ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

1 Εισαγωγή

Ο σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι να παρουσιάσει τη βασική θεωρία για τη μελέτη της ευστάθειας ενός μη γραμμικού συστήματος. Όπως είναι γνωστό, η γενική λύση ενός μη γραμμικού συστήματος είναι εξαιρετικά πολύπλοκη και δεν είναι δυνατό να εκφρασθεί συναρτήσει των γνωστών συναρτήσεων. Για το λόγο αυτό, θα περιορισθούμε στη μελέτη της συμπεριφοράς ενός μη γραμμικού συστήματος στην περιοχή ειδικών λύσεων, όπως είναι τα σημεία ισορροπίας και οι περιοδικές τροχιές. Οι λύσεις αυτές καθορίζουν κατά τρόπο κρίσιμο την τοπολογία του χώρου των φάσεων και συνεπώς, παρά το ότι οι λύσεις αυτές είναι μεμονωμένες, η μελέτη τους δίνει πολλές χρήσιμες πληροφορίες για τη μακροχρόνια συμπεριφορά του συστήματος. Σημειώνουμε ακόμα ότι, σε αντίθεση με τη γενική λύση του συστήματος, η εύρεση των ανωτέρω ειδικών λύσεων είναι σχετικά εύκολη. Ο συνήθης τρόπος της μελέτης ενός μη γραμμικού συστήματος στην περιοχή ενός σημείου ισορροπίας ή μιάς περιοδικής τροχιάς, είναι να γραμμικοποιήσουμε το σύστημα στην περιοχή αυτών των λύσεων και να μελετήσουμε το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα. Δεδομένου ότι η μαθηματική θεωρία των γραμμικών συστημάτων είναι γνωστή, αυτό θα μας δόσει την πλήρη λύση του γραμμικοποιημένου συστήματος. Στην παρούσα μελέτη θα δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στη μετάβαση από το γραμμικοποιημένο στο αρχικό σύστημα και θα μελετήσουμε ποιά βασικά χαρακτηριστικά παραμένουν αναλλοίωτα.

Η εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικά ως μια συνεχής ροή στο χώρο των φάσεων. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να περιγράψουμε τις βασικές ιδιότητες του συστήματος, όπως π.χ. αν είναι συντηρητικό ή μη συντηρητικό, με απλές γεωμετρικές έννοιες οι οποίες είναι εύκολα κατανοητές. Επίσης, η συνεχής ροή ενός δυναμικού συστήματος μπορεί να περιγραφεί, ισοδύναμα, ως μια διάκριτη απεικόνιση σε έναν υποχώρο του χώρου των φάσεων, με τη μέθοδο της επιφάνειας τομής Poincaré. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε συστήματα με δύο βαθμούς ελευθερίας, όπου ο αρχικός χώρος των φάσεων είναι τεσσάρων διαστάσεων, ενώ η επιφάνεια τομής Poincaré είναι δύο διαστάσεων. Οι περιοδικές τροχιές, οι οποίες είναι κλειστές καμπύλες στον τετραδιάστατο χώρο των φάσεων, αντιπροσωπεύονται από σημεία ισορροπίας, και είναι φανερό ότι αυτό απλουστεύει τη μελέτη. Στα επόμενα θα παρουσιάσουμε τη βασική θεωρία της συμπεριφοράς ενός μη γραμμικού συστήματος στην περιοχή ενός σημείου ισορροπίας και θα δόσουμε απλά παραδείγματα για κάθε τυπική περίπτωση, για την καλύτερη κατανόηση της θεωρίας.

2 Βασικοί ορισμοί

Θα δόσουμε τώρα μερικούς βασικούς ορισμούς:

Αυτόνομο σύστημα

Ένα αυτόνομο δυναμικό σύστημα περιγράφεται από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

όπου $x \in R^n$ $f : E \to R^n$, E ανοικτό υποσύνολο του R^n και $f \in C^1(E)$. Το διανυσματικό πεδίο f δημιουργεί τη ροή

$$\phi_t : E \to R^n, \tag{2}$$

η οποία εκφράζεται από τη λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (1), την οποία θα παριστάνομε ως $\phi_t(x) = \phi(t,x)$. Η λύση αυτή επαληθεύει εκ ταυτότητος το σύστημα (1):

$$\frac{d}{dt}\phi(t,x)/_{t=\tau} = f(\phi(\tau,x)). \tag{3}$$

Επειδή το σύστημα είναι αυτόνομο, οι αρχικές συνθήκες μπορούν να θεωρηθούν ότι αντιστοιχούν στο χρόνο $t = 0$: $x(0) = x_0 \in E$ και η λύση που αντιστοιχεί σε αυτές τις αρχικές συνθήκες είναι η $\phi(t, x_0)$, τέτοια ώστε $\phi(0, x_0) = x_0$. Στα επόμενα, τη λύση θα τη συμβολίζομε ως $x(t, x_0)$ ή απλώς ως $x(t)$.

<u>Δυναμικό σύστημα</u>
Ένα δυναμικό σύστημα στο E ορίζεται ως μία C^1 απεικόνιση

$$\phi : R \times E \to E, \tag{4}$$

όπου E ανοικτό υποσύνολο του R^n και αν $\phi_t(x) = \phi(t, x)$, τότε η ροή ϕ_t επαληθεύει τις σχέσεις:
(ι) $\phi_0(x) = x$ για κάθε $x \in E$
(ιι) $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x)$ για κάθε $s, t \in R$ και $x \in E$.

<u>Σημεία ισορροπίας και περιοδικές τροχιές</u>
Ας θεωρήσουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n. \tag{5}$$

Ένα σημείο του χώρου των φάσεων x_0 ορίζεται ως *σημείο ισορροπίας* ή *κρίσιμο σημείο* αν η $x(t) = x_0$ είναι λύση του συστήματος, δηλαδή εάν το x_0 πληροί την αλγεβρική εξίσωση $f(x_0) = 0$. Μία λύση $\gamma(t) = \phi_t(x_0)$ ορίζεται ως *περιοδική τροχιά* ή *κύκλος* εάν επαληθεύει τη σχέση

$$\phi_{t+T}(x_0) = \phi_t(x_0), \tag{6}$$

όπου T είναι η περίοδος.

3 Γραμμικοποίηση

3.1 Στην περιοχή σημείου ισορροπίας

Έστω σημείο ισορροπίας x_0. Μπορούμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι η αρχή των αξόνων έχει μετατεθεί στη θέση του σημείου ισορροπίας, έτσι ώστε να είναι $x_0 = 0$. Μία διαταραγμένη λύση είναι τώρα η $x(t)$, όπου x είναι η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας και θεωρείται μικρό. Η λύση αυτή επαληθεύει το σύστημα (5),

$$\dot{x} = f(0) + Df(0)x + ..., \quad x \in R^n, \tag{7}$$

όπου αναπτύξαμε το δεξιό μέλος σε σειρά Taylor και απαλείψαμε τους όρους δευτέρας και ανωτέρας τάξεως. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $f(0) = 0$, έχουμε τελικά το γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = A\,x, \tag{8}$$

όπου ο πίνακας $A = Df(0)$ δίδεται από τη σχέση

$$Df(0) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=0} . \tag{9}$$

Η λύση αυτού του συστήματος θα καθορίσει τη συμπεριφορά του στην περιοχή του σημείου ισορροπίας, σε γραμμική προσέγγιση. Κρίσιμο ρόλο στην ποιοτική συμπεριφορά της λύσεως παίζουν οι ιδιοτιμές του πίνακα A, από τίς οποίες εξαρτάται η ευστάθεια του συστήματος. Από τη θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων είναι γνωστό ότι η λύση είναι περατωμένη μόνον όταν *όλες* οι ιδιοτιμές έχουν μη θετικό πραγματικό μέρος.

Ένα σημείο ισορροπίας ορίζεται ως *υπερβολικό σημείο* όταν δεν υπάρχει ιδιοτιμή του A με μηδενικό πραγματικό μέρος.

3.2 Στην περιοχή περιοδικής τροχιάς

Έστω η περιοδική τροχιά $\Gamma : x = \gamma(t)$, περιόδου T. Μια γειτονική τροχιά μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή

$$x(t) = \gamma(t) + \xi(t), \tag{10}$$

όπου $\xi(t)$ είναι η μετατόπιση της διαταραγμένης τροχιάς από την περιοδική τροχιά, για την ίδια χρονική στιγμή. Το γραμμικοποιημένο σύστημα στην περιοχή της περιοδικής τροχιάς δίδεται από το σύστημα

$$\dot{\xi} = A(t)\,\xi, \tag{11}$$

όπου ο πίνακας $A(t) = Df(\gamma(t))$,

$$Df(\gamma(t)) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=\gamma(t)} . \tag{12}$$

Ο πίνακας A είναι ένας περιοδικός πίνακας με περίοδο T. Η λύση του συστήματος (11) ευρίσκεται από τη θεωρία Floquet και καθορίζει την ευστάθεια της περιοδικής τροχιάς, σε γραμμική προσσέγγιση.

4 Γενική λύση γραμμικού συστήματος

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = A(t)\, x, \quad x \in R^n. \tag{13}$$

Η γενική λύση του είναι γραμμικός συνδυασμός n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων και μπορεί να εκφρασθεί υπό τη μορφή

$$x(t) = \Phi(t)\, C, \tag{14}$$

ή

$$x(t) = \left[\Phi(t)\Phi(0)^{-1}\right]\, x_0, \tag{15}$$

όπου $\Phi(t)$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας που οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις και C είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα. Είναι φανερό ότι και οι στήλες του πίνακα $\Phi(t)\Phi(0)^{-1}$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

Κάθε πίνακας $\Phi(t)$ που οι στήλες του έχουν αυτή την ιδιότητα ονομάζεται *θεμελιώδης πίνακας λύσεων*. Αν είναι και $\Phi(0) = I$, τότε η λύση εκφράζεται συναρτήσει των αρχικών συνθηκών $x(0)$ ως

$$x(t) = \Phi(t)\, x(0). \tag{16}$$

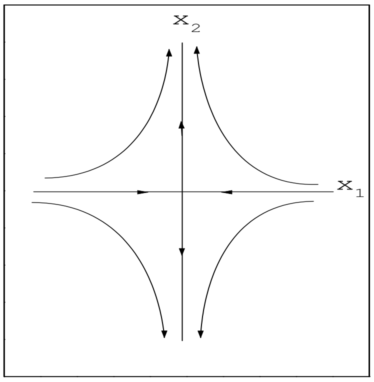
Στα επόμενα θα μελετήσουμε τον θεμελιώδη πίνακα λύσεων στο γραμμικό σύστημα με σταθερούς συντελεστές $\dot{x} = A\, x$, A σταθερός.

Ένα βασικό ερώτημα που θα εξετάσουμε είναι το πώς σχετίζεται η ροή του γραμμικοποιημένου συστήματος στην περιοχή του σημείου ισορροπίας με τη ροή του μη γραμμικού συστήματος. Πότε συμπίπτουν ποιοτικά και πότε όχι;

5 Ευστάθεια σημείων ισορροπίας γραμμικού συστήματος

Θεωρούμε το μη γραμμικό σύστημα $\dot{x} = f(x)$, $x \in R^n$ και υποθέτουμε ότι η αρχή $x = 0$ είναι σημείο ισορροπίας, $f(0) = 0$. Το γραμμικοποιημένο σύστημα στην περιοχή του σημείου ισορροπίας είναι το

$$\dot{x} = A\, x, \tag{17}$$



Σχήμα 1: Το πορτρέτο φάσεως του συστήματος (19)

όπου $A = Df(0)$ είναι ένας σταθερός $n \times n$ πίνακας. Η γενική λύση αυτού του συστήματος είναι η

$$x(t) = e^{tA}\, x_0, \tag{18}$$

όπου e^{tA} είναι ο θεμελιώδης πίνακας λύσεων. [1] Ως *πορτρέτο φάσεως* (phase portrait) ορίζουμε το σύνολο όλων των λύσεων στο R^n.
Παράδειγμα: Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

η λύση του οποίου είναι η $x_1(t) = x_{10}\, e^{-t}$, $x_2(t) = x_{20}\, e^{2t}$. Το πορτρέτο φάσεως δίδεται στο σχήμα 1.

5.1 Γενική λύση του συστήματος $\dot{x} = A\,x$

Ο πίνακας A είναι διαγώνιος
Έστω ότι

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{20}$$

[1] Ορισμός: $e^B = I + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + ... + \frac{B^n}{n!} + ...$

Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της μορφής

$$x_i = e^{\lambda_i t}\, x_{i0}, \quad i = 1, 2, ...n. \tag{21}$$

<u>Ο πίνακας A δεν είναι διαγώνιος</u>

Οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές και διάκριτες:

Ονομάζουμε U_1, U_2, $..U_n$ τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, τα οποία σχηματίζουν βάση στον R^n. Ο πίνακας $P = [U_1, U_2, ..U_n]$ είναι αντιστρέψιμος και ο μετασχηματισμός $P^{-1}A\,P$ διαγωνιοποιεί τον A,

$$P^{-1}A\,P = \text{diag} \;\; [\lambda_1,\ \lambda_2, ..\lambda_n].$$

Ο μετασχηματισμός $y = P^{-1}\,x$ μετασχηματίζει το σύστημα $\dot{x} = A\,x$ στο σύστημα $\dot{y} = B\,y$, όπου ο πίνακας B είναι διαγώνιος, $B = P^{-1}A\,P$ με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Η λύση ως προς y είναι η

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} y(0),$$

και τελικά, η λύση ως προς την αρχική μεταβλητή x, είναι η

$$x(t) = \left[P\,\Lambda(t)\,P^{-1}\right]\,x(0)$$

όπου $\Lambda(t) = \text{diag}\left[e^{\lambda_1 t}, ...e^{\lambda_n t}\right]$. Ο πίνακας $P\,\Lambda(t)\,P^{-1}$ είναι ο θεμελιώδης πίνακας λύσεων e^{tA}.

Οι ιδιοτιμές του A είναι μιγαδικές και διάκριτες:

Έστω A ένας $2n \times 2n$ πίνακας με $2n$ διάκριτες ιδιοτιμές $\lambda_j = \alpha_j \pm i\,\beta_j$ και $W_j = U_j \pm i V_j$, $j = 1, 2, ..n$, τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Ο $2n \times 2n$ πίνακας $P = [V_1\,U_1\,...V_n\,U_n]$ είναι αντιστρέψιμος και

$$P^{-1}\,A\,P = \text{diag}\,\begin{bmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}.$$

Η λύση του συστήματος είναι η

$$x(t) = P\,\left(\text{diag}\;\, e^{\alpha_j t}\begin{bmatrix} \cos\beta_j t & -\sin\beta_j t \\ \sin\beta_j t & \cos\beta_j t \end{bmatrix}\right)\,P^{-1}\,x(0).$$

Ο 2×2 πίνακας στην ανωτέρω σχέση παριστάνει στροφή κατά $\beta_j t$ rad.

Οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές και μιγαδικές, διάκριτες:
Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας A έχει k πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_k$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα $U_1, U_2, ...U_k$ και μιγαδικές ιδιοτιμές $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j,\ j = k+1, k+2, ...n$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα $U_j \pm iV_j$. Ο πίνακας

$$P = [U_1, U_2, ...U_k, V_{k+1}, U_{k+1}, ...V_n, U_n]$$

διαγωνιοποιεί τον πίνακα A,

$$P^{-1}\, A\, P = \mathrm{diag}\ \ [\lambda_1, ...\lambda_k, B_{k+1}, B_n]\,,$$

όπου

$$B_j = \left[\begin{array}{cc} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{array} \right].$$

Η λύση εκφράζεται υπό τη μορφή

$$x(t) = \left[P\, \Lambda(t)\, P^{-1}\right]\, x(0), \tag{22}$$

όπου

$$\Lambda(t) = \mathrm{diag}\left[e^{\lambda_1 t}, ...e^{\lambda_k t}, e^{\alpha_j t} \begin{pmatrix} \cos\beta_j t & -\sin\beta_j t \\ \sin\beta_j t & \cos\beta_j t \end{pmatrix}\right].$$

<u>*παράδειγμα*</u>

Έστω ότι

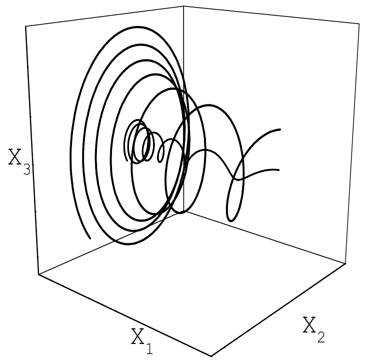
$$A = \begin{pmatrix} -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -16 \\ 0 & 1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του είναι οι $\lambda_1 = -0.4,\ \lambda_{2,3} = 0.1 \pm 4i$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα

$$U_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \quad W_{2,3} = U_2 \pm iV_2 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \pm 4i \\ 1 \end{array} \right].$$

Ο πίνακας P είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Σχήμα 2: Το πορτρέτο φάσεως του συστήματος (23)

και η λύση είναι τελικά η

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-0.4t}\, x_{10}, \\ x_2 &= e^{0.1t}\, [x_{20} \cos 4t - 4\, x_{30}\, \sin 4t,] \\ x_3 &= e^{0.1t}\, \left[\frac{1}{4}\, x_{20} \sin 4t + x_{30}\, \cos 4t\right]. \end{aligned} \tag{23}$$

Το πορτρέτο φάσεως δίδεται στο Σχήμα 2.

Πολλαπλές ιδιοτιμές:
Έστω $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m,\ m < n$ μια πολλαπλή πραγματική ιδιοτιμή. Εάν στην ιδιοτιμή αυτή αντιστοιχούν m γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε για τη γενική λύση ισχύει η προηγούμενη θεωρία, που όλες οι ιδιοτιμές είναι απλές. Εάν όμως στην πολλαπλή ιδιοτιμή, πολλαπλότητας m, αντιστοιχούν λιγότερα του m ιδιοδιανύσματα, τότε ισχύουν τα εξής:
Ορίζουμε ως *γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα* του πίνακα A που αντιστοιχεί στην πολλαπλή ιδιοτιμή λ, τη μη μηδενική λύση U του συστήματος

$$(A - \lambda I)^k\ U\ = 0, \quad k \leq m.$$

Επίσης ορίζουμε έναν πίνακα N ως *μηδενοδύναμο* (*nilpotent)* τάξεως k εάν

$$N^{k-1} \neq 0, \quad N^k = 0$$

<u>Θεώρημα</u>
Έστω $n \times n$ πίνακας A, με πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, μερικές

των οποίων είναι πολλαπλές.
- Υπάρχει βάση $[U_1, U_2, ...U_n]$ γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων στο R^n.
- Ο πίνακας $P = [U_1, U_2, ...U_n]$ είναι αντιστρέψιμος.
- Υπάρχει πίνακας S τέτοιος ώστε $A = S + N$, όπου

$$P^{-1}SP = \text{diag} \ \ [\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n]$$

και ο πίνακας $N = A - S$ είναι μηδενοδύναμος τάξεως $k \leq n$ και $SN = NS$.
Τότε η λύση είναι η

$$x(t) = P \,\text{diag}\, \left[e^{\lambda_j t}\right] \, P^{-1} \left[I + Nt + ... + \frac{N^k t^k}{k!}\right] x_0. \tag{24}$$

Ειδικότερα για την περίπτωση που η ιδιοτιμή λ είναι πολλαπλότητας n,

$$x(t) = e^{\lambda t} \left[I + Nt + ... + \frac{N^k t^k}{k!}\right] x_0. \tag{25}$$

Αν οι ιδιοτιμές ενός $2n \times 2n$ πίνακα A είναι μιγαδικές και πολλαπλές, οι $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j, \ j = 1, 2, ..n$, τότε ισχύουν τα εξής:
- Υπάρχουν γενικευμένα μιγαδικά ιδιοδιανύσματα, τα $W_j = U_j \pm iV_j$ και ο πίνακας $P = [V_1, U_1, ...V_n, U_n]$ είναι αντιστρέψιμος.
- Υπάρχει πίνακας S τέτοιος ώστε $A = S + N$, όπου

$$P^{-1}SP = \text{diag} \begin{bmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix},$$

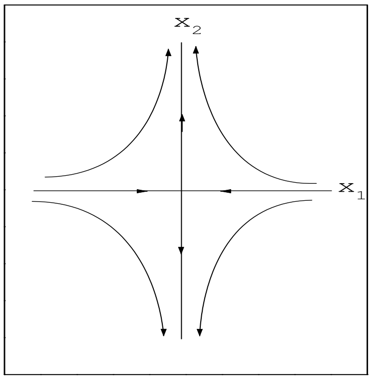
- ο πίνακας $N + A - S$ είναι μηδενοδύναμος τάξεως $k \leq 2n$ και $SN = NS$.
Τότε η λύση είναι η

$$x(t) = P \,\text{diag}\, e^{\alpha_j t} \begin{bmatrix} \cos\beta_j t & -\sin\beta_j t \\ \sin\beta_j t & \cos\beta_j t \end{bmatrix} P^{-1} \left[I + ... + \frac{N^k t^k}{k!}\right]. \tag{26}$$

6 Γραμμικά συστήματα στο R^2-Πορτρέτα φάσεως

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = B\, x, \tag{27}$$



Σχήμα 3: σάγμα (saddle)

όπου B είναι ένας σταθερός 2×2 πίνακας και $x_0 = 0$ είναι σημείο ισορροπίας. Θε μελετήσουμε την τοπολογία του χώρου των φάσεων, στην περιοχή του σημείου ισορροπίας $x_0 = 0$, για διάφορες περιπτώσεις του πίνακα B.

<u>ΣΑΓΜΑ (saddle)</u>

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0 < \mu, \tag{28}$$

Η λύση αυτού του συστήματος είναι η

$$B = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} x_0, \tag{29}$$

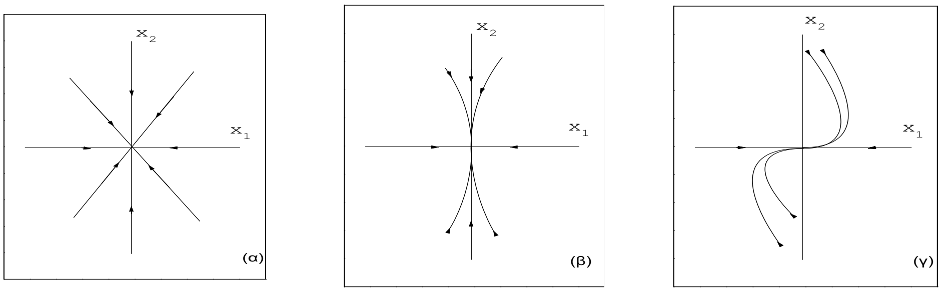
και το πορτρέτο φάσεως δίδεται στο σχήμα 3:

<u>ΚΟΜΒΟΣ (node)</u>

<u>*περίπτωση A*</u>

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda \leq \mu < 0. \tag{30}$$

Η λύση δίδεται από τις σχέσεις (29), και τα πορτρέτα φάσεως στην περίπτωση αυτή δίδονται στα σχήματα 4α και 4β.



Σχήμα 4: Κόμβος (node). Για $\lambda \geq \mu > 0$ η φορά είναι αντίστροφη

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0 < \mu. \tag{31}$$

περίπτωση Β

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0. \tag{32}$$

Η λύση δίδεται από τη σχέση

$$x(t) = e^{\lambda t}\,(I + N\,t)\,x_0 \;=\; e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0. \tag{33}$$

Το πορτρέτο φάσεως δίδεται στο σχήμα 4γ. Στην περίπτωση $\lambda < 0$ ο κόμβος είναι ευσταθής, ενώ αν είναι $\lambda > 0$, η φορά στα σχήματα 4 είναι αντίστροφη και ο κόμβος είναι ασταθής.

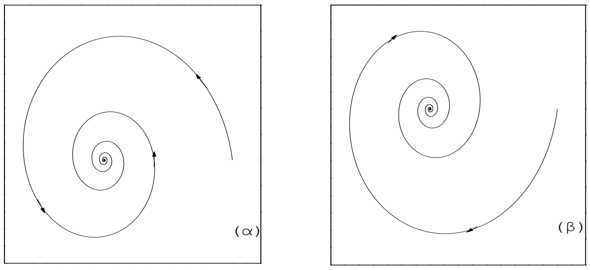
ΕΣΤΙΑ (focus)

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha < 0. \tag{34}$$

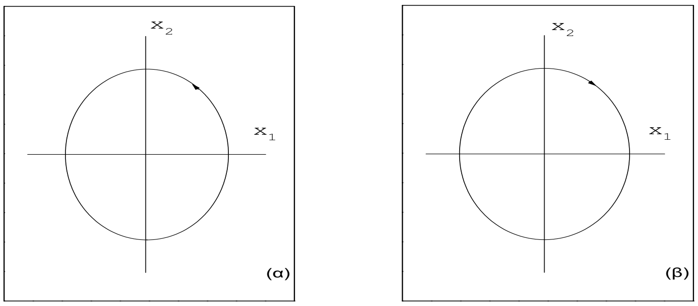
Η λύση είναι η

$$x(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} x_0. \tag{35}$$

Το πορτρέτο φάσεως δίδεται στο σχήμα 5α, για $\beta > 0$ και 5β για $\beta < 0$. Στην περίπτωση αυτή ($\alpha < 0$), η εστία είναι ευσταθής. Εάν είναι $\alpha > 0$, η φορά στα σχήματα 5 είναι αντίστροφη και η εστία είναι ασταθής.



Σχήμα 5: Εστία: (α) $\beta > 0$, (β) $\beta < 0$



Σχήμα 6: Κέντρο: (α) $\beta > 0$, (β) $\beta < 0$.

<u>ΚΕΝΤΡΟ (center)</u>

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

και η λύση είναι η

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} x_0. \tag{37}$$

Το πορτρέτο φάσεως δίδεται στα σχήματα 6α,β για $\beta > 0$ και $\beta < 0$, αντίστοιχα.

Μη γραμμικό σύστημα

Ένα σημείο ισορροπίας *μη γραμμικού συστήματος* ορίζεται ως **σάγμα**, **κόμβος**, **εστία ή κέντρο** αν το πορτρέτο φάσεώς του στην περιοχή του σημείου ισορροπίας x_0 είναι ισοδύναμο, σε γραμμική προσέγγιση, με μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, αντίστοιχα.

Ένα σημείο ισορροπίας x_0 μη γραμμικού συστήματος $\dot{x} = f(x)$ ονομάζεται *καταβόθρα*, (*sink*), αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $D\,f(x_0)$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος και *πηγή*, (*source*), αν έχουν όλες θετικό πραγματικό μέρος.

7 Αναλλοίωτοι υποχώροι

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = A\,x, \quad x \in R^n, \tag{38}$$

όπου A $n \times n$ σταθερός πίνακας. Θα εκφράσουμε τη λύση αυτού του συστήματος για τις παρακάτω περιπτώσεις:

Ιδιοτιμές του A πραγματικές και απλές

Έστω ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$, οι οποίες είναι απλές. Η λύση του συστήματος (38) είναι η

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & . & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1}\,x_0, \tag{39}$$

όπου $P = [U_1, U_2, ...U_n]$ και U_i τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_i. Αναλύουμε τώρα τις αρχικές συνθήκες x_0 ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων U_i,

$$x_0 = P\,C \; = \; c_1 U_1 + ... + c_n U_n, \tag{40}$$

όπου C είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα με στοιχεία $c_1, c_2, ...c_n$. Η λύση, με τη βοήθεια των εξισώσεων (39) και (40), εκφράζεται υπό τη μορφή

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & . & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} C,$$

ή

$$x(t) = c_1 U_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n U_n e^{\lambda_n t}. \tag{41}$$

Ιδιοτιμές του A μιγαδικές και απλές

Έστω ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι μιγαδικές και απλές, οι $z_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ και $W_j = U_j \pm iV_j$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, $j = 1, 2, ...n$. Η λύση είναι η

$$x(t) = P \left(\operatorname{diag} e^{\alpha_j t} \begin{bmatrix} \cos\beta_j t & -\sin\beta_j t \\ \sin\beta_j t & \cos\beta_j t \end{bmatrix} \right) P^{-1} \, x_0,$$

όπου $P = [V_1 U_1, ...V_n U_n]$ $2n \times 2n$ πίνακας. Οι αρχικές συνθήκες x_0 μπορούν να εκφρασθούν ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων V_j, U_j,

$$x_0 = P\,C \ = \ c_1 V_1 + c_2 U_1 + ...$$

και η λύση είναι η

$$x(t) = P \left(\operatorname{diag} e^{\alpha_j t} \begin{bmatrix} \cos\beta_j t & -\sin\beta_j t \\ \sin\beta_j t & \cos\beta_j t \end{bmatrix} \right) C,$$

και τελικά

$$x(t) = e^{\alpha_1 t} \left[c_1 \left(V_1 \cos\beta_1 t + U_1 \sin\beta_1 t \right) + c_2 \left(-V_1 \sin\beta_1 t + U_1 \cos\beta_1 t \right) \right] + ... \tag{42}$$

Από τις παραπάνω δύο περιπτώσεις (πραγματικών και μιγαδικών ιδιοτιμών) προκύπτει ότι *αν οι αρχικές συνθήκες είναι κατά μήκος ενός ιδιοδιανύσματος, τότε διεγείρεται μόνον ο αντίστοιχος εκθετικός όρος*. Ειδικώτερα:

Πραγματικές ιδιοτιμές

Έστω ότι είναι

$$x_0 = c\, U_1.$$

Η λύση είναι, σύμφωνα με τον τύπο (41), η

$$x(t, cU_1) = c\, U_1 e^{\lambda_1 t}. \tag{43}$$

Το σύνολο αυτών των σημείων αποτελούν μια ευθεία παράλληλη προς το ιδιοδιάνυσμα U_1, η οποία απεικονίζεται στον εαυτό της με τη λύση του συστήματος, δηλαδή παραμένει αναλλοίωτη. Ο μονοδιάστατος αυτός χώρος ονομάζεται *αναλλοίωτος υποχώρος*. Αν $\lambda_1 < 0$, ονομάζεται ευσταθής αναλλοίωτος υποχώρος και συμβολίζεται ως E^s και αν $\lambda_1 > 0$ ονομάζεται ασταθής αναλλοίωτος υποχώρος και συμβολίζεται ως E^u.

Μιγαδικές ιδιοτιμές

Έστω ότι είναι

$$x_0 = c_1 V_1 + c_2 U_1.$$

Η λύση του συστήματος είναι, συμφωνα με τον τύπο (42), η

$$x(t) = e^{\alpha_1 t} \left(c_1 \left[V_1 \cos \beta_1 t + U_1 \sin \beta_1 t \right] + c_2 \left[-V_1 \sin \beta_1 t = U_1 \cos \beta_1 t \right] \right). \tag{44}$$

Από τη λύση (44) προκύπτει ότι το σύνολο όλων των σημείων που αποτελούν τη λύση αυτή ευρίσκονται σε ένα επίπεδο το οποίο ορίζεται από τα διανύσματα V_1 και U_1. Ο δισδιάστατος αυτός χώρος είναι αναλλοίωτος ως προς τη λύση και ονομάζεται *αναλλοίωτος υποχώρος*. Εάν είναι $\alpha_1 < 0$ ονομάζεται ευσταθής και συμβολίζεται ως E^s και εάν είναι $\alpha_1 > 0$ όνομάζεται ασταθής και συμβολίζεται ως E^u.

Εάν στις ανωτέρω δύο περιπτώσεις, πραγματικής ή μιγαδικής ιδιοτιμής, είναι $\lambda_1 = 0$ ή $\alpha_1 = 0$, ο αναλλοίωτος υποχώρος ονομάζεται *κεντρικός υποχώρος* και συμβολίζεται ως E^c.

Ανάλογα ισχύουν και για πολλαπλές ιδιοτιμές. Η μορφή της λύσης είναι ανάλογη με τις παραπάνω. Η διαφορά είναι ότι πέραν του εκθετικού όπου που εμφανίζεται σε κάθε περίπτωση, και ο οποίος καθορίζει το είδος της ευστάθειας, εμφανίζονται και όροι με δυνάμεις του t.

Παραδείγματα αναλλοίωτων υποχώρων

Θα παρουσιάσομε διάφορα παραδείγματα αναλλοίωτων υποχώρων σε δυναμικά συστήματα που ορίζονται από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων $\dot{x} = Ax$, όπου A σταθερός πίνακας.

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε τον πίνακα A,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

ο οποίος έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $U_1 = [1, 0]$, $U_2 = [1, -4]$. Η λύση δίδεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= x_0 + y_0 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-4t} \right), \\ y &= y_0 e^{-4t}, \end{aligned}$$

και παρατηρούμε ότι στις αρχικές συνθήκες $x_0 = k$, $y_0 = 0$, όπου k αυθαίρετο, αντιστοιχεί η λύση $x(t) = k$, $y(t) = 0$. Συνεπώς, η γραμμή η παράλληλη προς το διάνυσμα $[1, 0]$ παραμένει αναλλοίωτη στη ροή e^{tA}. Το διάνυσμα αυτό είναι το ιδιοδιάνυσμα U_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$. Ο μονοδιάστατος αυτός χώρος είναι ο αναλλοίωτος κεντρικός υποχώρος E^c. Επίσης, παρατηρούμε ότι στις αρχικές συνθήκες $x_0 = k$, $y_0 = -4k$, αντιστοιχεί η λύση $x(t) = ke^{-4t}$, $y(t) = -4ke^{-4t}$ και συνεπώς η γραμμή η παράλληλη προς το διάνυσμα $[1, -4]$ παραμένει αναλλοίωτη στη ροή e^{tA}. Το διάνυσμα αυτό είναι το ιδιοδάνυσμα U_2 και ο ανωτέρω μονοδιάστατος χώρος είναι ο αναλλοίωτος υποχώρος E^s.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε τον πίνακα A,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του είναι οι $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$, $\lambda_3 = 2$ και ο θεμελιώδης πίνακας λύσεων είναι ο

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Από τα παραπάνω ευρίσκεται ότι έχουμε ένα μονοδιάστατο ασταθή υποχώρο, τον $E^u = [0, 0, 1]$ που αντιστοιχεί στην πραγματική ιδιοτιμή $\lambda_3 = 2$ και ένα δισδιάστατο ευσταθή αναλλοίωτο υποχώρο, τον $E^s = \operatorname{span}[(1, 1, 0), (1, -1, 0)]$, που αντιστοιχεί στη μιγαδική ιδιοτιμή $\lambda_{1,2}$.

Παράδειγμα 3

Θεωρούμε τον πίνακα A,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του είναι οι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα $U_1 = [1, 0, 0]$, $U_2 = [0, 1, 0]$, $U_3 = [0, 0, 1]$, οπότε η λύση μπορεί να εκφρασθεί ως

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι αναλλοίωτοι υποχώροι είναι οι

$$E^c = \mathrm{span}\left[(1,0,0),(0,1,0)\right], \;\; E^u = [0,0,1], \;\; E^s = \emptyset.$$

Παράδειγμα 4

Θεωρούμε τον πίνακα A,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του είναι οι $\lambda_{1,2} = 0 \pm i$, $\lambda_3 = 2$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα $W_{1,2} = [1,1,0] \pm i[1,-1,0]$, $U_3 = [0,0,1]$, και η λύση μπορεί να εκφρασθεί ως

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{30} \end{pmatrix}.$$

Οι αναλλοίωτοι υποχώροι είναι οι

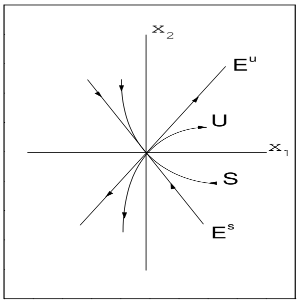
$$E^c = \mathrm{span}\left[(1,1,0),(1,-1,0)\right], \;\; E^s = \emptyset, E^u = [0,0,1].$$

8 Από το γραμμικοποιημένο στο μη γραμμικό σύστημα

Θα θεωρήσουμε το μη γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \tag{45}$$

και υποθέτουμε ότι υπάρχει σημείο ισορροπίας x_0, οπότε και $f(x_0) = 0$. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, μπορούμε πάντοτε να υποθέσουμε,



Σχήμα 7: Οι αναλλοίωτοι υποχώροι και οι αντίστοιχες ευσταθείς και ασταθείς τοπικές πολλαπλότητες

χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $x_0 = 0$. Θα ξεκινήσουμε από τη μελέτη του γραμμικοποιημένου συστήματος στο x_0, το

$$\dot{x} = Ax, \;\; A = Df(x_0), \tag{46}$$

όπου A είναι ένας $n \times n$ σταθερός πίνακας.

Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που οι ιδιοτιμές του πίνακα A έχουν όλες μη μηδενικό πραγματικό μέρος. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε μόνο ευσταθείς ή ασταθείς αναλλοίωτους υποχώρους E^s, E^u στο γραμμικό σύστημα. Θα μελετήσουμε πώς μετασχηματίζονται οι χώροι αυτοί όταν μεταβαίνουμε από το γραμμικό στο μη γραμμικό σύστημα.

Θα δόσουμε πρώτα μερικούς βασικούς ορισμούς:
Τοπική ευσταθής πολλαπλότητα S

$$S = \{x \in S/\phi_t(x) \to x_0 \text{ καθώς } t \to \infty \text{ και } \phi_t(x) \in S \text{ για } t \geq 0\}. \tag{47}$$

Τοπική ασταθής πολλαπλότητα U

$$U = \{x \in U/\phi_t(x) \to x_0 \text{ καθώς } t \to -\infty \text{ και } \phi_t(x) \in U \text{ για } t \leq 0\}. \tag{48}$$

Αποδεικνύεται ότι στο μη γραμμικό σύστημα, στην περιοχή του σημείου ισορροπίας x_0, υπάρχει μια ευσταθής πολλαπλότητα S και μια ασταθής πολλαπλότητα U οι οποίες εφάπτονται, στο x_0, στους χώρους E^s και E^u, αντίστοιχα, και έχουν τις ίδιες διαστάσεις όπως κα τα E^s, E^u. Αυτό απεικονίζεται σχηματικά στο σχήμα 7.

Τα προηγούμενα αναφέρονται στην τοπολογία του χώρου των φάσεων στην περιοχή του σημείου ισορροπίας και ορίσαμε την τοπική ευσταθή και ασταθή πολλαπλότητα. Θα εξετάσομε τώρα πώς επεκτείνονται οι έννοιες αυτές σε ολόκληρο το χώρο. Δίνομε τους παρακάτω ορισμούς:

Ευσταθής πολλαπλότητα (global stable manifold)

$$W^s = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(S). \tag{49}$$

Ασταθής πολλαπλότητα (global unstable manifold)

$$W^u = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(U). \tag{50}$$

Η W^s ευρίσκεται αν αφήσομε τα σημεία στην S να κινηθούν *πίσω* στο χρόνο και η W^u αν αφήσομε τα σημεία της U να κινηθούν *εμπρός* στο χρόνο.

Θα παρουσιάσομε τώρα τα βασικά σημεία της θεωρίας με ορισμένα παραδείγματα.

παράδειγμα 1

Θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^3 \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_1^2, \end{aligned}$$

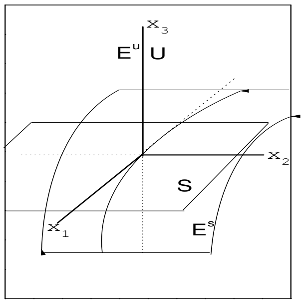
στο οποίο υπάρχει το σημείο ισορροπίας $x_0 = 0$. Το γραμμικοποιημένο σύστημα στην περιοχή του σημείου ισορροπίας είναι το

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_3, \end{aligned}$$

και η λύση του είναι η

$$x_1 = x_{10} e^{-t}, \;\; x_2 = x_{20} e^{-t}, \;\; x_3 = x_{30} e^{t}.$$

Από τη λύση αυτή προκύπτει ότι η ευσταθής πολλαπλότητα E^s είναι το επίπεδο x_1, x_2 και η ασταθής πολλαπλότητα E^u είναι ο άξονας x_3.



Σχήμα 8: Η σχέση μεταξύ των ευσταθών και ασταθών υποχώρων E^s, E^u και των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων S, U.

Η λύση του μη γραμμικού συστήματος είναι η

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10}e^{-t}, \\ x_2 &= x_{20}e^{-t} + x_{10}^2 \left(e^{-t} - e^{-2t}\right), \\ x_3 &= x_{30}e^{t} + \frac{x_{10}^2}{3} \left(e^{t} - e^{-2t}\right). \end{aligned}$$

Από τη λύση αυτή προκύπτει ότι η ευσταθής πολλαπλότητα E^s είναι η

$$S = \{x_0 \in R^3/ \ x_{30} = -\frac{1}{3}x_{10}^2\}$$

και η ασταθής πολλαπλότητα είναι η

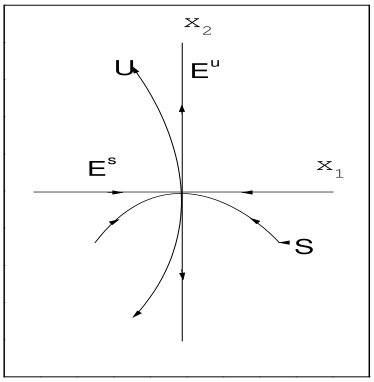
$$U = \{x_0 \in R^3/ \ x_{10} = x_{20} = 0\}.$$

Η λύση η οποία αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες της ευσταθούς πολλαπλότητας είναι η

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10}e^{-t}, \\ x_2 &= x_{20}e^{-t} + x_{10}^2 \left(e^{-t} - e^{-2t}\right), \\ x_3 &= -\frac{x_{10}^2}{3}\, e^{-2t}, \end{aligned}$$

και η λύση η οποία αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες της ασταθούς πολλαπλότητας είναι η

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_2 &= 0, \\ x_3 &= x_{30}\, e^{t}. \end{aligned}$$



Σχήμα 9: Οι χώροι S, U, E^s και E^u.

Οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες S, U προκύπτουν από τις λύσεις αυτές και παρουσιάζονται στο σχήμα 8, μαζί με τους ευσταθείς και ασταθείς υποχώρους E^s, E^u.

παράδειγμα 2

Θεωρούμε το μη γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= - \quad x_1 - x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= \quad x_2 + x_1^2, \end{aligned}$$

το οποίο έχει το σημείο ισορροπίας $x_0 = (0, 0)$. Το γραμμικό σύστημα στην περιοχή του σημείου ισορροπίας είναι το

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2,$$

και η λύση του είναι η

$$x_1 = x_{10} e^{-t}, \quad x_2 = x_{20} e^{t}.$$

Είναι φανερό ότι ότι οι αναλλοίωτοι υποχώροι E^s και E^u είναι οι άξονες x_1 και x_2, αντίστοιχα.

Για να βρούμε την ευσταθή τοπική πολλαπλότητα, ευρίσκουμε τη λύση του μη γραμμικού συστήματος προσεγγιστικά για μικρά x: Ξεκινούμε από ένα σημείο $x_{10} = \alpha_1, \quad x_{20} = 0, \quad \alpha_1 \ll 1$, του ευσταθούς αναλλοίωτου υποχώρου E^s, πολύ κοντά στην αρχή, και η λύση σε γραμμική προσέγγιση είναι η

$$x_1 = \alpha_1 e^{-t}, \quad x_2 = 0.$$

Η επόμενη προσέγγιση είναι η

$$x_1 = \alpha_1 e^{-t} + O(\alpha_1^4), \ \ x_2 = -\frac{1}{3}\alpha_1^2 e^{-2t} + O(\alpha_1^4),$$

οπότε η εξίσωση της καμπύλης που παριστάνει την ευσταθή πολλαπλότητα είναι η

$$S: \ x_2 = -\frac{x_1^2}{3} \ + \ O(x_1^5).$$

Ομοίως βρίσκεται και η ασταθής τοπική πολλαπλότητα

$$U: \ x_1 = -\frac{x_2^2}{3} \ + \ O(x_2^5).$$

Οι χώροι S, U, E^s και E^u για το σύστημα αυτό δίδονται στο σχήμα 9.

Για να βρούμε την προσσεγγιστική λύση εργαζόμαστε ως εξής: Γράφουμε το μη γραμμικό σύστημα υπό τη μορφή

$$\dot{x} = B\,x \ + \ G(x),$$

όπου

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -x_2^2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$$

και $G(x)$ είναι ο μή γραμμικός όρος. Ο θεμελιώδης πίνακας λύσεων $\Phi(t)$ του γραμμικού μέρους $\dot{x} = Bx$ είναι ο

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

και γράφεται υπό τη μορφή

$$\Phi(t) = U(t) + V(t),$$

όπου

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ + \ V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\dot{\Phi} = B\Phi, \;\; \dot{U} = BU, \;\;\; \dot{V} = BV.$$

Η λύση u του μη γραμμικού συστήματος πληροί την ολοκληρωτική εξίσωση

$$u = U(t) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t U(t-s)G(u(s))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u(s))ds,$$

και αντιστοιχεί στη λύση με αρχικές συνθήκες πολύ κοντά στις $x_{10} = \alpha_1$, $x_{20} = 0$, $\alpha_1 \ll 1$ (αποδείξτε το!).

Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης μπορεί να βρεθεί προσεγγιστικά, με διαδοχικές προσεγγίσεις ως εξής: Υποθέτουμε ότι η λύση γράφεται υπό μορφή σειράς, ως

$$U = u^0 \; + u^1 \; + u^2 \; + ...$$

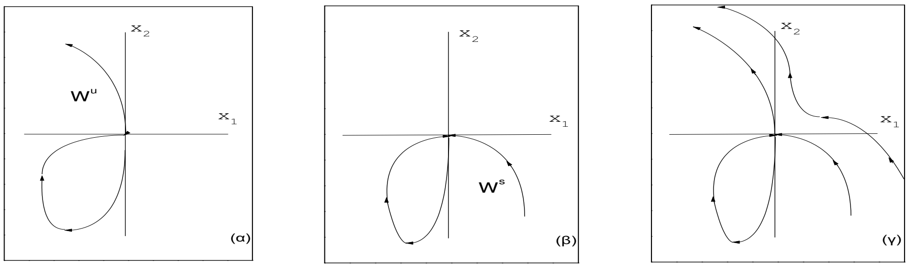
κατά τις δυνάμεις του α_1 και χρησιμοποιούμε τις αναδρομικές σχέσεις

$$u^{n+1} = U(t) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t U(t-s)G(u^n(s))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u^v(s))ds,$$

για $n = 0, 1, 2, ..$, ξεκινώντας από $u^0 = 0$.

Η ευσταθής και η ασταθής πολλαπλότητα W^s και W^u, αντίστοιχα, ευρίσκονται από την αριθμητική ολοκλήρωση του μη γραμμικού συστήματος και δίδονται στο σχήμα 10. Ως αρχικές συνθήκες για την ευσταθή πολλαπλότητα W^s θα πάρουμε ένα σημείο επάνω στον ευσταθή αναλλοίωτο υποχώρο E^s, πολύ κοντά στο σημείο ισορροπίας $x_0 = (0, 0)$ και θα ολοκληρώσουμε για $t \to -\infty$. Ομοίως, για την ασταθή πολλαπλότητα W^u θα πάρουμε ένα σημείο επάνω στον ασταθή αναλλοίωτο υποχώρο E^u και θα ολοκληρώσουμε για $t \to \infty$.

Από τη λύση του γραμμικού συστήματος και την προσεγγιστική λύση του μη γραμμικού συστήματος βρίκαμε τους αναλλοίωτους υποχώρους στην περιοχή του σημείου ισορροπίας, οι οποίοι δίδονται στο σχήμα 9. Παρατηρούμε ότι κατά τη μετάβαση από το μη γραμμικό στο γραμμικό σύστημα, έχουμε διατήρηση του ευσταθούς και του ασταθούς υποχώρου.



Σχήμα 10: (α) Η ευσταθής πολλαπλότητα W^s, (β) η ασταθής πολλαπλότητα W^u, (γ) Ο χώρος των φάσεων, όπου η ευσταθής και η ασταθής πολλαπλότητα τέμνονται στο ομοκλινικό σημείο 0.

Αυτή η ιδιότητα, που είδαμε σε αυτό το συγκεκριμένο παράδειγμα, ισχύει γενικά, για υπερβολικά σημεία ισορροπίας, όπως προκύπτει από το επόμενο θεώρημα (το οποίο παρουσιάζουμε χωρίς απόδειξη):

Θεώρημα ευσταθούς πολλαπλότητας

Θεωρούμε το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = f(x),\ x \in R^n$, το οποίο έχει το σημείο ισορροπίας $x_0 = 0,\ \ (f(0) = 0)$. Δίδονται τα εξής:
- E ανοικτό υποσύνολο του R^n που περιέχει το 0.
- $f \in C^1(E)$.
- ϕ_t η ροή του δυναμικού συστήματος.
- Υποθέτουμε ότι ο πίνακας $Df(0)$ του γραμμικού συστήματος έχει k ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος και $n-k$ ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος.

Τότε υπάρχει μια k-dim διαφορίσιμη πολλαπλότητα S, εφαπτόμενη στον ευσταθή υποχώρο E^s στο σημείο 0, έτσι ώστε για κάθε $t \geq 0$, είναι $\phi_t(S) \in S$, και για κάθε $x_0 \in S$ είναι

$$\lim_{t \to \infty} \phi_t(x_0) \ = \ 0.$$

Επίσης υπάρχει μια $(n-k)$-dim διαφορίσιμη πολλαπλότητα U, εφαπτόμενη στον ευσταθή υποχώρο E^u στο σημείο 0, έτσι ώστε για κάθε $t \leq 0$, είναι $\phi_t(U) \in U$, και για κάθε $x_0 \in U$ είναι

$$\lim_{t \to -\infty} \phi_t(x_0) \ = \ 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, *διατηρούνται ο ευσταθής και ο ασταθής υποχώρος στην περιοχή του σημείου ισορροπίας, αν ο* *πίνακας* $Df(x_0)$ *του γραμμικού συστήματος δεν έχει ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος.*

Τα προηγούμενα αναφέρονταν στο πώς μετασχηματίζεται ό ευσταθής και ο ασταθής υποχώρος, όταν μεταβαίνομε από το γραμμικό στο μη γραμμικό σύστημα. Θα εξετάσουμε τώρα πως μετασχηματίζεται το σύνολο των τροχιών, στην περιοχή του σημείου ισορροπίας, κατά τη μετάβαση από το γραμμικό στο μή γραμικό σύστημα. Θα δόσουμε πρώτα έναν ορισμό:

Ορισμός: Δύο αυτόνομα συστήματα διαφορικών εξισώσεων, π.χ. τα (1): $\dot{x} = f(x)$ και (2): $\dot{x} = Ax$, $x \in R^n$ είναι *τοπολογικά ισοδύναμα* στην περιοχή της αρχής 0 (δηλαδή έχουν την ίδια ποιοτική δομή) αν υπάρχει ομοιομορφισμός H, που απεικονίζει ένα ανοικτό σύνολο U που περιέχει την αρχή, σε ένα ανοικτό σύνολο V που περιέχει την αρχή, ο οποίος απεικονίζει τις τροχιές του (1) στο U σε τροχιές του (2) στο V και διατηρεί τον προσανατολισμό.

Αν επί πλέον ο H διατηρεί την παραμετροποίηση με το χρόνο, τότε τα δύο συστήματα λέγονται *τοπολογικά συζηγή*.

Ως παράδειγμα αναφέρουμε τα συστήματα

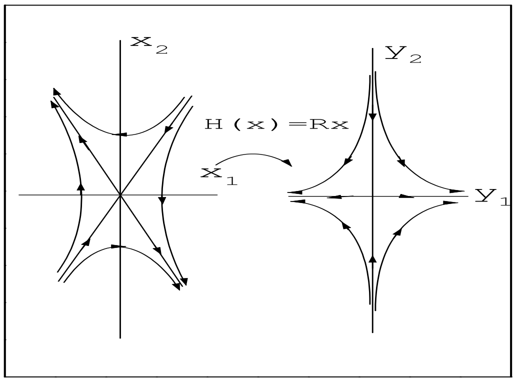
$$(1): \ \dot{x} = Ax, \ A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \ \text{και} \ (2): \ \dot{y} = By, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες A και B συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση $B = RAR^{-1}$,

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και επομένως ο μετασχηματισμός $y = Rx$ μετασχηματίζει το σύστημα (1) στο σύστημα (2). Άρα, τα δύο αυτά συστήματα είναι τοπολογικά ισοδύναμα, και ο μετασχηματισμός $y = Rx$ ματασχηματίζει το πορτρέτο φάσεως του ενός συστήματος στο πορτρέτο φάσεως του άλλου, όπως φαίνεται στο σχήμα 11.

Για το πώς μεταβάλλεται η τοπολογία του χώρου των φάσεων κατά τη μετάβαση από το γραμμικό στο μη γραμμικό σύστημα, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:



Σχήμα 11: Τα πορτρέτα φάσεως των συστημάτων (1) και (2)

Θεώρημα Hartman-Grobman

Δίδονται τα εξής:

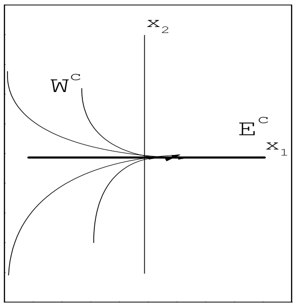
- E ανοικτό υποσύνολο του R^n που περιέχει την αρχή O.
- $f \in C^1(E)$.
- ϕ_t: η ροή του $\dot{x} = f(x)$.
- $f(0) = 0$, δηλαδή το σημείο 0 είναι σημείο ισορροπίας.
- $A = Df(0)$: η ορίζουσα του γραμμικού συστήματος στην περιοχή του σημείου ισορροπίας.
- Δεν υπάρχει ιδιοτιμή του A με μηδενικό πραγματικό μέρος.

Τότε υπάρχει ομοιομορφισμός H ενός ανοικτού συνόλου U που περιέχει την αρχή, σε ανοικτό σύνολο V που περιέχει την αρχή, έτσι ώστε για κάθε $x_0 \in U$ υπάρχει ανοικτό διάστημα $I_0 \in R$ που περιέχει την αρχή, ώστε γιά όλα τα $x_0 \in U$ και $t \in I_0$,

$$H \circ \phi_t(x_0) \; = \; e^{tA}\, H(x_0),$$

δηλαδή απεικονίζει τις τροχιές του $\dot{x} = f(x)$ στην περιοχή του 0 σε τροχιές του γραμμικού συστήματος $\dot{x} = Ax$ στην περιοχή του μηδενός, και διατηρεί την παραμετροποίηση.

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, *όταν δεν υπάρχουν ιδιοτιμές του γραμμικού συστήματος με μηδενικό πραγματικό μέρος, η τοπολογία του χώρου των φάσεων διατηρείται, κατά τη μετάβαση από το γραμμικό στο μη γραμμικό σύστημα, και συνεπώς διατηρείται και η ευστάθεια ή αστάθεια του σημείου ισορροπίας.*



Σχήμα 12: Η κεντρική πολλαπλότητα δεν ορίζεται μονοσήμαντα.

Όλα τα παραπάνω αναφέρονται στην περίπτωση που οι ιδιοτιμές του γραμμικού συστήματος έχουν πραγματικό μέρος μη μηδενικό. Το επόμενο θεώρημα καθορίζει το τι γίνεται στην περίπτωση ιδιοτιμών με μηδενικό πραγματικό μέρος.

Θεώρημα κεντρικής πολλαπλότητας

Υποθέτουμε ότι:
- E ανοικτό υποσύνολο του R^n που περιέχει την αρχή 0.
-$f \in C^r(E),\ r \geq 1$.
- ϕ_t: η ροή του $\dot{x} = f(x)$.
- $f(0) = 0$, δηλαδή το σημείο 0 είναι σημείο ισορροπίας.
- $A = Df(0)$: η ορίζουσα του γραμμικού συστήματος στην περιοχή του σημείου ισορροπίας.
- Ο πίνακας A έχει k ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος, j ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος και $m = n - j - k$ ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος.

Τότε υπάρχει μια m-dim *κεντρική πολλαλότητα* $W^c(0)$ τάξεως C^r, εφαπτόμενη στον κεντρικό υποχώρο E^c του $\dot{x} = Ax$ στο 0, η οποία παραμένει αναλλοίωτη στη ροή ϕ_t του $\dot{x} = f(x)$.

Παράδειγμα κεντρικής πολλαπλότητας

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2, \end{aligned}$$

το οποίο έχει το σημείο ισορροπίας $x_1 = 0, x_2 = 0$. Το γραμμικό σύστημα στην περιοχή του σημείου ισορροπίας είναι το

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= 0,\\ \dot{\xi}_2 &= -\xi_2,\end{aligned}$$

με ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ και ιδιοδιανύσματα τα $U_1 = [1, 0]$, $U_2 = [0, 1]$. Επομένως, ο άξονας x_2 είναι ο ευσταθής υποχώρος E^s και ο άξονας x_1 ο κεντρικός υποχώρος E^c.

Η λύση του μη γραμμικού συστήματος είναι η

$$x_1 = \frac{x_{10}}{1 - t x_{10}}, \quad x_2 = x_{20}\, e^{-t},$$

και με απαλειφή του t παίρνομε το πορτρέτο φάσεως

$$x_2 = x_{20}\, e^{-\frac{1}{x_{10}}}\, e^{\frac{1}{x_1}}.$$

Για $x_1 < 0$ οι καμπύλες προσεγγίζουν την αρχή 0 με παραγώγους που τείνουν στο 0. Η κεντρική πολλαπλότητα παρουσιάζεται στο σχήμα 12 και παρατηρούμε ότι δεν ορίζεται μονοσήμαντα.

9 Ευστάθεια υπερβολικών σημείων ισορροπίας

Με βάση όλα τα προηγούμενα μπορούμε τώρα να συνοψίσουμε τα συμπεράσματα για την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας ενός μη γραμμικού συστήματος.

Ορισμός: Ένα σημείο x_0 είναι *ευσταθές* αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in N_\delta(x_0)$ και $t \geq 0$ να είναι

$$\phi_t(x) \in N_\epsilon(x_0).$$

Το x_0 είναι *ασταθές* αν δεν είναι ευσταθές.

Έστω x_0 σημείο ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R,$$

οπότε είναι $f(x_0) = 0$. Θεωρούμε τον πίνακα $A = Df(x_0)$ του γραμμικοποιημένου συστήματος στο σημείο ισορροπίας. Αν το σημείο ισορροπίας είναι υπερβολικό, δηλαδή καμία ιδιοτιμή του δεν είναι ίση προς μηδέν, τότε:

- Το σημείο ισορροπίας είναι *ασυμπτωτικά ευσταθές* αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A έχουν πραγματικό μέρος αρνητικό,
$$Re(\lambda_j) < 0, \quad j = 1, 2, ...n.$$
- Το σημείο ισορροπίας είναι *ασταθές* αν μία τουλάχιστον ιδιοτιμή λ του A έχει πραγματικό μέρος θετικό,
$$Re(\lambda) > 0.$$

Τα συμπεράσματα αυτά είναι συνέπεια του θεωρήματος της ευσταθούς πολλαπλότητας και του θεωρήματος Hartman-Grobman.

Αν το σημείο ισορροπίας x_0 ενός μη γραμμικού συστήματος είναι μη υπερβολικό, δηλαδή υπάρχει μία τουλάχιστον ιδιοτιμή του πίνακα A με πραγματικό μέρος ίσο προς μηδέν, τότε η ευστάθειά του μπορεί να μελετηθεί με τη μέθοδο του Liapunov.

10 Η μέθοδος του Liapunov

Με τη μέθοδο του Liapunov μπορούμε να μελετήσουμε την ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας ενός μη γραμμικού συστήματος. Η μέθοδος στηρίζεται στην εύρεση μιάς *συναρτήσεως Liapunov* $V(x)$, όπως θα δείξουμε στα επόμενα.

Έστω το μη γραμμικό σύστημα
$$\dot{x} = f(x), \quad x \in C^1(E)$$
και σημείο ισορροπίας x_0, $f(x_0) = 0$. Έστω ακόμα και μια συνάρτηση $V(x) \in C^1(E)$, $(V(x_1, x_2, ...x_n))$. Η μεταβολή της συνάρτησης $V(x)$ κατά μήκος μιας τροχιάς δίνεται από τη σχέση
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + ...\frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n,$$

ή συντομότερα,

$$\dot{V}(x) = DV(x)\, f(x).$$

Θα παρουσιάσουμε χωρίς απόδειξη το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα του Liapunov : Έστω E ανοικτό σύνολο του R^n που περιέχει το σημείο ισορροπίας x_0. Έστω ακόμα ότι υπάρχει συνάρτηση $V \in C^1(E)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$V(x_0) = 0 \;\; \text{και} \;\; V(x) > 0 \;\; \text{για} \;\; x \neq x_0.$$

Τότε

- αν $\dot{V}(x) \leq 0$ για κάθε $x \in E$, το x_0 είναι *ευσταθές*.
- αν $\dot{V}(x) < 0$ για κάθε $x \in E - \{x_0\}$, το x_0 είναι *ασυμπτωτικά ευσταθές*.
- αν $\dot{V}(x) > 0$ για κάθε $x \in E$, το x_0 είναι *ασταθές*.

Η συνάρτηση $V(x)$ με τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται *συνάρτηση Liapunov* .

Η συνάρτηση Liapunov δεν βρίσκεται, εν γένει, εύκολα. Αν υπάρχει πρώτο ολοκλήρωμα της κίνησης, είναι δυνατόν να έχει τις ιδιότητες της συνάρτησης Liapunov, όπως θα δούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2^3, \\ \dot{x}_2 &= \;\; x_1^3, \end{aligned}$$

το οποίο έχει το σημείο ισορροπίας $x_0 = (0,0)$. Η ορίζουσα του γραμμικοποιημένου συστήματος στο σημείο ισορροπίας είναι η

$$Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{51}$$

η οποία έχει δύο μηδενικές ιδιοτιμές, τις $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 0$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$V(x) = x_1^4 + x_2^4$$

είναι συνάρτηση Liapunov, διότι είναι

$$\dot{V}(x) = 4x_1^3\dot{x}_1 + 4x_2^3\dot{x}_2 = 4x_1^3(-x_2^3) + 4x_2^3(x_1^3) = 0$$

για κάθε τροχιά (παρατηρήσατε ότι η $V(x)$ είναι ένα ολοκλήρωμα του συστήματος). Σύμφωνα με το θεώρημα του Liapunov, το σημείο ισορροπίας $x_0 = (0,0,0)$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας, αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές. Πράγματι, οι λύσεις $\phi_t(x)$ είναι οι κλειστές καμπύλες $x_1^4 + x_2^4$.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_2 + x_2x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2, \end{aligned}$$

όπου η αρχή $x_0 = (0,0,0)$ είναι σημείο ισορροπίας. Η ορίζουσα του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι η

$$Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{52}$$

η οποία έχει τις ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2i. \tag{53}$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο ισορροπίας $x_0 = (0,0,0)$ είναι ένα μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας.

Για την εύρεση της συνάρτησης Liapunov παίρνουμε τη συνάρτηση

$$V(x) = c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2, \quad c_1, c_2, c_3 > 0$$

και ζητούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές c_1, c_2, c_3 ώστε να είναι $\dot{V}(x) > 0$, ή $\dot{V}(x) < 0$ στο E. Έχουμε

$$\frac{1}{2}\dot{V}(x) = (c_1 - c_2 + c_3)x_1x_2x_3 + (-2c_1 + c_2)x_1x_2.$$

Αν πάρουμε

$$c_2 = 2c_1, \;\; c_3 = c_2,$$

έχουμε

$$\dot{V}(x) = 0$$

και συνεπώς η συνάρτηση

$$V(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

είναι συνάρτηση Liapunov. Για τη συνάρτηση αυτή ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{array}{l} V(x) = 0 \ \text{ για } \ x = 0, \\ V(x) > 0 \ \text{ για } \ x \neq 0, \\ \dot{V}(x) = 0 \ \text{ για } \ x \in R^3. \end{array} \tag{54}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Liapunov η αρχή $(0,0,0)$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας. Παρατηρήστε ότι όλες οι τροχιές κείνται στο ελλειψοειδές

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2.$$

Παράδειγμα 3

Θεωρούμε τώρα το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_2 + x_2 x_3 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1 x_3 - x_2^3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - x_3^3. \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό έχει την αρχή $x_0 = (0,0,0)$ ως σημείο ισορροπίας και ο πίνακας A του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι ο πίνακας (52) του προηγούμενου παραδείγματος και συνεπώς και οι ιδιοτιμές του είναι οι (54). Το σημείο αυτό είναι ένα μη υπερβολικό σημείο3 ισορροπίας και ως συνάρτηση Liapunov δοκιμάζουμε την αντίστοιχη συνάρτηση του παραδείγματος 2,

$$V(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2.$$

Παρατηρούμε ότι είναι πράγματι συνάρτηση Liapunov, διότι ισχύει

$$V(x) > 0 \ \text{ και } \ \dot{V}(x) < 0 \ \text{ για } \ x \neq 0.$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή η αρχή είναι ένα *ασυμπτωτικά* ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Από τα παραδείγματα που παρουσιάσαμε φαίνεται καθαρά ότι όταν το σημείο ισορροπίας είναι μη υπερβολικό, δηλαδή έχει ιδιοτιμές μέ πραγματικό μέρος μηδέν, η μετάβαση από το γραμμικό στο μη γραμμικό σύστημα δεν είναι πάντοτε η ίδια. Αυτό σημαίνει ότι η τοπολογία του χώρου των φάσεων, στην περιοχή του σημείου ισορροπίας, μεταβάλλεται εν γένει, κατά τη μετάβαση από το γραμμικό στο μη γραμμικό σύστημα.

Αναφορές

[1] Guckenheimer, J. and Holmes, Ph., 1983: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag.

[2] Jordan, D.W. and Smith, P., 1987: *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford.

[3] Lichtenberg, A.J. and Lieberman, M.A., 1983: *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag.

[4] Μπούντη,Α. 1997: *Μη Γραμμικές Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Εκδόσεις Πνευματικού, Αθήνα.

[5] Perko, L., 1996: *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag.