki πήρε το όνομά της μετά από μια φάρσα που είχε κάνει στους φοιτητές του ένας καθηγητής της Ecole Normale, ο οποίος ανέφερε τον N. B. σαν γνωστό μαθηματικό. Στην πραγματικότητα ο N. B. ήταν στρατηγός του Ναπολέοντα και ουδεμία σχέση είχε με τα μαθηματικά.

Beaulieu, Liliane: "A Parisian café and ten proto-Bourbaki meetings (1934-1935)", περ. The Mathematical Intelligencer, vol.15, no.1, 1993, New York, σελ.29.

⁴¹ Λέγεται ότι στη Γαλλία του μεσοπολέμου υπήρχε σοβαρή έλλειψη νέων μαθηματικών λόγω της στρατολόγησης, ανεξαιρέτως, από την κυβέρνηση της Γαλλίας κατά τον Α' Παγκόσμιο πόλεμο. Aubin (1997), σελ.304.

Στις 10 Δεκεμβρίου του 1934 ιδρύθηκε η ομάδα των Bourbaki. Οι μαθηματικοί που αποτέλεσαν τα ιδρυτικά μέλη της ομάδας αυτής ήταν ο Weil, ο Cartan, ο Jean Dieudonné, ο Paul Delsarte, ο Claude Chevalley και ο René de Possel. Κατά την πορεία της ενεργοποίησης των Β. πέρασαν από τις συναντήσεις της ομάδας πολλοί διακεκριμένοι μαθηματικοί όπως ο Samuel Eilenberg, ο Jean Pierre Serre και ο Alexander Grothendieck⁴².



**Συνάντηση Bourbaki 1939:
S.Weil, Ch. Pisot, A. Weil,
J. Dieudonné, C. Chobauty,
Ch. Ehresmann, J. Delsarte**

Για να πάρει κάποιος μέρος στις συναντήσεις των Β. αλλά και να γίνει μέλος της ομάδας έπρεπε να πληροί κάποιες προϋποθέσεις. Κατ' αρχάς, ένας μαθηματικός των Β. έπρεπε να μπορούσε να είναι αυθεντία σε έναν κλάδο αλλά έπρεπε να μπορεί να ασχοληθεί αποτελεσματικά με όλους τους κλάδους των μαθηματικών, να τους συζητήσει και να μπορεί να γράψει πάνω σ' αυτούς. Καθώς οι περισσότεροι από τους Β. ήταν καθηγητές πανεπιστημίων είχαν τη δυνατότητα να γνωρίσουν πολλούς νέους μαθηματικούς. Όταν επισήμαιναν κάποιον που έδειχνε ιδιαίτερο ταλέντο τον προσκαλούσαν δοκιμαστικά σε μια από τις συναντήσεις τους. Για να γίνει δεκτός έπρεπε όχι μόνο να καταλαβαίνει τι γίνεται αλλά και να συμμετέχει ενεργά. Αν παρέμενε σιωπηλός τότε δεν τον ξανακαλούσαν. Τέλος, για να μπει ένας μαθηματικός στους Β. έπρεπε να είναι κάτω από 50 ετών. Αλλά και όταν κάποιος από την ομάδα έφτανε το πενήτηκοστό έτος της ηλικίας του έπρεπε να αποχωρήσει⁴³.

Έτσι, και με αλληπάλληλες συναντήσεις, οι Β. άρχισαν το συγγραφικό τους έργο. Με πρότυπο την αυστηρή γλώσσα και τον τρόπο γραφής της Άλγεβρας του van der Waerden προσπάθησαν να συντάξουν μαθηματικά κείμενα τα οποία να έχουν αυστηρή θεμελίωση αλλά και σαφή διατύπωση.

⁴² Corry (1992), σελ.318-319.

⁴³ Dieudonne, Jean: " Το έργο του Ν. Bourbaki", περιοδικό Μαθηματική Επιθεώρηση, τεύχος 7, 1977, σελ. 65-68.

Προσπάθησαν να αποφύγουν όρους οι οποίοι κατ' αυτούς δεν είχαν νόημα, όπως για παράδειγμα "μη φθίνουσα" αντί για "αύξουσα". Οι B. εισήγαγαν αρκετούς νέους όρους, με απώτερο στόχο τη λεπτομερέστερη περιγραφή, χρησιμοποίησαν τα αρχαία Ελληνικά αλλά και πολλές λέξεις της καθομιλουμένης κάτι που δυσαρέστησε τους οπαδούς της παράδοσης. Απέφυγαν, τέλος, τη χρήση συντομογραφιών και αρχικών προσπαθώντας να γράφουν όσο το δυνατό πιο αναλυτικά.

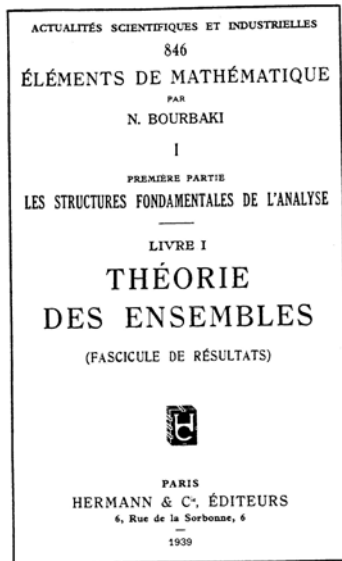
Πέρα όμως από τα διαδικαστικά, επιφανειακά στοιχεία του έργου των B., αυτό που είχε ουσία ήταν η επιλογή των θεμάτων που πραγματεύονταν τα βιβλία τους. Εργάστηκαν πάνω στις κλασικές, για μας πλέον, δομές όπως την γραμμική και πολυγραμμική άλγεβρα, την γενική τοπολογία και τους γραμμικούς τοπολογικούς χώρους, την ομολογική άλγεβρα, την αντιμεταθετική και μη άλγεβρα, τις ομάδες του Lie, τη θεωρία ολοκλήρωσης, τις διαφορικές πολλαπλότητες, τη Ρεϊμάνιο γεωμετρία, τη διαφορική τοπολογία, την αρμονική ανάλυση, κάποιες διαφορικές εξισώσεις, τις αναπαραστάσεις ομάδων, την αναλυτική γεωμετρία και την αριθμοθεωρία.

Από την άλλη δεν ασχολήθηκαν καθόλου με τη θεωρία των πληθικών και των διατακτικών αριθμών, την καθολική άλγεβρα, τους συνδέσμους, τη μη προσεταιριστική άλγεβρα, τη θεωρία ομάδων, τη θεωρία αριθμών, τις τριγωνομετρικές σειρές, τις σειρές των πολυωνύμων, τη θεωρία προσεγγίσεων και όλα τα εφαρμοσμένα Μαθηματικά⁴⁴.

Αυτή η επιλογή προέκυψε από την προσπάθεια των B. να "κόψουν τις άκρες" και να κρατήσουν τον κύριο κορμό των Μαθηματικών. Δεν περιελήφθησαν, ακόμα, κλάδοι που απαιτούσαν πολλά ειδικά τεχνάσματα. Οι B. θέλησαν να περιλάβουν στα βιβλία τους θεωρίες που να αποτελούν ένα αρμονικό σύνολο ιδεών, όπου οι μέθοδοι απορρέουν με φυσικότητα από τα αξιώματα, χωρίς την ανάγκη χρήσης ιδιαίτερων και πολύπλοκων διαδικασιών. Τέλος, οι B. αγνόησαν τις θεωρίες που βρίσκονταν υπό εξέλιξη. Σκοπός τους, εξάλλου, δεν ήταν να παράγουν καινούρια πορίσματα και θεωρίες αλλά να καταγράψουν τα ήδη θεμελιωμένα.

Με όλους αυτούς τους κλάδους των μαθηματικών οι B. ασχολήθηκαν στα βιβλία τους που άρχισαν να εκδίδονται από το 1939 κι έπειτα. Πρώτο τους δημοσίευμα ήταν εγχειρίδιο, το " Mode d' emploi de ce traité" που αφορούσε το πρώτο βιβλίο των περίφημων Στοιχείων τους (Eléments de Mathematiques), τη "Θεωρία συνόλων". Τα βιβλία αυτά ήταν στο σύνολό τους 10. Το πρώτο ήταν η " Θεωρία συνόλων" στο οποίο ασχολήθηκαν με τις γενικές δομές όπως τα σύνολα των φυσικών N και των ακεραίων Z . Το δεύτερο ήταν η "Άλγεβρα" που περιλάμβανε στοιχεία γραμμικής άλγεβρας και πολυωνυμικών πεδίων. Το τρίτο ήταν η "Γενική Τοπολογία" με τοπολογικές ομάδες στους χώρους R , R^n και C . Το τέταρτο βιβλίο αφορούσε τις "Συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής" και αναφερόταν στις σειρές του Taylor. Το πέμπτο βιβλίο ονομαζόταν "Τοπολογικά Διανυσματικά Διαστήματα"

⁴⁴ Dieudonne (1977), σελ.61-62.



Η πρώτη έκδοση των *Éléments* των Bourbaki

και περιλάμβανε στοιχεία για τα πεδία του Hilbert. Το έκτο βιβλίο αφορούσε τη "Θεωρία μέτρου" ενώ το έβδομο αναφερόταν στις "Ομάδες και τις άλγεβρες του Lie". Το όγδοο βιβλίο με τον τίτλο "Commutative Algebra" αναφερόταν εκτενώς στα modules ενώ το ένατο βιβλίο αφορούσε τις φασματικές θεωρίες. Το δέκατο, τέλος, βιβλίο ήταν μια τοποθέτηση στις διαφορικές και αναλυτικές διαδικασίες⁴⁵. Τα βιβλία των στοιχείων γράφονταν μέχρι το 1973. Το 1948 και το 1949 δημοσιεύτηκαν τα άρθρα " Η Αρχιτεκτονική των Μαθηματικών" και " Τα θεμέλια των μαθηματικών για τον ενεργό μαθηματικό" αντίστοιχα⁴⁶.

Οι Β. κάποια στιγμή έπαψαν να παράγουν. Δεν ανακοίνωσαν τη διάλυσή τους αλλά υποσκελίστηκαν από τις εξελίξεις των οποίων δεν μπορούσαν να αποτελέσουν κομμάτι. Η νεώτερη γενιά μαθηματικών στις αρχές της δεκαετίας του '70 έκανε το μεγάλο άλμα στη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, τη έντονη εξειδίκευση και τη ραγδαία ανάπτυξη των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Αυτά ήταν εξάλλου το μέλλον των Μαθηματικών και αφού οι Β. πάντα υποστήριζαν ότι δημιουργήθηκαν για να βοηθήσουν στην εξέλιξη της επιστήμης και όχι να τη σταματήσουν, δεν είχαν παρά να υποχωρήσουν. Οι ίδιοι άλλωστε δεν ασχολήθηκαν, εσκεμμένα, με τις εξελισσόμενες θεωρίες όπως προείπαμε.

⁴⁵ Bos, J. M. Henk: *Lectures in the History of Mathematics*, American Mathematical Society, 1991, σελ.149

⁴⁶ Corry (1992), σελ.320

BOURBAKI ΚΑΙ ΔΟΜΙΣΜΟΣ

Το μαθηματικό τους έργο και η καθιέρωσή τους

Πολλές φορές, μέσα από κάποια γεγονότα και την αλληλουχία του, προκύπτουν ερωτήματα παρόμοια και αντίθετα μεταξύ τους ταυτόχρονα. Αν εξετάσουμε την ομάδα που αποτέλεσε τους Bourbaki σε συνάρτηση με την περίοδο κατά την οποία εργάστηκε, θα αναρωτηθούμε : το ρεύμα του δομισμού και η πορεία του επηρεάστηκαν από τη δουλειά των Bourbaki ή ήταν οι Bourbaki εκείνοι που υιοθέτησαν και ενσωμάτωσαν στο έργο τους την ιδεολογία του ρεύματος αυτού; Ο δομισμός «άνοιξε τα φτερά του» με βάση τη μαθηματική θεωρία που αναπτύχθηκε πάνω στην έννοια των Μαθηματικών δομών ή τα Μαθηματικά υιοθέτησαν σαν μέθοδο ως ήδη υπάρχουσες έννοιες της δομής και του δομικού τρόπου σκέψης.

Οι απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα ενώ αρχικά δείχνουν προφανείς, στην ως βάθος εξέταση τους χάνουν τη σαφήνειά τους. Υπάρχουν αναφορές στο έργο μεγάλων ανθρωπολόγων, γλωσσολόγων, ψυχολόγων αλλά και λογοτεχνών, που ανήκαν στο ρεύμα του δομισμού, οι οποίες καταδεικνύουν ότι το έργο και ο τρόπος σκέψης των Bourbaki επηρέασαν και το δικό τους έργο⁴⁷. Καθώς πολλοί από αυτούς αποτέλεσαν κομμάτι του θεμελίου λίθου για την ανέγερση και εξάπλωση του δομικού τρόπου σκέψης μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι η επίδραση του έργου και των δημοσιευμάτων των Bourbaki ήταν πολύ σημαντική. Από την άλλη μεριά οι ίδιοι οι Bourbaki θεώρησαν εαυτούς απλούς συνεχιστές της θεωρίας της δομής που από ότι λένε εξετάζεται στα Μαθηματικά από το 1840⁴⁸. Σημειώνουν επίσης ότι αυτή η θεωρία δεν έγινε αντιληπτή από τους σύγχρονους μαθηματικούς παρά μετά το 1900. Παράλληλα, πολλοί ερευνητές του ρεύματος του στρουκτουραλισμού υποστηρίζουν ότι τα Μαθηματικά δεν ανήκουν στην οικογένεια των δομικών επιστημών αφού και Bourbaki και τα Μαθηματικά εξαιρέθηκαν από τα ειδικά αφιερώματα-τεύχη των περιοδικών *L'Arc* (1965) και *L'Esprit* (1963,1967)⁴⁹.

Προφανώς οι απόψεις δίστανται σε τέτοιο βαθμό ώστε να θεωρείται περιττό να προσπαθήσουμε να ανακαλύψουμε ποιος έχει δίκιο και ποιος έχει άδικο. Εξάλλου, οι Bourbaki ενέταξαν στο έργο τους τη δομή με τέτοιο τρόπο ώστε

⁴⁷ Αναφέρουμε χαρακτηριστικά τον Ελβετό ψυχολόγο Jean Piaget ο οποίος με δύο από τα συγγράμματά του υποστήριξε ένθερμα το ρόλο των μαθηματικών στην εξέλιξη του στρουκτουραλισμού. Το πρώτο ήταν το άρθρο που δημοσιεύτηκε το 1955 στη *L'Enseignement des Mathématiques*, 11-33, εκδ. Neuchatel με τίτλο «Οι μαθηματικές δομές και οι λειτουργικές δομές της ευφυΐας». Ακόμα το 1968 δημοσίευσε ένα τευχίδιο στο δημοφιλές «*Que je sais?*» με τίτλο «*Structuralism*» το οποίο έτυχε τεράστιας αποδοχής και στο οποίο ο Piaget δίνει έμφαση στην κεντρικότητα των μαθηματικών.

Ακόμα, ο γνωστός ανθρωπολόγος Claude Levi – Strauss συνεργάστηκε με μαθηματικούς για την επεξεργασία του έργου του επάνω στον στρουκτουραλισμό.

Τέλος, ο κοινωνικός επιστήμονας και συγγραφέας Jacques Ronband αναφέρει στο έργο του «*Le grand incendie de Londres*», Paris : Seuil, 1989, σελ. 148, ότι «...η δικιά μου έννοια της πρόζας επηρεάστηκε σημαντικά από το έργο των Bourbaki».

⁴⁸ Dieudonné, Jean : «*The difficult birth of mathematical structures* », 1979, σελ.9

⁴⁹ Aubin (1997) σελ. 316

να καταφέρουν να δημιουργήσουν ένα νέο ρεύμα μέσα στην μαθηματική κοινότητα. Αυτόν τον τρόπο θα εξετάσουμε παρακάτω.

Οι Bourbaki ξεκίνησαν τις εργασίες τους κατά το τέλος της δεκαετίας του '30 αντιμετωπίζοντας ένα χωρίς προηγούμενο πλήθος νεότευκτων συμπερασμάτων. Το ερώτημα που ανέκυπτε όλο και περισσότερο ήταν το αν κατά πόσον είχε αρχίσει ο κατακερματισμός του επιστημονικού πεδίου των Μαθηματικών ή αυτά συνεχίζουν να διατηρούν την ενότητα τους σαν μια αρχή, αυτή της Μαθηματικής επιστήμης. Αυτό που φαινόταν ήταν ότι τα Μαθηματικά μετατρέπουν σ' έναν πύργο της Βαβέλ στον οποίο οι αυτόνομες αρχές απομακρύνονταν ολοένα και περισσότερο μεταξύ τους σε ότι αφορούσε τη μεθοδολογία, τους στόχους αλλά και την ορολογία⁵⁰. Οι Bourbaki ανέλαβαν να παρουσιάζουν μια ολοκληρωμένη εικόνα της μαθηματικής γνώσης με ένα συστηματικό κι ενοποιημένο τρόπο, μέσα από ένα σταθερό σημειολογικά σύστημα. Προσπάθησαν να διαμορφώσουν και να καθιερώσουν μια θεωρία δομών που θα θεμελιώνει και θα συνδέει όλες τις επιμέρους θεωρίες των Μαθηματικών. Το κίνητρο ήταν να παρουσιάσουν μια ολοκληρωμένη πραγματεία με ένα ενοποιητικό πνεύμα και μια κοινή έναρξη. Το σχέδιο αυτό ήταν υπερφιλόδοξο με αποτέλεσμα να μην καταφέρουν οι ίδιοι οι Bourbaki να το στηρίξουν όπως έπρεπε αφού δέχτηκαν τα πυρά των συναδέλφων τους μαθηματικών οι οποίοι ήταν υπέρμαχοι της διάσπασης και της εξειδίκευσης των Μαθηματικών αρχών. Αυτοί ανέκοψαν σε αρκετές περιπτώσεις την πορεία και την αποδοχή του έργου των Bourbaki από το κοινό⁵¹.

Παρ' όλα αυτά, οι Bourbaki κατάφεραν να εκδώσουν κάποια πολύ σημαντικά έργα και σε αυτά να συμπεριλάβουν τις θεωρίες που τους έκαναν γνωστούς. Στα «Στοιχεία» τους (*Elements de Mathematiques*) και πιο συγκεκριμένα στο βιβλίο «Θεωρία Συνόλων» το οποίο πρωτοδημοσιεύτηκε το 1939 περιέχονται οι τρεις «μητρικές δομές» (*mother structures*) οι οποίες αποτέλεσαν τον κεντρικό άξονα της δουλειάς των Bourbaki. Αυτές είναι οι αλγεβρικές δομές (π.χ. δομή ομάδας), οι τοπολογικές (π.χ. όρια, περιοχές) και οι διατακτικές δομές (π.χ. σύνδεσμοι, δίκτυα). από κάθε μια από αυτές προκύπτουν άλλες με προσθήκη αξιωμάτων. Τα στοιχεία των δομών είναι τυχαία. Αν τους προσδώσουμε ένα συγκεκριμένο περιεχόμενο παίρνουμε και κάποια από τις γνωστές μας θεωρίες. Έτσι καλώντας τα στοιχεία μιας αλγεβρικής δομής διανύσματα έχουμε τη μελέτη του διανυσματικού χώρου. Καλώντας τα ακεραίοις έχουμε τη μελέτη του συστήματος των ακεραίων αριθμών. κ.λ.π⁵². Καλώς ή κακώς οι θεωρίες με τις οποίες δεν ασχολήθηκαν οι Bourbaki δεν έχουν εφαρμογή σε αυτές τις μεθόδους προσέγγισης των ιδιοτήτων, όπως η θεωρία αριθμών και η αναλυτική γεωμετρία. Είναι δύσκολο να ενταθούν οι

⁵⁰ Bourbaki, Nicholas: "The architecture of Mathematics", μετ. Λευκοπούλου Μ., περ. Διάσταση, τεύχος 1 (1994), σελ. 21-37.

⁵¹ Aubin (1997), σελ. 326-327.

⁵² Λευκοπούλου, Μυρτώ : "Η «αρχιτεκτονική των μαθηματικών» και η επίδραση της στη διδασκαλία τους", περ. Διάσταση, τεύχος 1 (1994), σελ. 14-15.

ιδιαιτερότητες κάθε θεωρίας σε ένα κοινό σύστημα έως και ακατόρθωτο και αυτό διέφυγε από την αντίληψη των Bourbaki⁵³.

Από κει και πέρα η έννοια και η χρήση των δομών διέπει το έργο των Bourbaki και φυσικά συμπεριλαμβάνεται και στα υπόλοιπα βιβλία τους. Αυτό όμως που απουσιάζει χαρακτηριστικά από το έργο των Bourbaki είναι μια διευκρίνιση, ένας ορισμός για το τι ακριβώς είναι μια δομή. Οι Bourbaki είχαν πάντα την πρόθεση να δώσουν στη «δομή» μια ικανοποιητική ερμηνεία που θα μπορούσε να σταθεί σαν επίσημος ορισμός και ακριβής περιγραφή της. Παρ' όλα αυτά, φαίνεται ότι με τον καιρό απέφυγαν, σχεδόν συστηματικά, να ασχοληθούν με κάτι που θα περιέκλειε όλο ουσιαστικά το σκεπτικό με το οποίο εργάστηκαν. Μετά, το 1960, μάλιστα, στις περισσότερες εκδόσεις τους η έμφαση στις δομές ελαττώθηκε αισθητά, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι αυτές απουσίαζαν από το υπόλοιπο έργο τους⁵⁴.

Η σχέση των Bourbaki με τις δομές, όμως, δεν κλείνει εδώ. Μάλιστα, οι Bourbaki επηρέασαν βαθύτατα κάποιες μη μαθηματικές δομές για τις οποίες θα μιλήσουμε παρακάτω.

⁵³ Η Μ. Λευκοπούλου συμπληρώνει ότι αυτή η αντίληψη για τα μαθηματικά δεν ξεφύτρωσε ξαφνικά. Η θεωρία του Galois, το «πρόγραμμα του Erlangen» του Klein και πολλές άλλες μελέτες προετοίμασαν το έδαφος για αυτήν, Λευκοπούλου (1994), σελ. 14-15.

⁵⁴ Aubin (1997), σελ. 327-328.

ΜΠΟΥΡΜΠΑΚΙΣΜΟΣ (Bourbakism)

Στις δεκαετίες που ακολούθησαν την ίδρυση των Bourbaki, τα βιβλία τους έγιναν διάσημα και κλασικά σε πολλά πεδία των καθαρών Μαθηματικών. Το ύφος των γραπτών των B., όπως και ένα σημαντικό κομμάτι των καινοτομιών τους στην ονοματολογία και στο συμβολισμό, γρήγορα υιοθετήθηκαν και έγιναν σημεία αναφοράς. Ακόμα περισσότερο, από τη στιγμή που το όνομα των B. πρωτοεμφανίστηκε, έγινε το επίκεντρο μεγάλου κομματιού της προσοχής και της περιέργειας ανάμεσα στους μαθηματικούς. Αναπτύχθηκε γύρω του ένας ιδιαίτερος μύθος και μια φιλολογία που ακολούθησαν με το τρόπο τους το έργο των B. μέσα στα χρόνια⁵⁵.

Ο μύθος των B. έχει πολλές φορές επηρεάσει την αντικειμενικότητα των εκτιμήσεων γύρω από το έργο τους. Κάποιες κριτικές των γραπτών των B. είναι τόσο χαρακτηριστικά ορμητικές στην περιγραφή των πλείστων αρετών τους που η αξιοπιστία τους κλονίζεται. Από την άλλη υπάρχουν κι εκείνοι που παρασυρμένοι από τον ίδιο μύθο κρίνουν αρνητικά τους B. με μια δόση υπερβολής βέβαια⁵⁶. Υπέρμαχοι, επικριτές ή αδιάφοροι, οι ερευνητές παραδέχονται ότι δημιουργήθηκε ένα ρεύμα με άξονα το έργο των B., ο Μπουρμπακισμός-Bourbakism. Όπως όλες οι έννοιες με όνομα που καταλήγει σε -ισμος (π.χ. ρεαλισμός, φορμαλισμός, υπαρξισμός κ.α.) ο Μπουρμπακισμός αντιμετωπίστηκε στο ρεύμα και τέθηκε στη διάθεση των οπαδών και των πολεμίων τους. Είναι χαρακτηριστικό ότι ο όρος Μπουρμπακισμός υιοθετήθηκε πολύ γρήγορα, από τις πρώτες κιόλας εκδόσεις των βιβλίων των B.⁵⁷, και αφορούσε εκείνους που υποστήριζαν τη σημασία των δομών στα Μαθηματικά και πως θα μπορούσαν αυτές να αποτελέσουν την αφετηρία για την εξαγωγή όλων των σημαντικών μορφών στα Μαθηματικά. Οι B. υποστηρίζουν ότι οι τρεις μητρικές δομές είναι αυτό που μπορούμε να αναγνωρίσουμε τα Μαθηματικά με τη μορφή που είχαν το 1960 και για τον Μπουρμπακισμό κάποιες νέες δομές θα μπορούσαν να είναι εξίσου σημαντικές. Αυτό που μετράει είναι το αν το πεδίο των Μαθηματικών μεγαλώνει ή όχι με την κατάκτηση νέων περιοχών, κατοικημένων από "μαθηματικά όντα" (στοιχεία) τα οποία μπορεί να μην είναι πιο σημαντικά από τα ήδη υπάρχοντα. Οι μαθηματικές θεωρίες επεκτείνονται με τις καινούριες ανακαλύψεις ή μήπως τα καινούρια στοιχεία "χορεύουν" ήδη γνωστούς χορούς; Κατά το Μπουρμπακισμό αυτή η στήριξη του όλου μαθηματικού

⁵⁵ Corry, Leo "Nicolas Bourbaki and the concept of Mathematical structure", περ. Synthése, τ. 92, σελ. 315-348, 1992, Kluwer Academic Publishers, σελ. 318-319.

⁵⁶ Από κάποιους ο Μπουρμπακισμός θεωρήθηκε αίρεση ή αλλιώς η θρησκεία των Μαθηματικών και κατηγορήθηκε σαν κρυπτό-θρησκευτικό κίνημα. Η υπερβολή εδώ είναι πολύ χαρακτηριστική.

⁵⁷ Βαϊνά, Κ.: "Ανάλυση της διδακτικής των Μαθηματικών στην Ελλάδα", εκδ. Γρηγόρη, 1997, σελ. 60.

οικοδομήματος στις μητρικές δομές σημαίνει ότι δύσκολα οτιδήποτε νέο μπορεί να ξεπεράσει τα σύνορα των ήδη γνωστών⁵⁸.

Το να σηματοδοτήσουμε την επίδραση των Β. στα σύγχρονα Μαθηματικά είναι μια περίπλοκη προσπάθεια. Θα έπρεπε να διαχωρίσουμε το βαθμό επίδρασης σε διαφορετικές χρονικές περιόδους, σε διαφορετικές χώρες και φυσικά σε διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών. Σημαντικές είναι οι δεκαετίες του '50 και του '60, στη Γαλλία περισσότερο από άλλες χώρες και σε ότι αφορά τις εξελίξεις στην Άλγεβρα και την Τοπολογία⁵⁹. Αρκεί όμως να δούμε τα κυριότερα χαρακτηριστικά του για να μπορέσουμε να διαπιστώσουμε πόσο γενική ήταν η επιρροή του Μπουρμπακισμού και σε πόσα επίπεδα έδρασε. Ο συνολοθεωρητικός τρόπος σκέψης χαρακτήρισε το έργο των Β. και αποτέλεσε τη βάση για την εξάπλωση του Μπουρμπακισμού. Στα βιβλία και τα κείμενα που γράφτηκαν στο ρεύμα του κυριαρχούσε η αφαίρεση.

Χαρακτηριστικά ήταν η μαθηματική γλώσσα αλλά και τα σύμβολα και η ορολογία που διέπουν αυτά τα έργα. Η αξιωματική μέθοδος υπήρξε, δίχως άλλο, αντιπρόσωπος αυτών των έργων ενώ η αυστηρότητα είχε τη δική της σταθερή θέση μέσα τους. Η φυσική πραγματικότητα θεωρήθηκε πηγή των μαθηματικών ιδεών και ειδικότερα ο φυσικός χώρος πηγή της γεωμετρίας. Τέλος κυριαρχεί μια συνολική αντίληψη που βασίζεται λιγότερο στις μη λογικό-αναλυτικές πλευρές των μαθηματικών και περισσότερο στις διαισθητικές, εννοιακές πλευρές της μαθηματικής δημιουργίας⁶⁰. Σε ότι αφορούσε την επίδραση του Μπουρμπακισμού πάνω στη διδασκαλία των μαθηματικών οι απόψεις έκλιναν στο συμπέρασμα ότι η πορεία του Μπουρμπακισμού ήταν παράλληλη και σχεδόν ταυτόσημη με αυτή της απολυτοκρατίας. Με την απλοϊκότητα και την ευθύτητα μιας υπόθεσης που δεν έχει πρακτική εφαρμογή μπορούμε να πούμε ότι οι αρχές της απολυτοκρατίας (absolutist view) δημιουργούν αντιλήψεις όπως ότι το Μαθηματικά είναι ένα σύνολο από βέβαιες και αιώνιες αλήθειες ανεξάρτητα από κοινωνικές και ιδεολογικές επιδράσεις. Τα Μαθηματικά είναι ουδέτερα και μπορούν να γίνουν κατανοητά από όλους τους μαθητές. Οι σκοποί της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι περισσότερο ειδολογικοί και στοχεύουν στη δημιουργία συγκροτημένων και καλά πειθαρχημένων ατόμων, κατάλληλων για την αναπαραγωγή του κοινωνικού "status". Η αυστηρότητα της μαθηματικής σκέψης και έκφρασης αποτελεί ένα εξαιρετικό εργαλείο για την καλλιέργεια της διανοητικής πειθαρχίας και της ατομικής συγκρότησης. Τα Μαθηματικά διδάσκονται λόγω της εσωτερικής τους αξίας και λόγω του ότι αποτελούν ένα κεντρικό κομμάτι της ανθρώπινης κληρονομιάς και κουλτούρας. Τα σχολικά Μαθηματικά θεωρούνται ως μια καθαρή, αντικειμενική, ουδέτερη και αυστηρώς δομημένη

⁵⁸ Kneebone, G.T.: "Philosophy and the foundations of Mathematics", D.Van Nostrand company limited, 1963, σελ. 328-329.

⁵⁹ Corry (1992), σελ. 319

⁶⁰ Τουμάσης, Μπάμπης: "Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών" εκδ. Gutenberg, 1994, σελ. 93.

γνώση, αφηρημένη και απόλυτη. Τέλος, τα Μαθηματικά είναι το πρότυπο της τελειότητας και της αρμονίας, οι μαθηματικές αποφάνσεις είναι μνημεία τελειότητας και στέρεης γνώσης. Επομένως, τα λάθη στα μαθηματικά είναι επικοινωνία και θεωρούνται σημάδια αποτυχίας του μαθητή στο να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις του απέναντι στο σχολείο. Χωρίς αυτό βέβαια να σημειώνει ότι καταδικάζεται οποιοσδήποτε μαθητής δεν έχει τη νοητική ικανότητα να δεχτεί τη μαθηματική γνώση⁶¹. Οι ίδιοι οι Β. εξάλλου απαιτούσαν και τα μέλη τους να δείχνουν το δέον ενδιαφέρον σε οποιαδήποτε συζήτηση και να εκφράζουν τις απόψεις του με τη βεβαιότητα του ορθού και τη διαλλακτικότητα του επιλεκτικά ακατανόητου.

Αρκετά κείμενα έχουν γραφτεί που αφορούν άμεσα το Μπουρμπακισμό. Μπορούμε να αναφέρουμε χαρακτηριστικά το άρθρο των Weintramb-Mirowski : "The pure and the Applied: Bourbakism comes to Mathematical Economics" και του Israel "Un Aspetto Ideologico della Mathematica Contemporanea: Il Bourbakismo"⁶². Πρέπει όμως να πούμε ότι οι πολλές περιπτώσεις δεν γίνονται άμεση αναφορά στο Μπουρμπακισμό αλλά μια έμμεση περιγραφή της επίδρασης του. Οι υποστηρικτές του έργου των Β. δεν δήλωναν όλοι Μπουρμπακιστές. Πολλοί άλλωστε θέλησαν να υποβαθμίσουν την ευρύτητα που έχει ένας τέτοιος όρος. Με τον ένα τρόπο ή με τον άλλο, πάντως οι Β. άφησαν το στίγμα τους στα Μαθηματικά των μέσω του 20ου αιώνα.

⁶¹ Τουμάσης, (1994) σελ.94.

⁶² Τα αναλυτικά στοιχεία των κειμένων αυτών είναι:

Israel, G.: "Un Aspetto Ideologico della Mathematica Contemporanea: Il Bourbakismo" , *Mathematica e Fisica: Cultura e Ideologia*, De Donato Editore, Bari, 1977, σελ. 35-70 και Weintramb, E. Roy-Mirowski, Philip: "The Pure and the Applied: Bourbakism comes to Mathematical Economics" περ. *Science in Context*, vol. 7, no. 2, 1994, σελ. 245-272, Cambridge University Press.

Η ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΩΝ ΒΟΥΡΒΑΚΙ ΣΕ ΤΟΜΕΙΣ ΕΚΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 1940-1970

Έρχεται, λοιπόν η στιγμή να αναρωτηθούμε: εκτός από τα Μαθηματικά, πάνω στα οποία εργάστηκαν εκτενώς οι Bourbaki, υπήρχαν άλλοι τομείς στους οποίους επέδρασαν οι αντιλήψεις τους; Είναι γεγονός, ότι το ιδεολογικό οικοδόμημα που έχτισαν οι Β. υποστηρίχθηκε όσο λίγα της εποχής. Ένα ρεύμα, όταν ξεπερνά τα σύνορα ενός επιστημονικού πεδίου, αποδεικνύει και τη διαχρονικότητά του. Έτσι, οι Β., κατά την περίοδο της ακμής τους, από την ίδρυσή τους το 1934 ως τις αρχές της δεκαετίας του '70, έδωσαν το στίγμα τους, στην Ευρώπη. Δούλεψαν πάνω στα Μαθηματικά με το μυαλό τους να κινείται σε πεδία πέρα από τα όρια της επιστήμης τους. Εξάλλου, είναι χαρακτηριστικό το γεγονός ότι στους Β. παρεισφρήσανε και μη μαθηματικοί, όπως ο λογοτέχνης Raymond Queneau, οι οποίοι όμως εργάστηκαν με ζήλο για το εκδοτικό έργο της ομάδας.

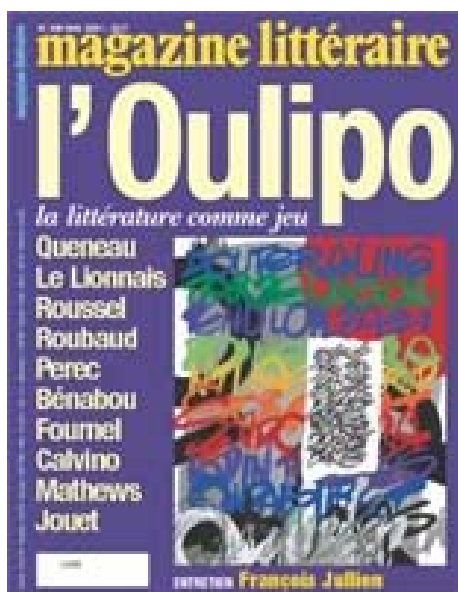
Αναφορές στη συνεισφορά των Bourbaki σε κλάδους έξω από τα μαθηματικά υπάρχουν διάσπαρτες, ιδιαίτερα στα έργα των εν γένει δομιστών. Ο Jean Piaget, όντας θαυμαστής τους αναφέρεται πολύ συχνά στο έργο του όταν μιλά για το δομισμό στα μαθηματικά. Στο βιβλίο του "Στρουκτουραλισμός" αφιερώνει ένα ιδιαίτερο κομμάτι στις "μητρικές" δομές και εξηγεί πως αυτές και η λογική με την οποία εξάγονται συμπέρασμα απ' αυτές δεν αφορούν μονάχα τα Μαθηματικά αλλά και ολόκληρο το γνωστικό οικοδόμημα του ανθρωπίνου νου⁶³. Ο ίδιος πολύ χαρακτηριστικά και άμεσα εκφράζει το θαυμασμό του σ' αυτούς με την αναφορά του στη συνάντηση που είχε με τον J. Dieudonné το 1952 σ' ένα συμπόσιο που έγινε στο Melun, κατά το οποίο μίλησαν για τις ίδιες δομές χωρίς να γνωρίζει ο ένας τη δουλειά του άλλου⁶⁴.

Σε μια άλλη πλευρά του δομισμού βρίσκεται η ανθρωπολογία και ο Claude Levi-Strauss, ο οποίος έγραψε για τις "Πρωταρχικές Δομές της συγγένειας" (Elementary Structure of Kinship). Σ' αυτό του το έργο ένα δοκίμιο ανήκει στον André Weil, από τον οποίο ζήτησε ο ίδιος ο Levi-Strauss τη συμβολή του.

Τέλος αξίζει να αναφερθούμε στο εργαστήριο το οποίο ίδρυσε ο Raymond Queneau, που προαναφέραμε, και ο François Le Lionnais μαζί με τον μαθηματικό, René de Possel. Αυτό ονομάστηκε OULIPO (Ouvroir de Literature Pottentielle= Εργαστήριο Δυναμικής Λογοτεχνίας). Η δυναμική λογοτεχνία, και πιο συγκεκριμένα η ποίηση με την οποία ασχολήθηκε περισσότερο το Oulipo, είναι το είδος της λογοτεχνίας που επιδιώκει το κάθε έργο να είναι μεταβαλλόμενο, "κινούμενο" δηλαδή να μπορεί ανά πάσα στιγμή να μεταβληθεί χωρίς να χάσει το ιδιαίτερο νόημά

⁶³ Piaget, Jean: "Στρουκτουραλισμός" σ.112 (1972).

⁶⁴ Beth, Evert-Piaget, Jean: "Mathematical Epistemology and Psychology", D. Reidel Publishing Company, 1966, Dordrecht, Holland, σελ. 168.



OULIPO

Ouvroir de Literature Pottentielle=
Εργαστήρι Δυναμικής Λογοτεχνίας

του. Τα μέλη του Oulipo "έπαιζαν" με τις δυνατότητες της γλώσσας και ο δομικός τρόπος σκέψης των Β. τους παρείχε χρήσιμα εργαλεία. Χαρακτηριστικό είναι το έργο του Queneau "Hundred Thousand Billion Poems" του 1961, στο οποίο περιέχονται δέκα σονέτα με δομή τόσο προσεκτικά σχεδιασμένη ώστε κάθε στίχος του ενός σονέτου να μπορεί να αντικατασταθεί άριστα με τον ομόλογό του από οποιοδήποτε άλλο από τα υπόλοιπα σονέτα⁶⁵.

Γι' αυτή τους την επίδραση στην πνευματική ζωή της Ευρώπης οι Β. χαρακτηρίστηκαν σαν "πολιτισμικοί σύνδεσμοι" (cultural connectors). Πολιτισμικός σύνδεσμος είναι εκείνος που προσπαθεί να ενδυναμώσει το έργο του χρησιμοποιώντας διαφορετικές σφαίρες καλλιέργειας. Ο πολιτισμικός σύνδεσμος μεταφέρει σύνολα εννοιών και εργασιών που συνυπάρχουν. Δρα σε ποικίλα επίπεδα και αντλεί τη δύναμή του από τη διαρκή σύνδεση σφαιρών πολιτισμού. Οι Β., λοιπόν, έδρασαν σαν πολιτισμικός σύνδεσμος, όχι τόσο γιατί τα μέλη τους ήταν ενεργά και έξω απ' τα μαθηματικά, όσο γιατί το όνομά τους έγινε κάτι σαν συντομογραφία για την αναφορά σε ένα συγκεκριμένο τρόπο αντιμετώπισης της επιστήμης⁶⁶. Χρησιμοποιώντας το όνομα Bouibaki ή τον όρο Μπουρμπακισμός σηματοδοτούσαν το γεγονός ότι ενστερνίζονται απόψεις που αποδίδονται σ' αυτούς. Οι σημαντικότερες "συνδέσεις" των Β. ήταν αυτές που αφορούσαν άμεσα την επίδραση του δορισμού σε κάθε μια από τις επιστήμες και τους πολιτισμικούς τομείς που ανθούσαν στην μεσοπολεμική και μεταπολεμική Ευρώπη. Οι Β. τέλος συνέβαλαν στη θεμελίωση του ρεύματος του μεταμοντερνισμού. Οι ίδιοι ήταν "ψευτομοντέρνοι" καθώς το έργο τους

⁶⁵ Aubin (1997), σελ. 321-322.

⁶⁶ Aubin (1997), σελ. 299-330.

χαρακτήριζε η αποδοχή των καινούριων μεθόδων στα πλαίσια όμως του χρήσιμου και του διαχρονικού⁶⁷.

Παρ' όλα αυτά, οι Β. δέχτηκαν πάρα πολλές επικρίσεις. Στην Ευρώπη την περίοδο '40-'70 υπήρχαν μεγάλες αποκλίσεις ανάμεσα στις απόψεις για το τι μπορεί να είναι χρήσιμο, εφαρμόσιμο και ικανό ν' ανοίξει σωστούς δρόμους στην πορεία των χωρών που επλήγησαν από τις πολεμικές συρράξεις. Διατυπώθηκε η απορία για το πως θα μπορούσε μια ομάδα Γάλλων μαθηματικών να γράψει βιβλία Μαθηματικών τα οποία θα χρησίμευαν σε οποιονδήποτε πέρα από το μέσο Γάλλο. Ή ακόμα πως θα μπορούσαν κάποιοι θετικοί επιστήμονες να κινηθούν με βάση ένα ιδεολογικό ρεύμα. Οι Β. δέχθηκαν πολλές επιθέσεις για την επιλογή των θεμάτων που επέλεξαν να συμπεριλάβουν στα έργα τους. Οι ερευνητές π.χ. της αναλυτικής γεωμετρίας και της θεωρίας αριθμών θεώρησαν ότι οι Β. υποτιμούσαν αυτούς τους μαθηματικούς κλάδους. Οι Β. τέλος, δέχτηκαν τα πυρά και των Γερμανών μαθηματικών. Παρ' ότι, οι ίδιοι παραδέχτηκαν ανοιχτά τις επιρροές που δέχθηκαν από τον Hilbert και τον van der Waerden οι μαθηματικοί της Γερμανικής σχολής αγνόησαν, σχεδόν σοβινιστικά, ό,τι γαλλικό. Γι' αυτούς υπήρχε ήδη η "Εγκυκλοπαίδεια", έργο σε μορφή εγχειριδίου, της οποίας η συγγραφή άρχισε το 1900. Δυστυχώς βέβαια, παρά το πάθος και το πείσμα των Γερμανών η "Εγκυκλοπαίδεια" μέχρι το 1930 και μετά από πολλαπλές εκδόσεις ήταν ένα ανολοκλήρωτο έργο των 25 με 30 τόμων το οποίο δεν περιείχε ούτε μια απόδειξη. Είναι προφανές, λοιπόν, ότι σκοπός των Β. δεν ήταν να την αντικαταστήσουν παρά τις διαφορετικές αντιλήψεις⁶⁸.

Έρχεται, λοιπόν, κάποιος να αναρωτηθεί για το πως είναι δυνατό να αποχωρήσουν από τα Μαθηματικά δρώμενα της Ευρώπης οι Β. Εξάλλου, ούτε διεφάνησαν στοιχεία παρακμής στην πορεία τους ούτε έχασαν το ανθρώπινο δυναμικό τους. Αρκετά, μάλιστα, ακόμα κι απ' τα ιδρυτικά μέλη των Β. είναι ακόμα εν ζωή. Οι θεωρίες των Β. δεν παρήκμασαν ούτε έχασαν τη σημαντικότητά τους. Οι "δομές" και ο δομικός τρόπος σκέψης των Β. απλά "αντικαταστάθηκαν". Έδωσαν τη θέση τους σε θεωρίες νεώτερες, με ευκολότερες εφαρμογές στις πρακτικές επιστήμες αλλά και άμεση εφαρμογή στην επιστήμη των ηλεκτρονικών υπολογιστών η οποία αναπτύχθηκε ραγδαία από τις αρχές της δεκαετίας του '70. Η θεωρία καταστροφών (catastrophe) του René Thom και η γεωμετρία των fractals του Benoît Mandelbrot άνοιξαν καινούργιους δρόμους ανάμεσα στα Μαθηματικά και τις άλλες επιστήμες⁶⁹.

Έτσι, λοιπόν μια πορεία περίπου 30 χρόνων μιας μαθηματικής ομάδας με αγάπη για την επιστήμη εξασθένησε. Η απήχηση, βέβαια, των Β. δεν περιορίστηκε στα σύνορα της Ευρώπης. Ερευνητές απ' όλον τον κόσμο ασχολήθηκαν με το έργο τους αλλά και πολλοί σύγχρονοι μαθηματικοί χρησιμοποιούν ακόμα τα έργα τους ως εγχειρίδια. Όπως πολλές ιδέες στους αιώνες, έτσι και οι Β. ξεπεράστηκαν αλλά ποτέ δεν έχασαν την αίγλη τους.

⁶⁷ Aubin(1997), σελ. 301-302.

⁶⁸ Dieudonné, Jean : "Το έργο του N. Bourbaki", περ. Μαθηματική Επιθεώρηση, τεύχος 7, Ιουλ.-Αυγ.-Σεπτ. 1977, σελ. 56-57.

⁶⁹ Aubin(1997), σελ. 330-333.

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ ΤΩΝ ΒΟΥΡΒΑΚΙ ΣΤΗΝ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

Είναι λογικό ότι, εφόσον οι Bourbaki δημιουργήθηκαν στη Γαλλία, το πρώτο και κύριο πεδίο επιρροής τους ήταν τα Γαλλικά Μαθηματικά και ειδικότερα η εκπαίδευση στη Γαλλία. Εξάλλου πρωταρχικός στόχος της δημιουργίας τους σαν ομάδα ήταν να βελτιώσουν την κατάσταση στα ανώτατα εκπαιδευτικά ιδρύματα της χώρας σε ότι αφορούσε την έλλειψη καθηγητών μαθηματικών νέας γενιάς μετά τον Α' Παγκόσμιο Πόλεμο. Γρήγορα η φήμη τους εξαπλώθηκε και σε άλλες χώρες της Κεντρικής Ευρώπης και ήταν απλά θέμα χρόνου μέχρι το όνομά τους να ακουστεί και στην Ελλάδα όπου οι νεώτερες εξελίξεις καθυστερούν εν γένει.

Παρ' όλα αυτά, το έργο των Bourbaki κατάφερε να αγγίξει την ελληνική πραγματικότητα και να την καθορίσει, έστω κι έμμεσα.

Αναζητώντας, μέσα στα χρόνια, την εποχή κατά την οποία το έργο των B. άρχισε να γίνεται γνωστό στην Ελλάδα βρίσκουμε κάποια ίχνη και κάποιες αναφορές που φτάνουν πίσω στο 1960 χωρίς αυτό να σημαίνει ότι αυτές είναι οι πρώτες ή και μοναδικές που υπάρχουν. Ο Νικ. Δ. Σωτηράκης με αφορμή τη συμμετοχή του στο συνέδριο του Ο.Ε.Ο.Σ., που έγινε στο Παρίσι το 1959, αναφέρεται με θέρμη στη συμβολή του Jean Dieudonné και των Bourbaki στη διεκπεραίωση του συνεδρίου αυτού αλλά και στο έργο τους λέγοντας χαρακτηριστικά ότι "...οι Bourbaki έφεραν τις νεώτερες μαθηματικές έρευνες στην πληρέστερη τελείωσή τους." Αυτή η αναφορά γίνεται στη διάλεξή του στην Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία το Μάιο του 1960⁷⁰. Στα 1960 επίσης στο Δελτίο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας δημοσιεύεται μια περίληψη της διατριβής του Αναστάσιου Μάλλιου με τίτλο "Ισότονοι Ημιγραμμικά Απεικονίσεις ως συνδέσμους" όπου αναφέρεται η ανάπτυξη ενός αποτελέσματος που δημοσίευσε ο N. Bourbaki⁷¹. Στο 1^ο Επιστημονικό - Παιδαγωγικό συνέδριο που έγινε στα Γιάννενα το 1960 ο N. Μιχαλόπουλος αναφέρει τον Jean Dieudonné και την άποψη του (η οποία αφορούσε γενικότερα τους B.) για τα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά και ειδικότερα την Ευκλείδεια Γεωμετρία ("Κάτω ο Ευκλείδης")⁷². Γύρω στα έξι χρόνια αργότερα βρίσκουμε μια ακόμα αναφορά στους B. στο άρθρο του Γ. Γεωργανόπουλου "Μελέτη φίλτρων επί χώρων απλής συγκλίσεως" από το Δελτίο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας⁷³. Κατά το 4^ο Πανελλήνιο Μαθηματικό Συνέδριο στην

⁷⁰ Από το περιοδικό "Παιδεία και Ζωή", τόμος 9, σελ. 161-166 & 206-212, 1960

⁷¹ Μάλλιος, Αναστάσιος: "Ισότονοι Ημιγραμμικά Απεικονίσεις εις συνδέσμους", Δελτίον της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, νέα σειρά-τόμος 1, τεύχη 1-2, 1960, τεύχος 2, σελ. 1-4.

⁷² Χρονικά Επιστημονικού-Παιδαγωγικού Συνεδρίου εν Ιωαννίνους, εκδ. Ελλ. Μαθημ. Εταιρείας, 1960, σελ. 96.

⁷³ Δελτίον της Ελλ. Μαθημ.Εταιρείας, Νέα σειρά-τόμος 7, τεύχη 1-2, 1966, τεύχος 1, σελ. 224.

Πάτρα το 1971 ο Λ. Τσίτσας χρησιμοποιεί σαν πηγή για την εισήγησή του την "Άλγεβρα" των Β. ενώ ο Δ. Στρατηγόπουλος δίνει ιδιαίτερη βάση στις "δομές" στην εργασία του "Hyperanneaux Fonctions Multivoques"⁷⁴. Στις "δομές" υπήρχε αναφορά και στο συνέδριο των Ιωαννίνων (1960) από τον Ανδρέα Κατσαρό⁷⁵. Στα 1980, βέβαια, έγινε η πιο σημαντική ως τότε εργασία που αφορούσε αποκλειστικά, πλέον, τους Β. Αυτή ήταν της Μυρτώς Λευκοπούλου "Η Αρχιτεκτονική των Μαθηματικών και η επίδρασή της στη διδασκαλία τους" που πρωτοδημοσιεύτηκε στο περιοδικό "Εκπαίδευση και Επιστήμη"⁷⁶. Από κει κι έπειτα υπάρχει πλήθος αναφορών στους Β. ενώ στο 1^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας ο Δ.Γ. Κοντογιάννης μιλά πλέον για τη σχολή των Β. και ο Μπάμπης Τουμάσης κάνει άμεσα τη σύνδεση των Β. με τον δομισμό⁷⁷. Παρ' όλα αυτά το όνομα των Β. δεν ακούστηκε τόσο πολύ στην Ελλάδα ώστε να γίνει ευρύτερα γνωστό και αναγνωρίσιμο από την πλειοψηφία των μαθηματικών αφού η επίδραση τους στα Ελληνικά Μαθηματικά του δεύτερου μισού του 20ου αιώνα ήταν περισσότερο έμμεση. Αυτή αφορούσε την εκπαιδευτική μεταρρύθμιση που έγινε το '59 στη Γαλλία και το '62 στην Ελλάδα.

Η εκπαιδευτική μεταρρύθμιση στη Γαλλία ήταν ένας ύμνος στο φορμαλισμό και την αξιωματική μέθοδο. Η αξιωματική μέθοδος είναι μια πηγή ελευθερίας, αλλά και ευθύνης. Αυτή η ελευθερία πρέπει να χρησιμοποιείται για να βρεθούν τα σωστά αξιώματα που θα χτίσουν σταθερές και αξιόπιστες θεωρίες και εδώ έρχεται να σταθεί η σαφής και αυστηρή θέση των Β. απέναντι στα "φθηνά" αξιώματα και την ομφαλοσκόπηση των επιστημόνων της εποχής. Είναι γεγονός πως το έργο των Β. έφερε μια ανάσα καθαρού αέρα, επίπονη στην εισπνοή αλλά βαθιά απελευθερωτική απέναντι στην στείρωση που είχε επέλθει στα Γαλλικά Μαθηματικά της εποχής τους⁷⁸. Και αργότερα, κατά την Εκπαιδευτική Μεταρρύθμιση, το πνεύμα των Β. και η συμβολή τους αφορούσε στην αντιπαράθεση της ομαδικής εργασίας απέναντι στον ατομικισμό, της ανωνυμίας απέναντι στην προσωπική φιλοδοξία, τον επαγγελματισμό απέναντι στον ερασιτεχνισμό και το άνοιγμα στον κόσμο απέναντι στη λιμνάζουσα εμμονή στον επαρχιωτισμό⁷⁹. Παρ' όλα αυτά, υπάρχει μια

⁷⁴ Χρονικά 4^{ου} Πανελληνίου Μαθηματικού Συνεδρίου εν Πάτραις εκδ. Ελλ.Μαθ. Εταιρίας, 1971, σελ. 192-195.

⁷⁵ Χρονικά...εν Ιωαννίνους, 1960, σελ. 328.

⁷⁶ Λευκοπούλου, Μυρτώ: "Η Αρχιτεκτονική των Μαθηματικών" και η επίδρασή της στη διδασκαλία τους", περ."Εκπαίδευση και Επιστήμη" Λ, 1980, σελ. 40-48.

⁷⁷ Πρακτικά 1^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, 1984, σελ. 259-260 και σελ. 139-165.

⁷⁸ Revuz André: "La prise de conscience bourbakiste, 1930-1960" Les sciences au lycée: Un siècle de reformes des mathematiques et de la physique en France et a l' étranger, ed. Librairie Vuibert, 1996, Paris, σελ. 74.

⁷⁹ Revuz (1996), σελ. 70.

περίεργη αντίθεση ανάμεσα στη θέρμη των ιδεών και στην ψυχρότητα του στυλ των Β. κάτι που φάνηκε καθαρά στο πρόγραμμα της Μεταρρύθμισης. Η αλήθεια ότι οι Β. έχουν μια ελιτιστική διάθεση τύπου "Σας αρέσει; Καλώς. Δεν σας αρέσει; Δεν θα χάσω το χρόνο μου μαζί σας". Έτσι η Μεταρρύθμιση χαρακτηρίστηκε από πολλούς ως εκπαιδευτική αλλά μη παιδαγωγική. Αυτό που χαρακτήρισε τη Μεταρρύθμιση ήταν ουσιαστικά μια ελάχιστη συμφωνία πάνω σε μια ανακατασκευασμένη ενότητα των Μαθηματικών. Αυτή η ενότητα δεν είναι άλλη από αυτή των "μπουρμπακιστικών Μαθηματικών" (mathematiques bourbachiques)⁸⁰.

Αυτή η εκπαιδευτική μεταρρύθμιση ήταν το πρότυπο και η άμεση πηγή επιρροής της ελληνικής εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης. Μιας μεταρρύθμισης, βέβαια, η οποία κατά πολλούς αποφασίστηκε, ψηφίστηκε αλλά δεν εφαρμόστηκε⁸¹. Παρ' όλα αυτά πρέπει να αναφέρουμε και το συνέδριο του ΟΟΣΑ το 1963 που πραγματοποιήθηκε στην Αθήνα και ήταν βαθύτατα επηρεασμένο από τις απόψεις των Β. Αναμενόμενο βέβαια, αυτό αφού οι απόψεις τους υποδεικνύουν στο δάσκαλο το δρόμο μέσα από τον οποίο θα μπορούσε να δείξει στους μαθητές του το ενιαίο της επιστήμης του, αλλά και να πετύχει έναν από τους απώτερους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών: "... να αναπτυχθεί όσο το δυνατό περισσότερο στο μαθητή η μαθηματική ενατένιση του κόσμου που μας περιβάλλει..."⁸². Αυτό το συνέδριο ήταν εκείνο που συνέστησε στους Έλληνες μαθηματικούς τα λεγόμενα "μοντέρνα μαθηματικά". Κατά τη Μεταρρύθμιση το πρόγραμμα σπουδών άλλαξε με γνώμονα τα "μοντέρνα μαθηματικά" δηλαδή τις απόψεις της Εκπαιδευτικής Μεταρρύθμισης. Για παράδειγμα, τώρα για πρώτη φορά, εμφανίζεται η έννοια των συνόλων στα αναλυτικά προγράμματα του Δημοτικού Σχολείου. Η διδασκαλία τους όμως αφήνεται στη διακριτική ευχέρεια των δασκάλων. Ακόμα η Αριθμητική και η Γεωμετρία δεν οργανώνονται πια ως ανεξάρτητοι κλάδοι αλλά σαν ένα μάθημα. Στις Α', Β' και Γ' τάξεις του Γυμνασίου συνιστάται στους διδάσκοντες η χρήση πολλών συμβόλων στο μάθημα ώστε να συντομευτεί τόσο η προφορική όσο και η γραπτή χρήση της γλώσσας. Έτσι η έκφραση γίνεται καθαρότερη και η ακρίβεια μεγαλύτερη. Τέλος, η μαθηματική λογική διδάσκεται συστηματικά από την Δ' τάξη του Εξαταξίου Γυμνασίου⁸³.

Είναι γεγονός ότι το ενδιαφέρον της μεταρρύθμισης των μοντέρνων μαθηματικών απορροφήθηκε σχεδόν εξ ολοκλήρου σε θέματα ειδικά της επιστήμης των Μαθηματικών και όχι τόσο μαθητικο-διδακτικά θέματα ή θέματα που έχουν σχέση με την Παιδαγωγική ή την Ψυχολογία. Τα γενικά χαρακτηριστικά της ήταν η προσήλωση στην επιστήμη των Μαθηματικών, η έμφαση στην αξιωματική θεμελίωση και η υπερβολική χρήση της

⁸⁰ Revuz (1996), σελ.74-75.

⁸¹ Όπως για τον Αλέξη Δημαρά, συγγραφέα του βιβλίου "Η μεταρρύθμιση που δεν έγινε".

⁸² Λευκοπούλου (1980) σελ.44.

⁸³ Βαΐνα, Κ.: "Ανάλυση της Διδακτικής των Μαθηματικών στην Ελλάδα", εκδόσεις Γρηγόρη, 1997 σελ. 68-80.

παραγωγικής μεθόδου, ο τονισμός της δομής στη συγκέντρωση και οργάνωση της ύλης και η ιδιαίτερη προσοχή στην ακρίβεια των εκφράσεων και το φορμαλισμό του περιεχομένου⁸⁴.

Στην ερώτηση, τώρα, ποια ήταν η μετέπειτα επίδραση των μοντέρνων Μαθηματικών στα ελληνικά Μαθηματικά η απάντηση είναι μονόπλευρη. Η μεταρρύθμιση που έγινε ήταν περισσότερο αλλαγή στην ύλη παρά αλλαγή στη διδασκαλία και τον τρόπο σκέψης. Έτσι έγινε μεμονωμένα στις αρχές της δεκαετίας του '60, πρακτικά διατηρήθηκε αλλά ουσιαστικά απείχε από αυτό που οι Γάλλοι μεταρρυθμιστές ήθελαν να κάνουν συνείδηση στους σύγχρονους τους μαθηματικούς, την ιδεολογία των ενοποιημένων Μαθηματικών των Β. Εκείνη την εποχή δεν έγινε κατανοητός από τους Έλληνες ο σκοπός της Μαθηματικής μεταρρύθμισης γιατί τους απασχολούσε περισσότερο το να γίνει μια οποιαδήποτε αλλαγή παρά η φύση της. Πρέπει, τέλος, να σημειώσουμε ότι παρά τις πολλές προσπάθειες των Ελλήνων επιστημόνων για τη Μεταρρύθμιση η δικτατορία του '67 όχι μόνο εμπόδισε την εξάπλωση των νέων μαθηματικών αλλά στην ουσία πισωγύρισε το μάθημα των Μαθηματικών σε προηγούμενες μορφές⁸⁵.

Το ρεύμα των Μοντέρνων Μαθηματικών στην Κεντρική Ευρώπη ήταν τόσο ισχυρό που δεν θα ήταν δυνατό να μην επιδράσει και στα ελληνικά Μαθηματικά. Το επαναλαμβανόμενο σκηνικό των έντονων κοινωνικο-πολιτικών αναταραχών στην Ελλάδα, εμπόδισε την εξέλιξη και σ' αυτόν τον τομέα για αρκετά χρόνια, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι απ' τη δεκαετία του '80 κι έπειτα το έργο των Β. και τα μοντέρνα Μαθηματικά δεν αναγνωρίστηκαν. Μόνο που αυτή την εποχή έκαναν ορμητικά την εμφάνισή τους στο πεδίο των Μαθηματικών, τα εφαρμοσμένα Μαθηματικά και οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές.

⁸⁴ Βαϊνά, (1997), σελ. 81.

⁸⁵ Βαϊνά, (1997),σελ.60.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνικά

1. **Βαΐνάς**, Κωνσταντίνος: "Ανάλυση της διδακτικής των μαθηματικών στην Ελλάδα", εκδ. Γρηγόρη, **1997**
2. **Βώκος**, Γεράσιμος: "Η θεμελίωση της γλωσσολογίας ως επιστήμης στο έργο του Ferdinand de Saussure", περ. Φιλολόγος, τεύχος 42, σελ.325-337
3. Δελτίον της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Νέα Σειρά-τόμος 1, τεύχη 1-2, **1960**
4. Δελτίον της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Νέα Σειρά-τόμος 7, τεύχη 1-2, **1966**
5. **Δημητρίου**, Σωτήρης: "Λεξικό Όρων -τόμος V-Κυβερνητικής, Δομισμού και της θεωρίας των συστημάτων", εκδ. Καστανιώτη, **1987**
6. **Δημητρίου**, Σωτήρης: "Λεξικό Όρων -τόμος Va- Φιλοσοφικό", εκδ. Καστανιώτη, **1987**
7. Εκπαιδευτική Ελληνική Εγκυκλοπαίδεια- Παγκόσμιο Βιογραφικό Λεξικό, τόμος 8, Εκδοτική Αθηνών, **1988**
8. **Καστάνης**, Ν.: "Μια εισαγωγή στη Διδακτική των Μαθηματικών, τεύχος Α", **1996**
9. **Καστάνης**, Ν.: "Η υποδοχή των θεμελίων της γεωμετρίας του Hilbert στην Ελλάδα", περ. Διάσταση, 1-2, σελ.68-89, **1999**
10. **Λάκκης**, Κωνσταντίνος: "Άλγεβρα", Θεσσαλονίκη, **1993**
11. **Λευκοπούλου**, Μυρτώ: "Η «Αρχιτεκτονική των Μαθηματικών» και η επίδρασή της στη διδασκαλία τους", περ. Εκπαίδευση και Επιστήμη, Λ, σελ.40-48, **1980**
12. Πρακτικά 1^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, **1984**
13. **Τουμάσης**, Μπάμπης: "Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών", εκδ. Guttenberg, **1994**
14. Χρονικά Επιστημονικού Παιδαγωγικού Συνεδρίου εν Ιωαννίνους, **1960**
15. Χρονικά 4^{ου} Πανελληνίου Μαθηματικού Συνεδρίου εν Πάτραις, **1971**

Ξένα

1. **Armatte**, Michel: "Mathematiques Modernes et sciences humaines", Les sciences au lycée, σελ.77-88, Librairie Vuibert, Paris
2. **Aubin**, David: "The withering immortality of Nicolas Bourbaki: A cultural connector at the confluence of Mathematics, structuralism and the OULIPO in France", περ. Science in Context, 10, 2, σελ.297-342, **1997**
3. **Beaulieu**, Liliane: "A Parisian café and ten proto Bourbaki meetings", περ. The Mathematical Intelligencer, vol.15, no1, Springer Verlag, NY, **1993**
4. **Beaulieu**, Liliane: "The intersection of history and Mathematics", Birkhäuser Verlag, **1994**

5. **Bernays**, Paul: "Hilbert, David (λήμμα)", The Encyclopedia of Philosophy, vol.3, The Macmillan Company & the free press, NY, **1967**
6. **Beth**, Evert-**Piaget**, Jean: "Mathematical Epistemology and Psychology", D.Reidel Publishing Company, Holland, **1966**
7. **Borel**, Armand: "Twenty five years with Nicolas Bourbaki, 1949-1973", περ. Notices of the American Mathematical Society, vol.45, no.3, March, σελ.373-379
8. **Bourbaki**, Nicolas: "Η αρχιτεκτονική των Μαθηματικών", μετ. Μυρτώ Λευκοπούλου, περ. Διάσταση, τεύχος 1, σελ.21-37, **1994**
9. **Breger**, Herbert: "Tacit knowledge in Mathematical theory", The space of Mathematics, σελ.79-90, **1992**
10. **Bruner**, Jerome: "Η διαδικασία της παιδείας", εκδ. Καραβία, **1960**
11. **Cartan**, Henri: "André Weil: Memories of a long friendship", περ. Notices of the American Mathematical Society, vol.46, no.6, June-July **1999**
12. **Cassirer**, Ernst: "Substance and Function and Einstein's theory of relativity", Dover Publications, **1953**
13. **Chihara**, Charles: "Constructibility and mathematical existence", Claredon Press, Oxford, **1990**
14. **Chomsky**, Noam: "Προπαγάνδα και MME", εκδ. Πρίσμα, **1992**
15. Companion Encyclopedia of the History of Philosophy, vol.1, I.Grattan-Guinness, UK, **1994**
16. **Corry**, Leo: "Nicolas Bourbaki and the concept of mathematical structure", περ. Synthése92, σελ.315-348, **1992**
17. **Corry**, Leo: "The origins of eternal truth in modern Mathematics: Hilbert to Bourbaki and beyond", περ. Science in Context 10, 2, σελ.253-296, **1997**
18. **Craib**, I.: "Σύγχρονη κοινωνική θεωρία: Από τον Πάρσονς στον Χάμερμπας", εκδ. Ελληνικά Γράμματα, **1998**
19. Dictionary of Scientific Biography (Dedekind- Firmicus Maternus), American Council of learnt Societies, Princeton Un., **1981**
20. **Dieudonné**, Jean: "Οι νεώτερες εξελίξεις στα Μαθηματικά", Μαθηματική Επιθεώρηση, τεύχος 6, Απρ-Μαί-Ιουν, σελ.7-27, **1977**
21. **Dieudonné**, Jean: "Το έργο του N. Μπουρμπακί", περ. Μαθηματική Επιθεώρηση, τεύχος 7, Ιουλ-Αυγ-Σεπτ, σελ.50-69, **1977**
22. **Goldman**, Lucien: "Διαλεκτικές Έρευνες", εκδ. Γνώση, **1986**
23. **Ηγκλετον**, Τέρι: "Εισαγωγή στη θεωρία της Λογοτεχνίας", εκδ. Οδυσσέας, **1989**
24. **Henk**, J.M. Bos: "Elements of Mathematics: They are no longer what they used to be", History of Mathematics, vol.7, σελ.105-157, American Mathematical Society, **1991**
25. **Ιλίτσεφ**, Λ.Φ.- **Φεντοσέγιεφ**, Π.Ν. : "Φιλοσοφικό Εγκυκλοπαιδικό Λεξικό", τόμος 5, εκδ. Καπόπουλος, **1986**
26. **Kneebone**, G.T.: "Philosophy and the Foundations of Mathematics: An introductory Survey", D.Van Nostrand Company, **1963**
27. **Nový**, Lubōs: "Origins of modern Algebra", Noordhoff International Publishing, The Netherlands, **1973**
28. **Piaget**, Jean: "Ο στρουκτουραλισμός", εκδ. Καστανιώτη, **1972**
29. **Resnik**, Michael: "Mathematics from the structural point of view", περ. Revue International de Philosophie 4, no167, σελ.400-424, **1988**
30. **Revuz**, André: "La prise de conscience Bourbakiste", Les Sciences au lycée, Librairie Vuibert, Paris, σελ.69-76, **1996**

31. **Rickart**, Charles: "Structuralism and Mathematical Thinking", The nature of Mathematical thinking, Lawrence Erlbaum Associates Publishing, σελ.285-300, **1996**
32. **Riegel**, Klaus F.: "Structure and Transformation in modern intellectual History", Structure and Transformation: Developmental and Historical Aspects, Michigan Un. Publ., **1975**
33. **Thom**, René: "Μαθηματικά πρότυπα της Μορφογένεσης", εκδ. Γ.Α. Πνευματικού, **1985**
34. **Tymoczko**, Thomas: "Structuralism and Post-Modernism in the Philosophy of Mathematics", Mathematics Education and Philosophy: An international perspective", Palmer Press, σελ.49-55, **1994**
35. **Wussing**, H.: "The genesis of the abstract group concept", The MIT Press, London, **1984**

