ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ
ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΧΑΤΖΗΔΗΜΗΤΡΙΟΥ
Σπουδαστήριο Μηχανικής,Τμήμα Φυσικής
Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Περίληψη: Πολλά δυναμικά συστήματα, όπως π.χ. αυτά που εμφανίζονται στη μελέτη προβλημάτων στο Ηλιακό σύστημα, μπορούν να περιγραφούν σε Χαμιλτονιανή μορφή. Ένα Χαμιλτονιανό δυναμικό σύστημα έχει σημαντικές ιδιότητες οι οποίες καθορίζουν την εξέλιξή του στο χρόνο. Μία πολύ καλή μέθοδος για τη μελέτη της εξέλιξης ενός Χαμιλτονιανού συστήματος n βαθμών ελευθερίας στο χώρο των φάσεων, $2n$ διαστάσεων, είναι η μέθοδος της απεικόνισης Poincaré σε μία επιφάνεια τομής. Με αυτό τον τρόπο, η εξέλιξη του συστήματος περιγράφεται σε ένα χώρο φάσεων $2n-2$ διαστάσεων και αυτό κάνει τη μελέτη απλούστερη. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε συστήματα με δύο βαθμούς ελευθερίας, όπου ο χώρος των φάσεων είναι τεσσάρων διαστάσεων, ενώ η απεικόνιση Poincaré είναι σε χώρο δύο διαστάσεων. Μία βασική ιδιότητα της Χαμιλτονιανής ροής στο χώρο των φάσεων και της απεικόνισης Poincaré είναι ότι είναι συμπλεκτικές.

Θα παρουσιάσουμε εν συντομία μερικές από τις βασικές ιδιότητες των Χαμιλτονιανών συστημάτων, δίδοντας έμφαση στις συμπλεκτικές ιδιότητες της Χαμιλτονιανής ροής. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε απλές συμπλεκτικές απεικονίσεις, καθώς και μεθόδους για την κατασκευή ενός συμπλεκτικού μοντέλου απεικόνισης.

1 Στοιχεία από τη θεωρία Hamilton

Ένα Χαμιλτονιανό σύστημα ορίζεται από το σύστημα των $2n$ διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \partial H/\partial p, \\ \dot{p} &= -\partial H/\partial q, \end{aligned} \tag{1}$$

όπου $q=(q_1,q_2,...q_n)$, $p=(p_1,p_2,...p_n)$ οι συζυγείς μεταβλητές και $H(q_1,q_2,...q_n,p_1,p_2,...p_n,t)$ η συνάρτηση του Hamilton.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(a) *Αυτόνομο σύστημα:* Η συνάρτηση του Hamilton δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο,

$$H(q,p).$$

Η τροχιά είναι μια συνεχής καμπύλη στο χώρο των φάσεων qp, $2n$ διαστάσεων, από το αρχικό σημείο $(q_0,\, p_0)$ τη στιγμή $t=t_0$ στο σημείο $(q,\, p)$ τη στιγμή $t=T$.

(β) <u>Μη αυτόνομο σύστημα:</u> Η συνάρτηση του Hamilton εξαρτάται ρητά από το χρόνο,

$$H(q, p, t).$$

Η τροχιά είναι μια συνεχής καμπύλη στον ¨εκτεταμένο¨ χώρο των φάσεων $q\,p\,t$, $2n+1$ διαστάσεων, από το σημείο $(q_0,\, p_0,\, t_0)$ τη στιγμή $t = t_0$ στο σημείο $(q,\, p,\, T)$ τη στιγμή $t = T$.

Και στις δύο περιπτώσεις, η ροή από το σημείο $(q_0,\, p_0)$ την αρχική στιγμή t_0 στο τελικό σημείο $(q,\, p)$ τη στιγμή T, είναι κανονικός ματασχηματισμός. Είναι γνωστό ότι οι τροχιές στο χώρο των φάσεων δεν τέμνονται. Μια βασική ιδιότητα της Χαμιλτονιανής ροής είναι ότι η απεικόνιση στο χώρο των φάσεων από το αρχικό σημείο t_0 στο τελικό σημείο $t = T$ είναι *συμπλεκτική*. Αυτό έχει ως συνέπεια το ότι *ο όγκος στο χώρο των φάσεων διατηρείται.*

2 Συμπλεκτικές απεικονίσεις

Μια απεικόνιση T στο χώρο των φάσεων M^{2n} είναι *συμπλεκτική* αν η Ιακωβιανή $L = D\,T$ έχει την ιδιότητα

$$L^T J L = J. \tag{2}$$

Το σύμβολο ^{T} παριστάνει ανάστροφο και J είναι ο $2n \times 2n$ πίνακας

$$J = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix}, \tag{3}$$

όπου O_n είναι ο $n \times n$ μηδενικός πίνακας και I_n είναι ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας.

Η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα L είναι ίση προς τη μονάδα, $\det(L) = 1$, που σημαίνει ότι *ο όγκος διατηρείται.*

Παρατηρήστε ότι αν $\det(A) = 1$ και A είναι ένας 2×2 πίνακας, τότε ο A είναι συμπλεκτικός. Αυτό δεν ισχύει εν γένει για τυχόντα $n \times n$ πίνακα A με $n > 2$.

Ένας συμπλεκτικός μετασχηματισμός είναι κανονικός μετασχηματισμός. Ένας κανονικός μετασχηματισμός $q,\, p \to Q,\, P$ δημιουργείται από μια γενέτειρα συνάρτηση.

Θεωρήσατε τη γενέτειρα συνάρτηση της μορφής $F(q,\, P)$. Ο μετασχηματισμός

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i}, \quad (i = 1, 2, ...n) \tag{4}$$

είναι κανονικός μετασχηματισμός. Ο μετασχηματισμός αυτός είναι σε πεπλεγμένη μορφή. Πρέπει επομένως οι εξισώσεις να λυθούν και να δόσουν τη λύση υπό τη μορφή $q,\, p \to Q,\, P$.

3 Αυτόνομα - μη αυτόνομα Χαμιλτονιανά συστήματα

3.1 Μετασχηματισμός μη αυτόνομου σε αυτόνομο σύστημα

Ένα μη αυτόνομο σύστημα n βαθμών ελευθερίας μετασχηματίζεται σε ένα σύστημα $n+1$ βαθμών ελευθερίας, όπου ο χρόνος και η ενέργεια εμφανίζονται ως ένα νέο ζεύγος συζυγών μεταβλητών. Θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο με ένα παράδειγμα.

Ας θεωρήσουμε τη Χαμιλτονιανή

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2, t). \tag{5}$$

Ο χώρος των φάσεων του αυτόνομου συστήματος είναι εξαδιάστατος και οι συζυγείς μεταβλητές είναι οι

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 = q_1, \quad \bar{q}_2 = q_2, \quad \bar{q}_3 = t, \\ \bar{p}_1 = p_1, \quad \bar{p}_2 = p_2, \quad \bar{p}_3 = -H. \end{aligned} \tag{6}$$

Αποδεικνύεται ότι η νέα αυτόνομη Χαμιλτονιανή είναι η

$$\bar{H}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3) = H(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}_3) + \bar{p}_3 \tag{7}$$

και οι νέες, αυτόνομες, εξισώσεις του Hamilton είναι οι

$$\begin{aligned} \bar{q}_1{}' = \partial H/\partial \bar{p}_1, \quad \bar{p}_1{}' = -\partial H/\partial \bar{q}_1, \\ \bar{q}_2{}' = \partial H/\partial \bar{p}_2, \quad \bar{p}_2{}' = -\partial H/\partial \bar{q}_2, \\ \bar{q}_3{}' = \partial H/\partial \bar{p}_3, \quad \bar{p}_3{}' = -\partial H/\partial \bar{q}_3, \end{aligned} \tag{8}$$

όπου ο τόνος συμβολίζει παραγώγιση ως προς το νέο "χρόνο" ζ.

3.2 Μετασχηματισμός αυτόνομου σε μη αυτόνομο σύστημα

Ενα αυτόνομο σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας μπορεί να μετασχηματισθεί σε ένα μη αυτόνομο σύστημα με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας.

Έστω ότι η συνάρτηση του Hamilton είναι η

$$H(q_1, q_2, ...q_n, p_1, p_2, ...p_n). \tag{9}$$

Οι τροχιές στο χώρο των φάσεων M^{2n}, κείνται στην πολλαπλότητα της ενέργειας

$$H(q_1, q_2, ...q_n, p_1, p_2, ...p_n) = h. \tag{10}$$

Λύνουμε την εξίσωση της ενέργειας ως προς p_1 και βρίσκουμε

$$p_1 = K(q_1, q_2, ...q_n, p_2, ...p_n, h). \tag{11}$$

Ορίζουμε τώρα νέο ¨χρόνο¨ T με τη σχέση

$$q_1 = -T, \tag{12}$$

και ως νέες συζυγείς μεταβλητές Q, P ορίζουμε τις

$$\begin{aligned} (Q_2, Q_3, ...Q_n) &= (q_2, q_3, ...q_n), \\ (P_2, P_3, ...P_n) &= (p_2, p_3, ...p_n). \end{aligned} \tag{13}$$

Αποδεικνύεται ότι οι τροχιές στην πολλαπλότητα της ενέργειας $H(q,p) = h$ ικανοποιούν τις κανονικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{dP_i}{dT} &= \tfrac{\partial K}{\partial Q_i}, \\ \frac{dQ_i}{dT} &= -\tfrac{\partial K}{\partial P_i}, \qquad (i = 2, 3, ...n) \end{aligned} \tag{14}$$

με συνάρτηση Hamilton

$$K(-T, q_2, ...q_n, p_2, ...p_n; h). \tag{15}$$

Οι εξισώσεις του νέου χώρου των φάσεων είναι $2n - 2$.

4 Μετατροπή μιας συνεχούς ροής σε διάκριτη απεικόνιση - Απεικόνιση Poincaré

4.1 Αυτόνομο σύστημα

Θεωρούμε τη Χαμιλτονιανή

$$H(q_1, ...q_n, p_1, ...p_n). \tag{16}$$

Η τροχιά στον $2n$ διαστάσεων χώρο των φάσεων κείται στην πολλαπλότητα της ενέργειας

$$H(q_1, ...q_n, p_1, ...p_n) = h. \tag{17}$$

Ορίζουμε την *επιφάνεια τομής*

$$H(q,p) = h, \quad q_1 = 0. \tag{18}$$

Η επιφάνεια τομής είναι μια επιφάνεια $2n - 2$ διαστάσεων στον $2n$ διαστάσεων χώρο φάσεων p q.

Εάν η επιφάνεια τομής επιλεγεί κατάλληλα, η (συνεχής) τροχιά στο χώρο των φάσεων τέμνει την επιφάνεια τομής στα σημεία $A_1, A_2, ...A_n, ...$ Τα σημεία αυτά ορίζονται από τις συντεταγμένες $q_2, q_3, ...q_n, p_2, p_3, ...p_n$. Με αυτό τον τρόπο ορίζεται μια απεικόνιση σε ένα χώρο $2n-2$ διαστάσεων, η οποία ονομάζεται *απεικόνιση Poincaré* . Είναι φανερό ότι *ένα σημείο της απεικόνισης ορίζει ακριβώς την κατάσταση του συστήματος*, διότι είναι $q_1 = 0$ και το p_1 υπολογίζεται από την εξίσωση

$$H(q_1 = 0, q_2, ...q_n, p_1, ...p_n) = h. \tag{19}$$

Στην εξίσωση αυτή θα πρέπει να καθορίσουμε το πρόσημο του p_1.

Παράδειγμα 1:
Θεωρούμε ένα αυτόνομο σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας με συνάρτηση Hamilton

$$H = \frac{1}{2}\left({p_1}^2 + {p_2}^2\right) + V(x_1, x_2) \tag{20}$$

και ορίζουμε την επιφάνεια τομής με τις σχέσεις

$$H(q,p) = h, \quad x_2 = 0, \quad \text{με} \quad p_2 > 0. \tag{21}$$

Ο χώρος φάσεων του συστήματος (20) είναι ο 4-διάστατος χώρος $x_1\, x_2\, p_1\, p_2$ και η απεικόνιση Poincaré είναι στον δισδιάστατο χώρο $x_1\, p_1$.

Παράδειγμα 2:
Θεωρούμε ένα αυτόνομο σύστημα με τρεις βαθμούς ελευθερίας, το οποίο ορίζεται από τη συνάρτηση του Hamilton

$$H = \frac{1}{2}\left({p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2\right) + V(x_1, x_2, x_3). \tag{22}$$

Ως επιφάνεια τομής ορίζουμε την επιφάνεια

$$H(q,p) = h, \quad x_3 = 0, \quad \text{με} \quad p_3 > 0. \tag{23}$$

Ο χώρος των φάσεων του συστήματος (22) είναι ο 6-διάστατος χώρος $x_1 x_2 x_3 p_1 p_2 p_3$ και η απεικόνιση Poincaré γίνεται στον 4-διάστατο χώρο $x_1\, x_2\, p_1\, p_2$.

4.2 Μη αυτόνομο σύστημα

Θεωρούμε ένα μη αυτόνομο σύστημα n βαθμών ελευθερίας, το οποίο ορίζεται από τη συνάρτηση του Hamilton

$$H(q_1, ...q_n, p_1, ...p_n, t), \tag{24}$$

η οποία είναι $T-$περιοδική ως προς το χρόνο,

$$H(q, p, t + T) = H(q, p, t). \tag{25}$$

Η τροχιά του συστήματος είναι μια συνεχής καμπύλη στον εκτεταμένο χώρο των φάσεων $q\, p\, t$. Επί της καμπύλης αυτής παίρνουμε τα σημεία που αντιστοιχούν σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου T, δηλαδή στα σημεία όπου $t_\nu = \nu T,\ \ \nu = 1, 2, 3, ...\ 2n$. Έτσι ορίζεται μια απεικόνιση $2n$ διαστάσεων στο χώρο $q_1, ...q_n, p_1, ...p_n$, η οποία είναι η απεικόνιση Poincaré.

Ένας άλλος τρόπος να δούμε την απεικόνιση Poincaré είναι να θεωρήσουμε τον "εκτεταμένο" χώρο φάσεων $q_1, ...q_n, p_1, ...p_n, t$, και να πάρουμε τις τομές της τροχιάς του συστήματος στο χώρο αυτό με τα επίπεδα $t = \nu T,\ \nu = 1, 2, 3, ...$ Εάν προβάλλουμε όλα αυτά τα σημεία στο χώρο των $2n$ διαστάσεων $q\, p$, θα πάρουμε μια απεικόνιση η οποία είναι η απεικόνιση Poincaré .

Η απεικόνιση Poincaré για μη αυτόνομο Χαμιλτονιανό σύστημα, όπως ορίσθηκε παραπάνω, ονομάζεται και *στροβοσκοπική απεικόνιση.*

Παρατηρήσατε την ομοιότητα μεταξύ της απεικόνισης Poincaré σε αυτόνομο σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας και σε ένα μη αυτόνομο σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας: *και στα δύο η απεικόνιση γίνεται σε χώρο 4 διαστάσεων.* Θα αναλύσουμε περισσότερο αυτό με τα παρακάτω:

Το μη αυτόνομο Χαμιλτονιανό σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2, t) \tag{26}$$

μετασχηματίζεται στο αυτόνομο σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας

$$\bar{H} = H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{x}_3) + \bar{p}_3, \tag{27}$$

σύμφωνα με όσα αναφέραμε προηγουμένως. Η στροβοσκοπική απεικόνιση του πρώτου στο χώρο $x_1\ x_2\ p_1\ p_2$ είναι ισοδύναμη με την απεικόνιση Poincaré του δεύτερου, στην επιφάνεια τομής

$$\bar{H} = \text{σταθερό}, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \mod 2\pi, \tag{28}$$

διότι $\bar{x}_3$ είναι ο χρόνος. Η απεικόνιση αυτή είναι στον 4-διάστατο χώρο $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{p}_1, \bar{p}_2$, ο οποίος συμπίπτει με το χώρο x_1, x_2, p_1, p_2.

5 Ιδιότητες της απεικόνισης Poincaré

Μια περιοδική τροχιά ενός Χαμιλτονιανού συστήματος αντιστοιχεί σε ένα (ή περισσότερα) αμετάβλητα σημεία

Αυτό προκύπτει αμέσως από τον ορισμό της απεικόνισης Poincaré . Εφ΄ όσον η τροχιά είναι περιοδική, αυτή θα επανέρχεται στο ίδιο σημείο στην επιφάνεια τομής.

Η απεικόνιση είναι συμπλεκτική

Η απόδειξη θα γίνει με ένα παράδειγμα:

Θεωρούμε τη συνάρτηση του Hamilton

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) \tag{29}$$

και ορίζουμε την επιφάνεια τομής με τις σχέσεις

$$H(x, p) = h, \ \ x_2 = 0. \tag{30}$$

Η απεικόνιση γίνεται στον δισδιάστατο χώρο $x_1\, p_1$ και εκφράζεται υπό τη μορφή

$$\begin{aligned} x_1 = &\ \ x_1(x_{10},\, p_{10}), \\ p_1 = &\ \ p_1(x_{10},\, p_{10}). \end{aligned} \tag{31}$$

Θεωρούμε τώρα όλες τις τροχιές με την ίδια ενέργεια h. Οι τροχιές αυτές βρίσκονται στην πολλαπλότητα $H(x_1, x_2, p_1, p_2) = h$. Η ροή επάνω στην πολλαπλότητα είναι Χαμιλτονιανή, και η συνάρτηση του Hamilton είναι της μορφής $K(\bar{x}_1, \bar{p}_1, T; h)$, όπως προκύπτει από την παράγραφο 3.2. Η συνάρτηση αυτή ευρίσκεται ως εξής: Από την εξίσωση $H(x_1, x_2, p_1, p_2) = h$ λύνουμε ως προς p_2 και ορίζουμε τις μεταβλητές $\bar{x}_1 = x_1$, $\bar{p}_1 = p_1$, $T = -x_2$, όπου T είναι ο νέος ¨χρόνος¨. Η νέα συνάρτηση του Hamilton είναι η $K = p_2(\bar{x}_1, \bar{p}_1, -T; h)$.

Η ροή η οποία ορίζεται από τη Χαμιλτονιανή K είναι συμπλεκτική για κάθε τιμή του ¨χρόνου¨ $T = -x_2$. Αρα: *η απεικόνιση από το αρχικό σημείο $T = 0$ στο επόμενο σημείο $T = 0$, δηλαδή $x_2 = 0$, είναι επίσης συμπλεκτική.*

Ας θεωρήσουμε τώρα, γενικώτερα, τη συνάρτηση του Hamilton

$$H(q_1, ...q_n, p_1, ...p_n) \tag{32}$$

και ορίσουμε την επιφάνεια τομής με τις σχέσεις

$$H(q, p) = h, \ \ \ q_n = 0. \tag{33}$$

Η απεικόνιση είναι στον $(2n-2)$-διαστάσεων χώρο
$q_1, q_2, ...q_{n-1}, p_1, p_2, ...p_{n-1}$ και έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(q_1, q_2, ...q_{n-1}, p_1, p_2, ...p_{n-1}), \\ p_i &= p_i(q_1, q_2, ...q_{n-1}, p_1, p_2, ...p_{n-1}), \quad i = 1, 2, ...n-1. \end{aligned} \tag{34}$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης (34) ικανοποιεί τη συμπλεκτική ιδιότητα $L^T J L = J$. (Ο πίνακας L είναι ο πίνακας της γραμμικοποιημένης απεικόνισης). Η ευστάθεια ενός αμετάβλητου σημείου της απεικόνισης (δηλαδή μιας περιοδικής τροχιάς του Χαμιλτονιανού συστήματος), καθορίζεται από τις ιδιοτιμές του πίνακα L. Λόγω της συμπλεκτικής ιδιότητας του πίνακα L, οι ιδιοτιμές του έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

- Αν λ μια ιδιοτιμή, $1/\lambda$ είναι επίσης ιδιοτιμή.

- Οι ιδιοτιμές είναι συζυγείς μιγαδικές (διότι ο L είναι πραγματικός).

- Συνέπεια των παραπάνω είναι ότι σε ένα Χαμιλτονιανό σύστημα δεν έχουμε ποτέ ασυμπτωτική ευστάθεια (διότι δεν είναι δυνατόν να είναι όλες οι ιδιοτιμές απολύτως μικρότερες της μονάδας).

6 Αναλλοίωτες καμπύλες

6.1 Ολοκληρώσιμο σύστημα

Θα παρουσιάσουμε τη βασική ιδέα για την ύπαρξη αναλλοίωτης καμπύλης με ένα παράδειγμα. Θεωρούμε τη Χαμιλτονιανή

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2), \tag{35}$$

για την οποία υποθέτουμε ότι είναι ολοκληρώσιμη και την απεικόνιση Poincaré η οποία ορίζεται από την επιφάνεια τομής

$$H(x, p) = h, \;\; x_2 = 0. \tag{36}$$

Τα διαδοχικά σημεία της απεικόνισης είναι τα σημεία $(x_{1n},\, p_{1n})$, στο επίπεδο $x_1\, p_1$. Επειδή η (35) είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει και ένα άλλο, ανεξάρτητο ολοκλήρωμα της κίνησης, έστω το $G(x_1, x_2, p_1, p_2) = c$. Συνεπώς, τα διαδοχικά σημεία της απεικόνισης, $(x_1,\, x_2 = 0,\, p_1,\, p_2(x_1, p_1; h))$ επαληθεύουν το ολοκλήρωμα

$$G(x_1,\, x_2 = 0,\, p_1,\, p_2(x_1, p_1; h)) = c. \tag{37}$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει μια καμπύλη στο επίπεδο $x_1\, p_1$, με παράμετρο τη σταθερά c (για την ίδια τιμή της ενέργειας h), επί της οποίας κείνται όλα τα σημεία της απεικόνισης. Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη αυτή απεικονίζεται στον εαυτό της με την απεικόνιση Poincaré και ονομάζεται *αναλλοίωτη καμπύλη*. Συνεπώς, αποδείξαμε ότι *σε ένα ολοκληρώσιμο Χαμιλτονιανό σύστημα όλα τα διαδοχικά σημεία της απεικόνισης Poincaré κείνται σε ομαλές καμπύλες (τις αναλλοίωτες καμπύλες)*. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η κίνηση είναι *τακτική* ή *οργανωμένη*.

Είναι φανερό ότι ο συλλογισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί και σε συστήματα με $n > 2$ βαθμούς ελευθερίας. Στην περίπτωση αυτή, αντί για αναλλοίωτες καμπύλες έχουμε αναλλοίωτες επιφάνειες.

6.2 Μη ολοκληρώσιμο σύστημα

Εάν ένα Χαμιλτονιανό σύστημα n βαθμών ελευθερίας δεν είναι ολοκληρώσιμο, έχει λιγότερα του n ολοκληρώματα (σε ενέλλιξη). Αυτό σημαίνει ότι τα διαδοχικά σημεία της απεικόνισης δεν περιορίζονται πλέον σε μια ομαλή καμπύλη, ή επιφάνεια, και είναι δυνατόν να είναι διασκορπισμένα σε μια ολόκληρη περιοχή του χώρου των φάσεων. Αυτό είναι συνέπεια της ύπαρξης *χαοτικής κίνησης* στο σύστημα. Στα περισσότερα μη ολοκληρώσιμα συστήματα όμως, υπάρχουν και περιοχές όπου η κίνηση, για καθε πρακτική εφαρμογή, εμφανίζεται ως οργανωμένη, δηλαδή υπάρχουν αναλλοίωτες καμπύλες ή επιφάνειες (εντός των ορίων της ακρίβειας των υπολογισμών). Δηλαδή στα συστήματα αυτά συνήθως συνυπάρχουν η τάξη και το χάος.

7 Σχεδόν ολοκληρώσιμα δυναμικά συστήματα

Θεωρούμε ένα σύστημα του οποίου η Χαμιλτονιανή έχει τη μορφή

$$H = H_0(q_1, q_2, p_1, p_2) + \epsilon H_1(q_1, q_2, p_1, p_2), \tag{38}$$

όπου ϵ παράμετρος, η οποία θεωρείται μικρή, και H_0 είναι η Χαμιλτονιανή ενός ολοκληρώσιμου συστήματος. Επειδή η H_0 είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει κανονικός μετασχηματισμός από τις κανονικές μεταβλητές q_1, q_2, p_1, p_2 σε μεταβλητές δράσεως-γωνίας $J_1, J_2, \theta_1, \theta_2$, ώστε η Χαμιλτονιανή στις νέες μεταβλητές να έχει τη μορφή

$$H = H_0(J_1, J_2) + \epsilon H_1(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2). \tag{39}$$

Θα εξετάσουμε πρώτα την αδιατάρακτη κίνηση και στη συνέχεια τη διαταραγμένη κίνηση.

7.1 Αδιατάρακτη κίνηση

Η ροή η οποία ορίζεται από τη Χαμιλτονιανή $H_0(J_1, J_2)$ δίδεται από τις εξισώσεις

$$J_1 = J_{10}, \ \ J_2 = J_{20}, \ \ \dot{\theta}_1 = n_1, \ \ \dot{\theta}_2 = n_2, \tag{40}$$

όπου

$$n_1 = \partial H_0/\partial J_1, \ \ n_2 = \partial H_0/\partial J_2, \tag{41}$$

οι δύο βασικές συχνότητες του συστήματος. Από τις εξισώσεις (40) και (41) προκύπτει ότι η κίνηση γίνεται σε ένα 2-torus, με σταθερές ακτίνες J_1, J_2 και σταθερές συχνότητες n_1, n_2.

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση Poincaré , ορίζοντας την επιφάνεια τομής με τις σχέσεις

$$H_0(J_1, J_2) = h, \ \ \theta_2 = 0 \mod 2\pi, (\text{ή} \ \ J_2 = J_{20} \ \ \theta_2 = 0). \tag{42}$$

Η απεικόνιση δίδεται τότε από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} J_1 \rightarrow & \quad J_1, \\ \theta_1 \rightarrow & \quad \theta_1 + 2\pi \tfrac{n_1}{n_2}, \end{aligned} \tag{43}$$

με παράμετρο την ενέργεια h (ή τη δράση J_2).

Σε κάθε επανάληψη της απεικόνισης, η μεταβολή της γωνίας θ_1 από το ένα σημείο τομής στο επόμενο δίδεται από τη σχέση

$$\Delta\theta_1 = 2\pi \frac{n_1}{n_2}. \tag{44}$$

Η γωνία $\Delta\theta_1$ ονομάζεται *γωνία στροφής* και εξαρτάται από τη δράση J_1 (και την ενέργεια h ή τη δράση J_2, οι οποίες θεωρούνται ως παράμετροι στην απεικόνιση (43)). Η απεικόνιση (43) ονομάζεται *στροφική απεικόνιση* (twist map).

Αντί των μεταβλητών δράσεως-γωνίας J_1, θ_1, ορίζουμε τις μεταβλητές Poincaré

$$X = \sqrt{2J_1}\cos\theta_1, \quad Y = \sqrt{2J_1}\sin\theta_1, \tag{45}$$

οι οποίες είναι ένα είδος πολικών συντεταγμένων. Στις μεταβλητές αυτές τα διαδοχικά σημεία της απεικόνισης (43) κείνται σε ομόκεντρους κύκλους ακτίνας $\rho = \sqrt{2J_1}$. Οι καμπύλες αυτές ονομάζονται *αναλλοίωτες καμπύλες*. Σε μια συγκεκριμένη αναλλοίωτη καμπύλη, με ακτίνα ρ, η γωνία στροφής $\Delta\theta_1$ και ο λόγος n_1/n_2 είναι σταθερά, αλλά μεταβάλλονται καθώς η ακτίνα ρ μεταβάλλεται.

Συντονισμοί

Όπως αναφέραμε, ο λόγος n_1/n_2 μεταβάλλεται συνεχώς όταν η ακτίνα ρ μεταβάλλεται και συνεπώς, για ορισμένες αναλλοίωτες καμπύλες, ο λόγος αυτός παίρνει ρητή τιμή,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{s}{r}, \quad \text{ή} \quad \Delta\theta_1 = 2\pi\frac{s}{r}. \tag{46}$$

Η αντίστοιχη αναλλοίωτη καμπύλη (κύκλος) ονομάζεται καμπύλη συντονισμού και τα σημεία της είναι (πολλαπλά εν γένει) αμετάβλητα σημεία. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι καμπύλες συντονισμού στις οποίες οι ακέραιοι s και r είναι μικροί αριθμοί.

Η αδιατάρακτη απεικόνιση δημιουργείται από τη γενέτειρα συνάρτηση

$$F = J_{1,n+1}\theta_{1,n} + G_0(J_{1,n+1}), \tag{47}$$

όπου

$$\partial G_0/\partial J_1 = 2\pi n_1/n_2, \tag{48}$$

μέσω των εξισώσεων

$$J_{1,n} = \frac{\partial F}{\partial\theta_{1,n}}, \quad \theta_{1,n+1} = \frac{\partial F}{\partial J_{1,n+1}}. \tag{49}$$

Είναι φανερό ότι η απεικόνιση αυτή είναι συμπλεκτική, διότι δημιουργείται από γενέτειρα συνάρτηση.

7.2 Μη ολοκληρώσιμο σύστημα

Έστω τώρα ότι η παράμετρος ϵ είναι διάφορος του μηδενός,

$$\epsilon \neq 0.$$

Στην περίπτωση αυτή η απεικόνιση Poincaré είναι μια διαταραγμένη απεικόνιση της απεικόνισης (43) και ονομάζεται *διαταραγμένη στροφική απεικόνιση* (perturbed twist map),

$$\begin{aligned} J_1 &= J_1 + \epsilon(...) \\ \theta_1 &= \theta_1 + 2\pi\frac{n_1}{n_2} + \epsilon(...). \end{aligned} \tag{50}$$

Η απεικόνιση αυτή δημιουργείται από τη γενέτειρα συνάρτηση

$$F = J_{1,n+1}\theta_{1,n} + G_0(J_{1,n+1}) + \epsilon G_1(J_{1,n+1}, \theta_{1,n}), \tag{51}$$

η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως διαταραγμένη γενέτειρα συνάρτηση της αδιατάρακτης γενέτειρας συνάρτησης (47).

Για την κατασκευή ενός μοντέλου που να αντιπροσωπεύει την πραγματική διαταραγμένη απεικόνιση, αυτό το οποίο ζητούμε είναι η εύρεση της G_1 η οποία ορίζει τη διαταραχή.

8 Παραδείγματα συμπλεκτικών απεικονίσεων

8.1 Ο συμπλεκτικός ολοκληρωτής

Θεωρούμε τη Χαμιλτονιανή ενός συστήματος δύο βαθμών ελευθερίας

$$H = H(q, p), \tag{52}$$

και τις αντίστοιχες κανονικές εξισώσεις

$$\dot{q} = \partial H/\partial p, \;\; \dot{p} = -\partial H/\partial q. \tag{53}$$

Η λύση, σε πρώτη προσέγγιση, από το σημείο (q_0, p_0) στο σημείο (q, p), στο χρονικό διάστημα τ, ($\tau \ll 1$)), δίδεται από τις σχέσεις

$$q_1 = q_0 + \frac{\partial H(q_0, p_0)}{\partial p}\tau, \;\; p_1 = p_0 - \frac{\partial H(q_0, p_0)}{\partial q}\tau, \tag{54}$$

και το σφάλμα είναι $\mathrm{O}(\tau^2)$. Η απεικόνιση αυτή δεν είναι συμπλεκτική, διότι

$$det\left|\frac{\partial(q_1, p_1)}{\partial(q_0, p_0)}\right| \neq 1. \tag{55}$$

Τροποποιούμε τώρα την προσεγγιστική λύση (54) αντικαθιστόντας το p_0 με p_1:

$$q_1 = q_0 + \frac{\partial H(q_0, p_1)}{\partial p}\tau, \;\; p_1 = p_0 - \frac{\partial H(q_0, p_1)}{\partial q}\tau. \tag{56}$$

Το σφάλμα στη νέα λύση (56) είναι επίσης της τάξεως τ^2, δηλαδή της ίδιας τάξεως όπως και η λύση (54). Αυτό το οποίο κερδίζουμε με αυτή την αντικατάσταση είναι ότι η νέα απεικόνιση είναι συμπλεκτική. Αυτό το διαπιστώνουμε από το ότι η (56) δημιουργείται από τη γενέτειρα συνάρτηση

$$F = q_0 p_1 + \tau H(q_0, p_1), \tag{57}$$

όπως μπορεί εύκολα να επαληθευθεί. Παρατηρήσατε ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα της απεικόνισης (56) είναι ίση προς τη μονάδα.

Η λύση (56) είναι η απλούστερη περίπτωση μιας κατηγορίας αριθμητικής ολοκλήρωσης Χαμιλτονιανών συστημάτων, που ονομάζονται *συμπλεκτικοί ολοκληρωτές*. Το πλεονέκτημά τους έναντι των άλλων μεθόδων ολοκληρώσεως είναι ότι διατηρούν ακριβώς μια βασική ιδιότητα της Χαμιλτονιανης ροής, τη συμπλεκτική ιδιότητα.

8.2 Η τυπική απεικόνιση

Θεωρούμε τη Χαμιλτονιανή του εκκρεμούς (*pendulum Hamiltonian*)

$$H = \frac{1}{2}I^2 + K\cos\theta, \tag{58}$$

και τις αντίστοιχες κανονικές εξισώσεις

$$\dot{\theta} = I, \quad \dot{I} = K\sin\theta. \tag{59}$$

Η ολοκλήρωση κατά ένα βήμα $\Delta t = \tau$ δίνει την απεικόνιση (σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο)

$$I_{n+1} = I_n + K\sin\theta_n\tau, \;\; \theta_{n+1} = \theta_n + I_n\tau, \tag{60}$$

η οποία δεν είναι συμπλεκτική. Την κάνουμε συμπλεκτική χρησιμοποιόντας το τέχνασμα της προηγούμενης παραγράφου και παίρνουμε τη συμπλεκτική απεικόνιση

$$I_{n+1} = I_n + K\sin\theta_n\tau, \;\; \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}\tau. \tag{61}$$

Για $\tau = 1$ έχουμε τη γνωστή *στροφική απεικόνιση* (standard map)

$$I_{n+1} = I_n + K\sin\theta_n, \;\; \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}. \tag{62}$$

9 Κατασκευή μοντέλων απεικόνισης

Σε πολλά προβλήματα που αντιπροσωπεύονται από μια σχεδόν ολοκληρώσιμη Χαμιλτονιανή, της μορφής (38), είναι χρήσιμο να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο απεικόνισης για να μελετήσουμε την εξέλιξη του συστήματος. Η απεικόνιση αυτή πρέπει να προσεγγίζει την απεικόνιση Poincaré και για να συμβαίνει αυτό πρέπει να πληρούνται οι ακόλουθες
<u>αναγκαίες συνθήκες</u>
- Η απεικόνιση πρέπει να είναι συμπλεκτική.
- Πρέπει να έχει τα ίδια αμετάβλητα σημεία όπως και η απεικόνιση Poincaré .
- Η ευστάθεια των αμετάβλητων σημείων πρέπει να είναι η σωστή.
- Πρέπει να έχει τις ίδιες περιοχές οργανωμένης και χαοτικής κίνησης.

Πολλά φυσικά συστήματα εμφανίζονται ως σχεδόν ολοκληρώσιμα, όπως π.χ. η κίνηση των πλανητών στο Ηλιακό σύστημα.

9.1 Η μέθοδος των συναρτήσεων δέλτα

Η μέθοδος αυτή προτάθηκε από τον Chirikov(1986) και εφαρμόσθηκε από τον Wisdom(1983, 1985) για τη μελέτη των αστεροειδών, όπου για πρώτη φορά διαπιστώθηκε ότι είναι δυνατόν να εμφανισθούν χαοτικές κινήσεις στο Ηλιακό σύστημα.

Θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο με ένα απλό παράδειγμα. Θεωρούμε τη Χαμιλτονιανή ενός συστήματος με δύο βαθούς ελευθερίας, της μορφής

$$H = H_0(I) + \frac{K_0}{2\pi}\cos\theta + \sum_{n\neq 0} K_n(I)\cos(\theta - nt), \tag{63}$$

όπου ο τρίτος όρος στο δεξιό μέλος παριστάνει τούς όρους υψηλής συχνότητας.

Απαλοίφοντας τους όρους υψηλής συχνότητας με τη μέθοδο του averaging, παίρνουμε τη Χαμιλτονιανή

$$H = H_0(I) + \frac{K_0}{2\pi}\cos\theta. \tag{64}$$

Χάνεται έτσι ένας βαθμός ελευθερίας (ο χρόνος).

Επανεισάγουμε τώρα τους όρους υψηλής συχνότητας μέσω των 2π-περιοδικών ώσεων, θέτοντας στη θέση του $\cos\theta$

$$\cos\theta \to \cos\theta \times 2\pi\delta_{2\pi}(t), \tag{65}$$

όπου $\delta_{2\pi}(t)$ είναι η 2π-περιοδική συνάρτηση δ. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

Απόδειξη
Στην αρχική Χαμιλτονιανή αντικαθιστούμε τους όρους $K_n(I)$ με τους όρους $K_0/2\pi$ και έτσι παίρνουμε τη νέα Χαμιλτονιανή

$$\begin{aligned} H &= H_0(I) + \frac{K_0}{2\pi}\cos\theta + \sum_{n\neq 0}\frac{K_0}{2\pi}\cos(\theta - nt) \\ &= H_0 + \frac{K_0}{2\pi}\cos\theta\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos nt\right] \\ &= H_0(I) + K_0\cos\theta \times \delta_{2\pi}(t), \end{aligned} \tag{66}$$

όπου

$$\delta_{2\pi}(t) = \frac{1}{2\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos nt\right],$$

$$= \sum_n \delta(t - 2\pi n).$$

Η βασική ιδέα είναι να μελετήσουμε το σύστημα χρησιμοποιώντας τη Χαμιλτονιανή (66) αντί της αρχικής Χαμιλτονιανής (63). Αυτό είναι εύκολο διότι το σύστημα (66) ολοκληρώνεται αμέσως επειδή υπάρχει η συνάρτηση δ.

Εύρεση της απεικόνισης

Η νέα Χαμιλτονιανή είναι η

$$H = H_0(I) + \frac{K_0}{2\pi}\cos\theta \times 2\pi\delta_{2\pi}(t). \tag{67}$$

Για $t = 0^-$ είναι $J = J_0$, $\theta = \theta_0$. Ζητούμε τα J_1, θ_1 μετά μια περίοδο 2π, τη χρονική στιγμή $t = 2\pi^-$. Σε αυτό το χρονικό διάστημα υπάρχει μία ώση στο διάστημα $(0^-,\ 0^+)$.

Οι κανονικές εξισώσεις είναι οι

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \partial H_0/\partial I, \\ \dot{I} &= K_0 \sin\theta \times \delta_{2\pi}(t). \end{aligned} \tag{68}$$

Για να λύσουμε το σύστημα αυτό παρατηρούμε ότι η Χαμιλτονιανή στο διάστημα $(O^+, 2\pi^-)$ είναι η $H_0(I)$, άρα στο διάστημα αυτό είναι

$$I = I_1. \tag{69}$$

Η μεταβολή της γωνίας θ στο διάστημα $(O^-, 2\pi^-)$ ευρίσκεται από τη σχέση

$$\Delta\theta = \int_{0^-}^{2\pi^-} \partial H_0/\partial I dt = \partial H_0(I_1)/\partial I \times 2\pi. \tag{70}$$

Η μεταβολή της δράσης στο διάστημα $(O^-, 2\pi^-)$ ευρίσκεται από τη σχέση

$$\Delta I = \int_{0^-}^{2\pi^-} K_0 \sin\theta \times \delta_{2\pi}(t) dt = K_0 \sin\theta_0. \tag{71}$$

Για την απόδειξη της σχέσεως αυτής ελάβαμε υπόψη ότι η ώση περιέχεται στο διάστημα $(0^-, 0^+)$, το οποίο περιέχεται στο διάστημα ολοκλήρωσης, και επίσης τη σχέση

$$\int_{0^-}^{0^+} F(t) \times \delta(t) dt = 1/2[F(0^-) + F(0^+)].$$

Τελικά, η απεικόνιση για μια περίοδο 2π, από 0^- στο $2\pi^-$ είναι η

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 + K_0 \sin\theta_0, \\ \theta_1 &= \theta_0 + 2\pi\omega_0(I), \end{aligned} \tag{72}$$

όπου

$$\omega_0(I) = \partial H_0/\partial I.$$

Η απεικόνιση αυτή είναι συμπλεκτική και προέρχεται από τη γενέτειρα συνάρτηση

$$F = I_1\theta_0 + 2\pi\left[H_0(I_1) + \frac{K_0}{2\pi}\cos\theta_0\right], \tag{73}$$

μέσω των εξισώσεων (49), όπως μπορεί εύκολα να επαληθευθεί.

Για $H_0 = I^2/4\pi$, έχουμε την τυπική απεικόνιση (standard map).

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η μέθοδος του Chirikov δεν οδηγεί πάντοτε σε συμπλεκτική απεικόνιση.

<u>Παράδειγμα</u>

Ας υποθέσουμε ότι η K_0 στη Χαμιλτονιανή (67) δεν είναι σταθερά αλλά είναι συνάρτηση του I,

$$H = H_0 + \frac{K_0(I)}{2\pi}\cos\theta + \sum_{n\neq 0} K_n(I)\cos(\theta - nt). \tag{74}$$

Αν εργασθούμε όπως και προηγουμένως έχουμε τα εξής: Η averaged Hamiltonian είναι η

$$H = H_0(I) + \frac{K_0(I)}{2\pi}\cos(\theta) \tag{75}$$

και η νέα Χαμιλτονιανή είναι η

$$H = H_0(I) + K_0(I)\cos\theta \times \delta_{2\pi}(t). \tag{76}$$

Η απεικόνιση για μια περίοδο 2π, από $t = 0^-$ σε $t = 2\pi^-$ είναι η

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 + \frac{1}{2}\left[K_0(I_0) + K_0(I_1)\right]\sin\theta_0, \\ \theta_1 &= \theta_0 + 2\pi\omega_0(I_1) + \frac{1}{2}\left[K_0'(I_0) + K_0'(I_1)\right]\cos\theta_0, \end{aligned} \tag{77}$$

όπου ο τόνος παριστάνει παραγώγιση ως προς I.

Η απεικόνιση αυτή δεν είναι συμπλεκτική. Θα ήταν συμπλεκτική άν στο δεξιό μέλος οι K_0 και K_0' ήσαν συναρτήσεις του I_1 αντί του I_0.

Αναφορές

[1] Arnold, V.I.:(1978) *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag.

[2] Chirikov,B.V. and Vecheslavov,V.V.:(1986) *Chaotic dynamics of comet Haley*, preprint 86-184, Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk.

[3] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M.:(1976), *Mechanics*, Pergamon, Pergamon Press.

[4] Lichtenberg, A.J. and Liebermann, M.A.: 1983, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag.

[5] Whittaker, E.T.: (1937) *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge University Press.

[6] Wisdom, J.(1983): *Chaotic Behaviour and the Origin of the 3/1 Kirkwood Gap*, Icarus **56**, 51-74.

[7] Wisdom, J. (1985): *A Perturbative Treatment of Motion Near the 3/1 Commensurability*, Icarus **63**, 272-289.