ΔΟΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΙΣ

Ιωάννης Δ. Χατζηδημητρίου
Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

1 Βασικοί ορισμοί

Θεωρούμε το δυναμικό σύστημα το οποίο περιγράφεται από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in C^1(E), \quad E \subset R^n. \tag{1}$$

Θα εξετάσουμε πώς μεταβάλλεται η τοπολογία του χώρου των φάσεων όταν μεταβάλλεται το διανυσματικό πεδίο f. Αν παραμένει το ίδιο, τότε το σύστημα λέγεται *δομικά ευσταθές* (structurally stable). Αν όμως δεν είναι δομικά ευσταθές, τότε έχουμε, εν γένει, *διακλαδώσεις* (bifurcations), όπως θα δούμε στα επόμενα.

Ορισμός: Έστω E ένα ανοικτό σύνολο στο R^n. Το διανυσματικό πεδίο $f \in C^1(E)$ είναι *δομικά ευσταθές* αν υπάρχει $\epsilon > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $g \in C^1(E)$ με

$$\| f - g \| < \epsilon \tag{2}$$

τα διανυσματικά πεδία f και g να είναι τοπολογικά ισοδύναμα στο E. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό, $H : E \to E$, ο οποίος απεικονίζει τροχιές του

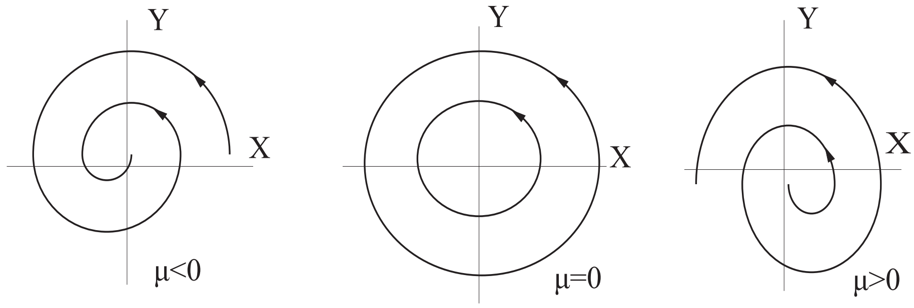
$$\dot{x} = f(x)$$

σε τροχιές του

$$\dot{x} = g(x).$$

Αν ισχύουν τα παραπάνω, το σύστημα $\dot{x} = f(x)$ είναι δομικά ευσταθές. Αν το σύστημα δεν είναι δομικά ευσταθές, τότε λέμε ότι είναι *δομικά ασταθές*,

Θα παρουσιάσουμε δύο παραδείγματα, για να γίνουν κατανοητές οι έννοιες αυτές.



Σχήμα 1: Το πορτρέτο φάσεως του συστήματος g καθώς η παράμετρος μ μεταβάλλεται.

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε τα δυναμικά συστήματα που ορίζονται από τα διανυσματικά πεδία

$$f(x) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} -y + \mu x \\ x + \mu y \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Για $\mu \ll 1$ υπάρχει ένα ε το οποίο εξαρτάται από το μ, ώστε να πληρούται η σχέση 2. Το διανυσματικό πεδίο $f(x)$ συμπίπτει με το διανυσματικό πεδίο $g(x)$ για $\mu = 0$. Τα πορτρέτα φάσεως για $\mu < 0$, $\mu = 0$ και $\mu > 0$ παρουσιάζονται στο Σχήμα 1, όπως είναι εύκολο να βρεθεί. Παρατηρούμε ότι καθώς το μ μεταβάλλεται, αλλάζει η τοπολογία του χώρου των φάσεων. Συνεπώς, το δυναμικό σύστημα το οποίο ορίζεται από το διανυσματικό πεδίο $f(x)$, όπως δίδεται στη σχέση 3, δεν είναι δομικά ευσταθές, είναι δηλαδή δομικά ασταθές. Η τιμή $\mu = 0$ του διανυσματικού πεδίου $g(x)$ είναι η *τιμή διακλαδώσεως*.

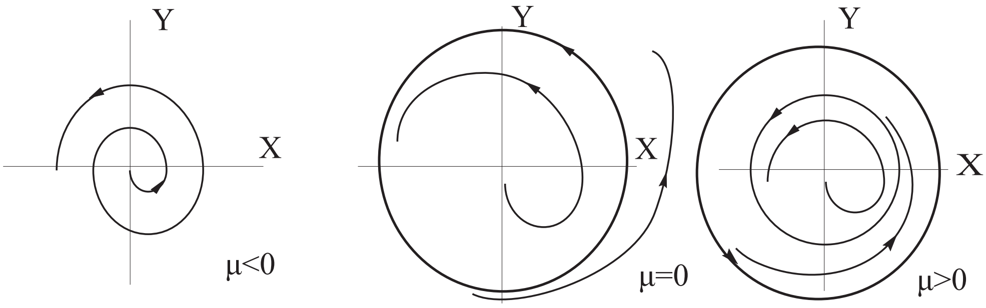
Παράδειγμα 2

Θεωρούμε τώρα το δυναμικό σύστημα που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(x^2 + y^2 - 1)^2, \\ \dot{y} &= x + y(x^2 + y^2 - 1)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Θα αποδείξουμε ότι το σύστημα αυτό είναι δομικά ασταθές. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε το γειτονικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x[(x^2 + y^2 - 1)^2 - \mu], \\ \dot{y} &= x + y[(x^2 + y^2 - 1)^2 - \mu], \end{aligned} \tag{5}$$



Σχήμα 2: Το πορτρέτο φάσεως του συστήματος (6) καθώς η παράμετρος μ μεταβάλλεται.

όπου το μ θεωρείται μικρό. Σε πολικές συντεταγμένες το σύστημα αυτό παίρνει το μορφή

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r[(r^2-1)^2-\mu], \\ \dot{\vartheta} &= 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Το πορτρέτο φάσεως του συστήματος αυτού, καθώς το μ μεταβάλλεται, φαίνεται στο Σχήμα 2. Για $\mu = 0$ έχουμε το σύστημα (4). Όταν είναι $\mu < 0$, όλες οι τροχιές στο χώρο των φάσεων είναι σπείρες οι οποίες ξεκινούν από την αρχή 0, η οποία είναι ένα ασταθές σημείο ισορροπίας. Όταν γίνει $\mu = 0$, εμφανίζεται ένας οριακός κύκλος με ακτίνα $r = 1$, ο οποίος είναι ασταθής (όλες οι εξωτερικές τροχιές αποκλίνουν). Καθώς το μ αυξάνει και παίρνει θετικές τιμές, ο οριακός κύκλος $r = 1$ διασπάται, στην περιοχή $0 < \mu < 1$, σε δύο οριακούς κύκλους, με ακτίνες $1-\sqrt{\mu}$ και $1+\sqrt{\mu}$, αντίστοιχα. Ο πρώτος οριακός κύκλος είναι ευσταθής και ο δεύτερος ασταθής. Όταν το μ τείνει προς τη τιμή $\mu = 1$, ο εσωτερικός οριακός κύκλος τείνει προς την αρχή 0 και ο εξωτερικός προς τον $r = \sqrt{2}$, ο οποίος είναι ασταθής. Για $\mu > 1$, υπάρχει μόνον ένας οριακός κύκλος, με ακτίνα $1+\sqrt{\mu}$, ο οποίος είναι ασταθής (αποδείξτε το!). Από όλα τα παραπάνω είναι φανερό ότι το δυναμικό σύστημα (4) είναι δομικά ασταθές.

Η δομική ευστάθεια εξαρτάται από την τάξη των συστημάτων που μελετούμε. Ένα σύστημα μπορεί να είναι δομικά ασταθές ως προς τυχούσες μεταβολές, αλλά δομικά ευσταθές ως προς μια ειδική κατηγορία διαταραχών. Π.χ. ένα Χαμιλτωνιανό σύστημα μπορεί να είναι δομικά ασταθές για τυχούσα μεταβολή του διανυσματικού πεδίου, αλλά να παραμένει ευσταθές ως προς Χαμιλτωνιανές διαταραχές (δηλαδή το διαταραγμένο σύστημα να είναι επίσης Χαμιλτωνιανό).

Στα επόμενα θα μελετήσουμε τη δομική ευστάθεια δυναμικών συστημάτων στην περιοχή ενός σημείου ισορροπίας, ή μιας περιοδικής τροχιάς. Θα δόσουμε προηγουμένως μερικούς βασικούς ορισμούς για τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθειά τους.

2 Σημεία ισορροπίας, ευστάθεια και διακλαδώσεις

Θεωρούμε το δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = f(x), : \quad x \in R^n, \tag{7}$$

και έστω ότι το σημείο $x_0 = 0$ είναι σημείο ισορροπίας, δηλαδή $f(x_0) = 0$. Το γραμμικοποιημένο σύστημα στην περιοχή του σημείου ισορροπίας $x = x_0$ είναι το

$$\dot{\xi} = A\,\xi, \quad A = D\,f(x_0) \tag{8}$$

όπου $\xi = x - x_0$ η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας και A σταθερός $n \times n$ πίνακας. Το σημείο ισορροπίας $x = x_0$ είναι *γραμμικά ευσταθές* αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A έχουν πραγματικό μέρος μη θετικό. Ειδικότερα, άν όλες οι ιδιοτιμές έχουν πραγματικό μέρος αρνητικό, το σημείο ισορροπίας είναι *ασυμπτωτικά ευσταθές*. Σε κάθε άλλη περίπτωση, το σημείο ισορροπίας είναι *ασταθές*. Ένα σημείο ισορροπίας λέγεται *υπερβολικό* αν δεν υπάρχει ιδιοτιμή του πίνακα A που να έχει πραγματικό μέρος μηδέν.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το δυναμικό σύστημα (7) εξαρτάται από μια παράμετρο μ,

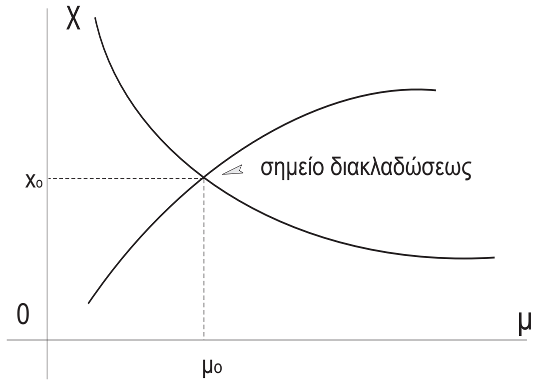
$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in R^n, \quad \mu \in R, \tag{9}$$

και έστω σημείο ισορροπίας x_0 για κάποια τιμή μ_0 της παραμέτρου μ, δηλαδή $f(x_0, \mu_0) = 0$. Θα εξετάσουμε πώς μεταβάλλεται το σημείο ισορροπίας x_0 καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος μ. Ειδικότερα, θα μελετήσουμε αν υπάρχει σημείο ισορροπίας $x_0 + \Delta x_0$ για μια γειτονική τιμή $\mu_0 + \Delta\mu_0$ της παραμέτρου μ. Η απάντηση δίδεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα συνεχίσεως

Αν το σύστημα (9) έχει τη λύση ισορροπίας (x_0, μ_0) και ο Ιακωβιανός πίνακας

$$D_x\,f(x_0, \mu_0) \tag{10}$$



Σχήμα 3: Κλάδοι σημείων ισορροπίας και σημείο διακλαδώσεως

του συστήματος (9) δεν έχει μηδενική ιδιοτιμή, τότε υπάρχει μια μοναδική λύση ισορροπίας για μια τιμή $\mu_0 + \Delta\mu_0$ στην γειτονία του σημείου ισορροπίας μ_0. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο ισορροπίας είναι μια ομαλή συνάρτηση του μ. Το γράφημα αυτής της συναρτήσεως παριστάνει έναν *κλάδο σημείων ισορροπίας* (ή μια *οικογένεια σημείων ισορροπίας*). Αν ο Ιακωβιανός πίνακας (10) έχει μια μηδενική ιδιοτιμή, το σημείο $(x_0,\ \mu_0)$ ονομάζεται *σημείο διακλαδώσεως*. Από το σημείο αυτό μπορεί να διέρχονται περισσότεροι του ενός κλάδοι σημείων ισορροπίας (Σχήμα 3), όπως θα δούμε στη συνέχεια. Στα σημεία ισορροπίας εμφανίζεται συνήθως αλλαγή στην τοπολογία της ροής στο χώρο των φάσεων.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα (10) καθορίζουν τη γραμμική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας x_0 και το σημείο αυτό ονομάζεται *μη υπερβολικό* αν υπάρχει κάποια ιδιοτιμή με πραγματικό μέρος μηδέν. Παρατηρήσατε τώρα ότι κατά μήκος ενός κλάδου σημείων ισορροπίας η γραμμική ευστάθεια μεταβάλλεται και είναι δυνατόν να διέλθουμε από κάποιο σημείο που κάποια ιδιοτιμή του πίνακα (10) να είναι ίση προς μηδέν, ή το πραγματικό της μέρος να είναι ίσο προς μηδέν. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι στο σημείο αυτό έχουμε, εν γένει, διακλάδωση μιας νέας οικογένειας σημείων ισορροπίας ή περιοδικών τροχιών, αντίστοιχα. Στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις διάφορες περιπτώσεις διακλαδώσεων σε μη υπερβολικά σημεία ισορροπίας.

3 Διακλαδώσεις σε μη υπερβολικά σημεία ισορροπίας

Θα θεωρήσουμε ένα δυναμικό σύστημα, το οποίο εξαρτάται από μια παράμετρο μ και θα μελετήσουμε τις διάφορες περιπτώσεις διακλαδώσεων που είναι δυνατόν να παρουσιασθούν. Στις παραγράφους 3.1, 3.2 και 3.3 μελετούμε την περίπτωση υπάρξεως μιας πραγματικής ιδιοτιμής ίσης προς μηδέν και στην παράγραφο 3.4 την περίπτωση υπάρξεως ζεύγους μιγαδικών ιδιοτιμών με πραγματικό μέρος μηδέν.

3.1 Διακλάδωση σάγματος-κόμβου

Θεωρούμε το δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in R, \tag{11}$$

όπου

$$f(x, \mu) = \mu - x^2. \tag{12}$$

Τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται από την εξίσωση $\mu - x^2 = 0$, και έχουμε τις περιπτώσεις

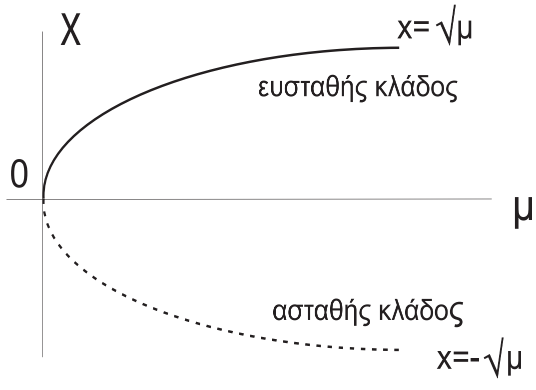
- $\mu < 0$: δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας,
- $\mu = 0$: ένα σημείο ισορροπίας $x = 0$, (διπλή ρίζα της 12)
- $\mu > 0$: δύο σημεία ισορροπίας $x = \pm\sqrt{\mu}$, (δύο κλάδοι σημείων ισορροπίας)

Η γραμμική ευστάθεια των σημείων ισορροπίας της εξισώσεως (11) βρίσκεται από τη γραμμικοποιμένη εξίσωση στην περιοχή του σημείου ισορροπίας

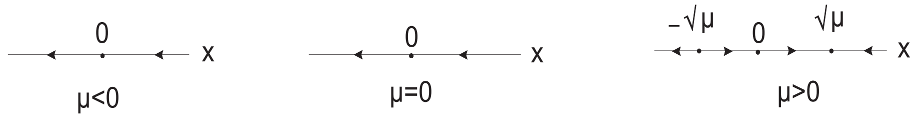
$$\dot{\xi} = \left(\frac{df}{dt}\right)_{x=x_0} \xi, \tag{13}$$

όπου $\xi = x - x_0$ η μετατόπιση από το σημείο ισορροπίας. Αν ο συντελεστής

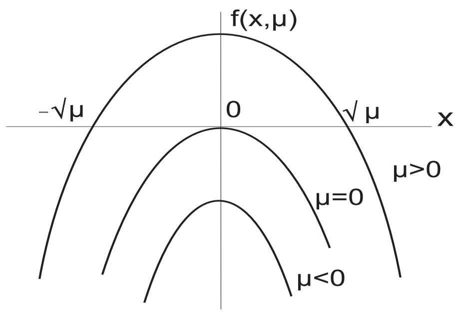
$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{x=x_0} \tag{14}$$



Σχήμα 4: Οι δύο κλάδοι των σημείων ισορροπίας του συστήματος (11), (12) και το σημείο διακλαδώσεως $x = 0$ στην τιμή $\mu = 0$.



Σχήμα 5: Η ροή του συστήματος (11), (12) στο μονοδιάστατο χώρο των φάσεων (άξονας Ox) για $\mu < 0$, $\mu = 0$ και $\mu > 0$.



Σχήμα 6: Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (11), (12) για διάφορες τιμές του μ, ως τομές της $\mu - x^2$ με τον άξονα Ox.

είναι θετικός, το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές και αν είναι αρνητικός, είναι ευσταθές.

Στο Σχήμα 4 παρουσιάζονται οι κλάδοι των σημείων ισορροπίας. Ο κλάδος $x = \sqrt{\mu}$ είναι ευσταθής, διότι ο συντελεστής (14) είναι ίσος προς $-2\sqrt{\mu} < 0$ και ο κλάδος $x = -\sqrt{\mu}$ είναι ασταθής, διότι ο συντελεστής (14) είναι ίσος προς $2\sqrt{\mu} > 0$. Συγκρίνοντας με την γενική θεωρία που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 2, παρατηρούμε ότι η εξίσωση (13) είναι αντίστοιχη της εξίσωσης μεταβολών (8) και ο συντελεστής (14) είναι αντίστοιχος του πίνακα A. Έτσι, στην περίπτωσή μας, οι τιμές του συντελεστή (14) αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του πίνακα A. Ειδικότερα για το σημείο ισορροπίας $x = 0$, ο συντελεστής (14) είναι ίσος προς μηδέν, δηλαδή το σημείο ισορροπίας $x = 0$ που αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου $\mu = 0$ δεν είναι υπερβολικό. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο αυτό είναι σημείο διακλαδώσεως, και ότι δεν υπάρχει μονοσήμαντη λύση της εξίσωσης $\mu - x^2 = 0$ στο σημείο $\mu = 0$. Πράγματι, από το Σχήμα 4 βλέπουμε ότι στην περιοχή αυτού του σημείου ισορροπίας υπάρχουν δύο λύσεις, οι $\pm\sqrt{\mu}$.

Καθώς η παράμετρος μ περνάει από το σημείο $\mu = 0$, από αρνητικές προς θετικές τιμές, η τοπολογία του χώρου των φάσεων (ο οποίος στην περίπτωσή μας είναι μονοδιάστατος) στην περιοχή του σημείου ισορροπίας μεταβάλλεται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5. Η λύση του συστήματος (11), (12) για $\mu = 0$ είναι η $x = x_0/(1 + x_0\, t)$.

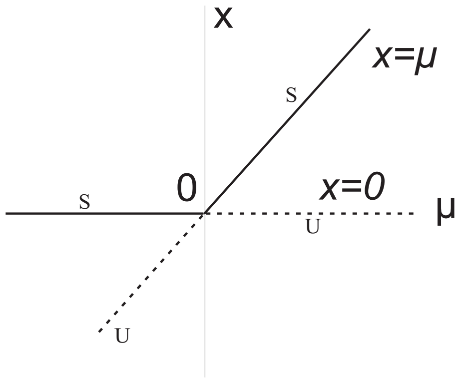
Από όλα τα παραπάνω είναι φανερό ότι το σημείο ισορροπίας $x = 0$ το οποίο αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου $\mu = 0$, είναι σημείο διακλαδώσεως. Η περίπτωση αυτή ονομάζεται *διακλάδωση σάγματος-κόμβου* και είναι η γενική περίπτωση (γενόσημος, generic.)

Η εμφάνιση των σημείων ισορροπίας του συστήματος (11), (12) για διάφορες τιμές της παραμέτρου μ φαίνεται παραστατικά στο Σχήμα 6. Τα σημεία ισορροπίας είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\mu - x^2 = 0$, δηλαδή οι τομές της καμπύλης $\mu - x^2$ με τον άξονα Ox. Για $\mu > 0$ υπάρχουν δύο σημεία τομής ενώ για $\mu < 0$ δεν υπάρχει σημείο τομής. Στην οριακή περίπτωση $\mu = 0$ έχουμε ένα σημείο τομής, το οποίο είναι το σημείο διακλαδώσεως.

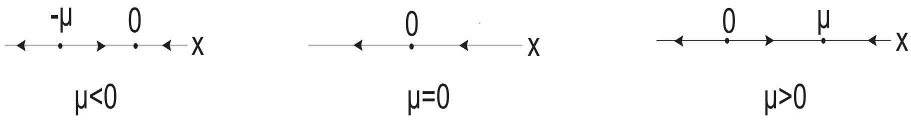
3.2 Διακλάδωση μετακρίσιμος (transcritical)

Θα μελετήσουμε το μονοδιάστατο σύστημα (11), όπου τώρα έχουμε

$$f(x, \mu) = (\mu - x)\, x. \tag{15}$$



Σχήμα 7: Οι δύο κλάδοι των σημείων ισορροπίας του συστήματος (15) για διάφορες τιμές του μ.

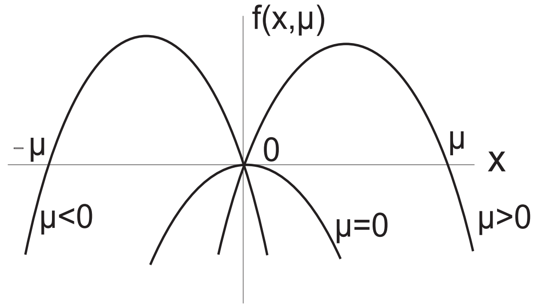


Σχήμα 8: Η τοπολογία του χώρου των φάσεων του συστήματος (15) για διάφορες τιμές του μ.

Τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται από τη λύση της εξίσωσης $(\mu - x)x = 0$ και είναι

- $x = 0$: για κάθε μ (ένας κλάδος σημείων ισορροπίας)
- $x = \mu$: για κάθε μ (ένας κλάδος σημείων ισορροπίας)

Για να βρούμε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας, θα πρέπει να υπολογίσουμε το συντελεστή (14) στη θέση των σημείων ισορροπίας. Στην περίπτωσή μας ο συντελεστής αυτός είναι ίσος προς μ για τον κλάδο $x = 0$ και $-\mu$ για τον κλάδο $x = \mu$. Συνεπώς ο κλάδος των σημείων ισορροπίας $x = 0$ είναι ευσταθής για $\mu < 0$ και ασταθής για $\mu > 0$. Ομοίως, ο κλάδος $x = \mu$ είναι ευσταθής για $\mu > 0$ και ασταθής για $\mu < 0$. Οι δύο αυτοί κλάδοι των σημείων ισορροπίας φαίνονται στο Σχήμα 7. Η λύση του συστήματος (15) για $\mu = 0$ είναι η $x = x_0/(1 + x_0\, t)$.



Σχήμα 9: Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (15) για διάφορες τιμές του μ, ως τομές της $(\mu - x)x$ με τον άξονα Ox.

Τα σημεία ισορροπίας που αντιστοιχούν σε τιμές της παραμέτρου $\mu \neq 0$ είναι υπερβολικά σημεία ισορροπίας (η ιδιοτιμή έχει πραγματικό μέρος μη μηδενικό). Στην οριακή περίπτωση $\mu = 0$ το σημείο ισορροπίας $x = 0$ είναι μη υπερβολικό (η ιδιοτιμή είναι ίση προς μηδέν) και συνεπώς το σημείο αυτό είναι σημείο διακλαδώσεως. Παρατηρήστε στο Σχήμα 7 ότι από το σημείο αυτό διέρχονται δύο κλάδοι σημείων ισορροπίας και ότι στο σημείο αυτό, στον κάθε ένα κλάδο, έχουμε αλλαγή της ευστάθειας, καθώς το μ διέρχεται από την τιμή 0. Στο σημείο ισορροπίας $x = 0$ έχουμε αλλαγή της τοπολογίας του μονοδιάστατου χώρου των φάσεων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8. Η διακλάδωση αυτή ονομάζεται *μετακρίσιμος* (transcritical).

Η εμφάνιση των σημείων ισορροπίας καθώς ματαβάλλεται η παράμετρος μ φαίνεται στο Σχήμα 9, ως η τομή της συναρτήσεως $(\mu - x)x$ με τον άξονα Ox. Η περίπτωση αυτή διακλαδώσεως δεν είναι γενόσημος (generic).

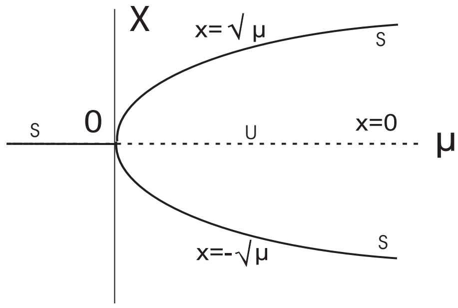
3.3 Διακλάδωση διχάλας (pitchfork)

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το σύστημα

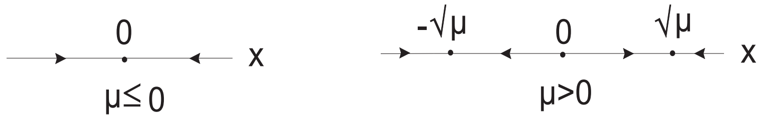
$$f(x, \mu) = \mu x - x^3. \tag{16}$$

Τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται από τη λύση της εξίσωσης $\mu x - x^3 = 0$ και είναι

- $x = 0$: για κάθε μ, (ένας κλάδος σημείων ισορροπίας)



Σχήμα 10: Οι τρείς κλάδοι των σημείων ισορροπίας του συστήματος (16) για διάφορες τιμές του μ.

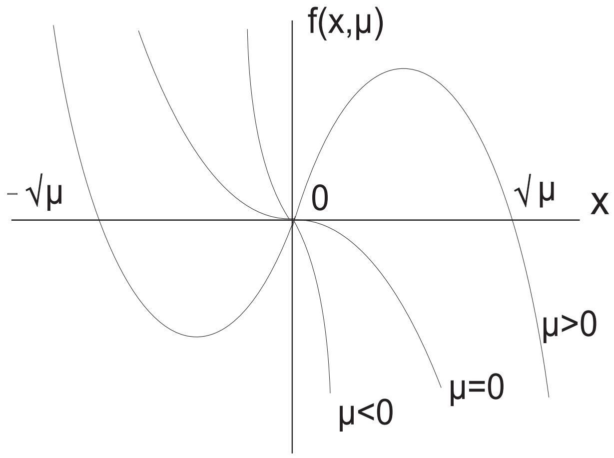


Σχήμα 11: Η τοπολογία του χώρου των φάσεων του συστήματος (16) για διάφορες τιμές του μ.

- $x = \pm\sqrt{\mu}$: για $\mu > 0$, (δύο κλάδοι σημείων ισορροπίας)

Η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας βρίσκεται, όπως και προηγουμένως, από το πρόσημο του συντελεστή (14) στη θέση των σημείων ισορροπίας. Στην περίπτωσή μας ο συντελεστής αυτός είναι ίσος προς μ για τον κλάδο $x = 0$ και ίσος προς -2μ για τους κλάδους $x = \pm\sqrt{\mu}$. Συνεπώς ο κλάδος των σημείων ισορροπίας $x = 0$ είναι ευσταθής για $\mu < 0$ και ασταθής για $\mu > 0$. Ομοίως, οι κλάδοι $x = \pm\sqrt{\mu}$ είναι και οι δύο ευσταθείς διότι $\mu > 0$. Οι τρείς αυτοί κλάδοι των σημείων ισορροπίας φαίνονται στο Σχήμα 10. Η τοπολογία του χώρου των φάσεων στην περιοχή του σημείου ισορροπίας $x = 0$ φαίνεται στο Σχήμα 11. Το σημείο ισορροπίας $x = 0$, για την τιμή της παραμέτρου $\mu = 0$, είναι σημείο διακλαδώσεως. Η λύση για $\mu = 0$ είναι η $x = x_0/\sqrt{1 + 2x_0^2\, t}$. Η περίπτωση αυτή ονομάζεται *διακλάδωση διχάλας*(pitchfork bifurcation).

Η εμφάνιση των σημείων ισορροπίας καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος μ φαίνεται στο Σχήμα 12, ως η τομή της συναρτήσεως $x\mu - x^3$ με τον άξονα Ox. Η περίπτωση αυτή διακλαδώσεως δεν είναι γενόσημος (generic).



Σχήμα 12: Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (16) για διάφορες τιμές του μ, ως τομές της $\mu x - x^3$ με τον άξονα Ox.

3.4 Διακλάδωση Hopf

Στις προηγούμενες τρείς περιπτώσεις, από ένα σημείο ενός κλάδου σημείων ισορροπίας είχαμε διακλάδωση ενός άλλου κλάδου σημείων ισορροπίας. Στο σημείο διακλαδώσεως $\mu = \mu_0$ η ιδιοτιμή του πίνακα του γραμμικοποιημένου συστήματος στην περιοχή του σημείου ισορροπίας ήταν πραγματική και ίση προς μηδέν. Θα δούμε τώρα ότι σε ορισμένες περιπτώσεις, από ένα σημείο ενός κλάδου σημείων ισορροπίας μπορεί να έχουμε διακλάδωση ενός κλάδου *περιοδικών τροχιών*. Η διακλάδωση αυτή ονομάζεται *διακλάδωση Hopf*.

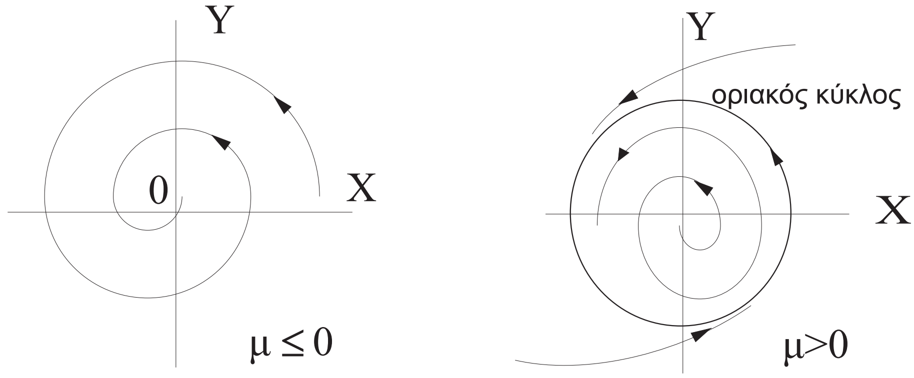
Έστω ένα δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} \;=\; f(x), \quad x \in R^n \tag{17}$$

όπου ο πίνακας

$$D\,f(x_0, \mu_0) \tag{18}$$

του γραμμικοποιημένου συστήματος στο σημείο ισορροπίας (x_0, μ_0) έχει ένα ζεύγος καθαρά φανταστικών ιδιοτιμών (πραγματικό μέρος ίσον προς μηδέν) και καμιά άλλη ιδιοτιμή με πραγματικό μέρος μηδέν. Σύμφωνα με το θεώρημα συνεχίσεως αποδεικνύεται ότι το σημείο ισορροπίας (x_0, μ_0) συνεχίζεται και υπάρχει ένα και μοναδικό σημείο ισορροπίας στην περιοχή του. Στη γενική περίπτωση από το σημείο αυτό διακλαδίζεται μια *οικογένεια περιοδικών τροχιών*.



Σχήμα 13: Η τοπολογία του χώρου των φάσεων του συστήματος (19) για $\mu \leq 0$ και για $\mu > 0$.

Η διακλάδωση αυτή μιάς οικογένειας περιοδικών τροχιών από ένα σημείο ισορροπίας ονομάζεται *διακλάδωση Hopf*. Θα μελετήσουμε την περίπτωση αυτή με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(\mu - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= x + y(\mu - x^2 - y^2). \end{aligned} \tag{19}$$

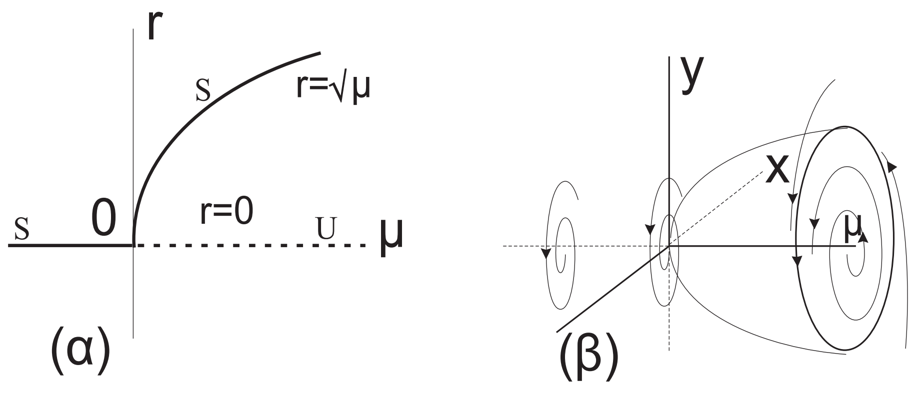
το οποίο έχει το σημείο ισορροπίας $(0,0)$, για κάθε τιμή του μ. Έχουμε επομένως τον κλάδο σημείων ισορροπίας

$$x = 0, \quad y = 0, \qquad \text{για κάθε τιμή του } \mu$$

κατά μήκος του οποίου ο Ιακωβιανός πίνακας $Df(0,\mu)$ για διάφορες τιμές του μ είναι ο

$$Df(0,\mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \tag{20}$$

και οι ιδιοτιμές του είναι οι $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$. Παρατηρούμε ότι για την τιμή της παραμέτρου $\mu = 0$ το σημείο ισορροπίας έχει ένα ζεύγος καθαρά φανταστικών ιδιοτιμών, και δεν υπάρχουν άλλες ιδιοτιμές στο σύστημα.



Σχήμα 14: Η διακλάδωση Hopf του συστήματος (19) στο σημείο $\mu = 0$.

Σε πολικές συντεταγμένες το σύστημα (19) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι ευσταθές για $\mu < 0$, (ευσταθής εστία) και ασταθές για $\mu > 0$, (ασταθής εστία). Αυτό άλλωστε προκύπτει και από το γεγονός ότι για $\mu < 0$ το πραγματικό μέρος του ζεύγους των ιδιοτιμών είναι αρνητικό και για $\mu > 0$ το πραγματικό μέρος είναι θετικό.

Από τη γενική θεωρία των δυναμικών συστημάτων προκύπτει ότι όταν το πραγματικό μέρος του ζεύγους των ιδιοτιμών του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι ίσο προς μηδέν, το σημείο ισορροπίας είναι είτε κέντρο, είτε εστία. Στην περίπτωσή μας το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ για $\mu = 0$ είναι ευσταθής εστία, όπως προκύπτει από το σύστημα (21) (διότι κοντά στην αρχή 0 είναι $\dot{r} < 0$).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι έχουμε έναν κλάδο σημείων ισορροπίας, του οποίου το γράφημα είναι η αυθεία $r = 0$ στο Σχήμα 14α, ή ο άξονας μ στο σύστημα $Oxy\mu$ στο Σχήμα 14β. Για τιμές της παραμέτρου $\mu \leq 0$ ο κλάδος αυτός είναι ευσταθής και για τιμές $\mu > 0$ είναι ασταθής.

Επιπλέον, από το σύστημα (21)προκύπτει ότι για $\mu > 0$ εμφανίζεται ένας οριακός κύκλος με ακτίνα $r = \sqrt{\mu}$. Το γράφημά του είναι η καμπύλη $r = \sqrt{\mu}$ στο Σχήμα 14α. Ο οριακός αυτός κύκλος είναι η περιοδική λύση $\gamma_\mu(t)$

του συστήματος (19),

$$\gamma_\mu(t) \;=\; \sqrt{\mu}\;(\cos t,\, \sin t)^\tau\,. \tag{22}$$

Ο οριακός αυτός κύκλος (περιοδική τροχιά) είναι ευσταθής, διότι είναι $\dot{r} > 0$ για $r < \sqrt{\mu}$ και $\dot{r} < 0$ για $r > \sqrt{\mu}$. Δηλαδή, μια οποιαδήποτε τροχιά, εντός ή εκτός του οριακού κύκλου (22), τείνει ασυμπτωτικά προς τον οριακό κύκλο.

Η τοπολογία του χώρου των φάσεων για $\mu \leq 0$ και για $\mu > 0$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 13.

Η περιοδική τροχιά (22) είναι κυκλική, όπως ήδη αναφέραμε, με ακτίνα ίση προς $\sqrt{\mu}$. Η περιοδική αυτή τροχιά διακλαδίζεται από τον κλάδο των σημείων ισορροπίας $(0,0)$ στο σημείο $\mu = 0$, αρχίζοντας με μηδενική ακτίνα και αυξάνοντας την ακτίνα καθώς το μ αυξάνει. Στο σημείο αυτό έχουμε συνεπώς *διακλάδωση Hopf*, όπως φαίνεται παραστατικά στο Σχήμα 14β. Παρατηρήστε ότι στο σημείο διακλαδώσεως το σημείο ισορροπίας έχει ένα ζεύγος καθαρά φανταστικών ιδιοτιμών, τις $\pm i$.

Αναφορές

[1] Guckenheimer, J. and Holmes, Ph., 1983: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag.

[2] Jordan, D.W. and Smith, P., 1987: *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford.

[3] Lichtenberg, A.J. and Lieberman, M.A., 1983: *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag.

[4] Μπούντη,Α. 1997: *Μη Γραμμικές Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Εκδόσεις Πνευματικού, Αθήνα.

[5] Perko, L., 1991: *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag.

[6] Χατζηδημητρίου, Ι., 2000: *Ευστάθεια Δυναμικών Συστημάτων*, Πρακτικά $11^{ου}$ Θερινού Σχολείου Μη Γραμμικής Δυναμικής, Λιβαδιά.