ΓΕΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η Δ.Ε. (2ου βαθμού, γραμμική, μη ομογενής)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 36y = 72x + 5$$

έχει γενική λύση

$$y(x) = c_1 \cos(6x) + c_2 \sin(6x) + 2x + \frac{5}{36}$$

"Παράμετροι"

ή

"Σταθερές"

Η λύση εξαρτάται από 2 σταθερές

$\Updownarrow$

βαθμός Δ.Ε.

Πρόβλημα Cauchy ή Πρόβλημα αρχικών συνθηκών	Να βρεθεί η λύση, που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(0) = \frac{5}{36}$, $y'(0) = 8$

$$y(0) = c_1 + \frac{5}{36} \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y'(0) = 6c_2 + 2 \Rightarrow c_2 = 1$$

Αρχικές συνθήκες $\longleftrightarrow$ Σταθερές

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

$$F(x, y, y', y'') = 0 \rightsquigarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = y''(x) = f(x, y, y')}$$

κανονική μορφή
normal form

$f(x, y, P)$
Συνεχής συνάρτηση με συνεχείς α' μερικές παραγώγους σε ένα $D \subset \mathbb{R}^3$

"ΑΠΛΟΪΚΗ" ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ
(CAUCHY - EULER)

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h,\ \ldots,\ x_n = x_{n-1} + h,\ \ldots$$

$$\Delta x = x_n - x_{n-1} = h \leftarrow \text{βήμα, step}$$

λύση $\rightarrow y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots$

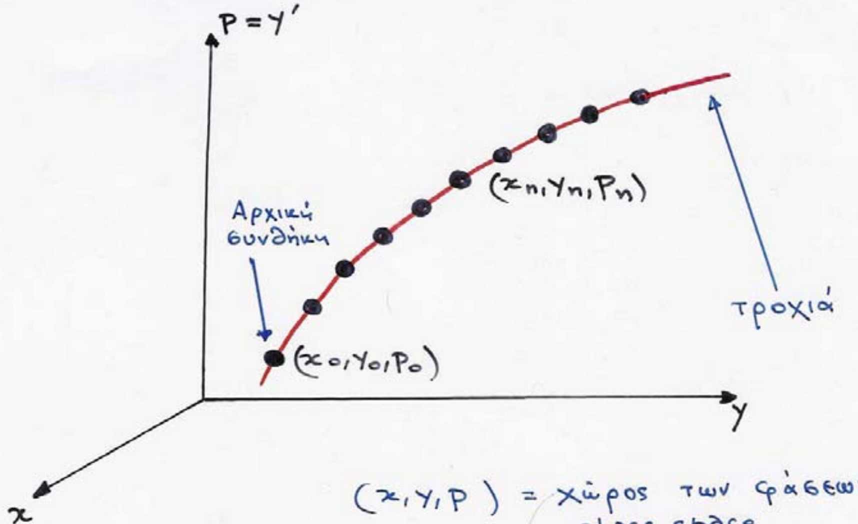
$$y'(x_n) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = P_n$$

$$y''(x_n) \approx \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}$$

$$\boxed{y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2 f(x_n, y_n, P_n) \qquad P_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}}$$

"Αναδρομική σχέση"

$\rightarrow$ ΓΙΑ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΛΥΣΗ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΞΕΡΟΥΜΕ τα $y_0 = y(x_0)$ $y'_0 = P_0 = y'(x_0)$



(x, y, P) = χώρος των φάσεων
phase space

$$y = y(x, c_1, c_2)$$

Παράμετροι Γενικής λύσης

$$y_0 = y(x_0, c_1, c_2)$$
$$y_0' = y'(x_0, c_1, c_2)$$

καθορισμός παραμέτρων από αρχικές συνθήκες

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ $2^{ης}$ ΤΑΞΗΣ

$$y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = f(x)$$

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ

$$y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = 0$$

ΟΜΟΓΕΝΗΣ

ΠΡΟΤΑΣΗ

$\psi = \psi(x, c_1, c_2)$ γενική λύση ομογενούς

$\varphi = \varphi(x)$ λύση <u>μη</u> ομογενούς

Γενική Λύση μη ομογενούς $y(x, c_1, c_2) = \varphi(x) + \psi(x, c_1, c_2)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις ομογενούς

$\psi = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$ Γενική λύση ομογενούς

δύο λύσεις $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ ομογενούς

$y = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ Γενική ομογενούς

$y = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \psi$ Γενική μή ομογενούς

λύση μή ομογενούς

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ !!! (ενώ υπάρχουν οι λύσεις!)

ΠΡΟΤΑΣΗ $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ λύσεις ομογενούς

$$y'' + \alpha(x)\,y' + \beta(x)\,y = 0$$

$$W(x) = W\{\varphi_1, \varphi_2\}(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$$

Wronskian ή Ορίζουσα Wronsky

$$W(x) = W(x_0)\exp\left[-\int_{x_0}^{x} \alpha(t)\,dt\right]$$

$\Rightarrow$ $W(x_0) = 0 \Rightarrow W(x) = 0 \quad \forall x \in I$

$W(x_0) \gtrless 0 \Rightarrow W(x) \gtrless 0$

$\Rightarrow$ $W(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi_1, \varphi_2$ γραμμικά εξαρτημένες

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν για κάποιο σημείο x_0, $W(x_0) = 0$ τότε

$$\varphi_1(x) = k\,\varphi_2(x) \quad \forall x \in I$$

δηλ. οι λύσεις φ_1 και φ_2 είναι γραμμικά εξαρτώμενες

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν για κάποιο σημείο x_0, $W(x_0) \neq 0$ τότε η φ_1 και φ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες

ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

σταθεροί συντελεστές

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$$

Ψάχνουμε δύο λύσεις της μορφής $y = c\exp[\varrho x]$

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$\varrho^2 + \alpha\varrho + \beta = 0$$

ϱ_1, ϱ_2 ρίζες της χαρακτηριστικής

(i) Αν $\varrho_1 \neq \varrho_2 \Rightarrow y = c_1\exp[\varrho_1 x] + c_2\exp[\varrho_2 x]$

(ii) Αν $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_0 \Rightarrow y = (c_1 + c_2 x)\exp[\varrho_0 x]$

διπλή ρίζα

Αν $\varrho_1 = \lambda + i\mu$, $\varrho_2 = \lambda - i\mu$

$$\cos(\mu x) = \frac{e^{i\mu x} + e^{-i\mu x}}{2}, \quad \sin(\mu x) = \frac{e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}}{2i}$$

$$y = d_1\exp[\lambda x]\cos(\mu x) + d_2\exp[\lambda x]\sin\mu x$$

Reduction of order

ΜΕΘΟΔΟΣ

ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΣ ΤΑΞΗΣ

Αν $\varphi(x)$ είναι μερική λύση της Δ.Ε.

$$y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = 0$$

Μιά άλλη λύση είναι

$$\psi(x) = \varphi(x)\int \frac{\exp\left[-\int \alpha(x)dx\right]}{\varphi^2(x)}\,dx$$

$$y = c_1\psi(x) + c_2\varphi(x)$$

ΚΥΡΙΑ ΙΔΕΑ!

$$\boxed{\psi(x) = C(x)\varphi(x)}$$

οπου $\varphi'' + \alpha(x)\varphi' + \beta(x)\varphi = 0$

Στην $\psi'' + \alpha(x)\psi' + \beta(x)\psi = 0$ αντικαθιστούμε

$$\psi(x) \rightarrow C(x)\varphi(x)$$

πράξεις

$$(C'(x))' + \left(2\frac{\varphi'}{\varphi} + \alpha\right)(C') = 0$$

$$c(x) = \int \frac{\exp\left[-\int \alpha(x)dx\right]}{\varphi^2(x)}\,dx$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ
METHOD OF UNDERMINATED COEFFICIENTS

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Εύρεση μερικής λύσης της Δ.Ε. $y'' + \alpha y' + \beta y = f(x)$

Π.Σ. συνάρτηση UC function		Π.Σ. σύνολο UC set
x^n	$\rightarrow$	$\{x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, 1\}$
$e^{\lambda x}$	$\rightarrow$	$\{e^{\lambda x}\}$
$\sin\mu x$ ή $\cos\mu x$	$\rightarrow$	$\{\sin\mu x, \cos\mu x\}$
"Γινόμενο"		"Γινόμενο" συνόλων

π.χ. $x^3e^{\lambda x}\cos\mu x \rightarrow \{x^3e^{\lambda x}\cos\mu x, x^3e^{\lambda x}\sin\mu x, x^2e^{\lambda x}\cos\mu x, x^2e^{\lambda x}\sin\mu x, xe^{\lambda x}\cos\mu x, xe^{\lambda x}\sin\mu x, e^{\lambda x}\cos\mu x, e^{\lambda x}\sin\mu x\}$

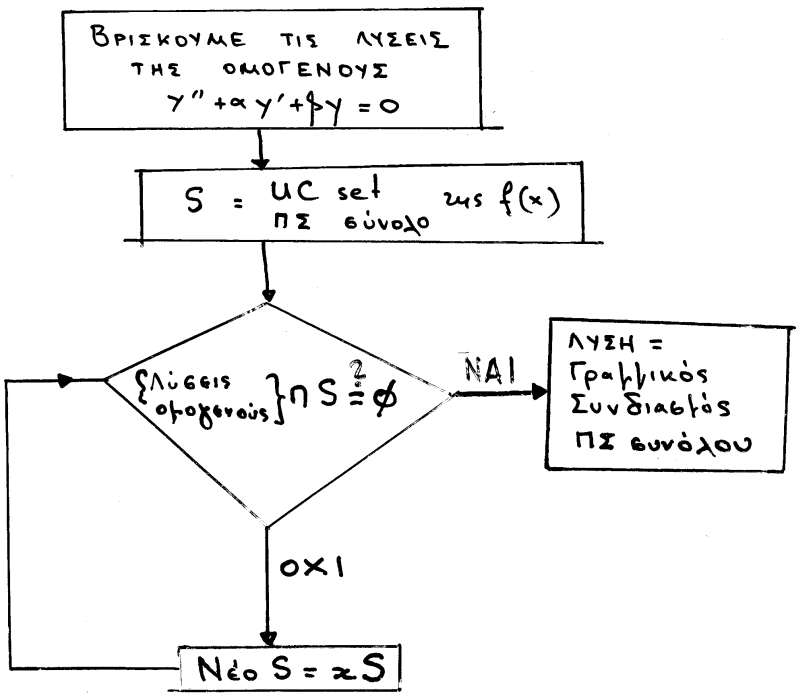
π.χ. $x^2e^{3x} \rightarrow \{x^2e^{3x}, x^2e^{3x}, xe^{3x}, e^{3x}\}$

π.χ. $e^{2x}\cos 5x \rightarrow \{e^{2x}\cos 5x, e^{2x}\sin 5x\}$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΛΥΣΗΣ

Εύρεση μερικής λύσης

$$y'' + \alpha y' + \beta y = \underbrace{f(x)}_{\text{u.c. function}}$$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Μερική λύση

$$y'' + \alpha y' + \beta y = \underbrace{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)}_{\text{Π.Σ. συναρτήσεις}}$$

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1'' + \alpha y_1' + \beta y_1 = f_1 \\ y_2'' + \alpha y_2' + \beta y_2 = f_2 \\ \vdots \\ y_n'' + \alpha y_n' + \beta y_n = f_3 \end{array}\right\} \text{n λύσεις n-προβλημάτων}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Εύρεση μερικής λύσης της Δ.Ε.

$$y'' + \alpha y' + \beta y = f(x)$$

1η μορφή: $f(x) = P(x)e^{\lambda x}$

Πολυώνυμο m-τάξης

μερική λύση $\psi = x^{\nu} Q(x) e^{\lambda x}$

αν $e^{\lambda x}$ <u>όχι</u> λύση ομογενούς $\nu = 0$

αν $e^{\lambda x}$ λύση ομογενούς $\nu =$ τάξη λύσης.

πολλαπλότητα ρίζας Χ.Ε.

2η μορφή: $f(x) = P_1(x)\cos\mu x\, e^{\lambda x} + P_2(x)\sin\mu x\, e^{\lambda x}$

m_1-τάξης πολυώνυμο

m_2 τάξης πολυώνυμο

μερική λύση $\psi = x^{\nu}\left(Q_1(x)\cos\mu x\, e^{\lambda x} + Q_2(x)\sin\mu x\, e^{\lambda x}\right)$

πολυώνυμα τάξης $\max\{m_1, m_2\}$

αν $e^{(\lambda+i\mu)x}$ <u>όχι</u> λύση ομογενούς $\nu = 0$

αν $e^{(\lambda+i\mu)x}$ λύση ομογενούς $\nu = 1$

ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

variation of parameters

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ λύσεις ομογενούς

$$\varphi'' + \alpha(x)\varphi' + \beta(x)\varphi = 0$$

Η λύση της Δ.Ε.

$$y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = f(x)$$

γράφεται

$$y = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)$$

με

$$\boxed{c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) = 0}$$

ΥΠΟΘΕΣΗ!

πράξεις

$$\boxed{c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) = f(x)}$$

ΛΥΝΟΥΜΕ ΩΣ ΠΡΟΣ $c_1'(x), c_2'(x)$

$$c_1'(x) = g_1(x)$$
$$c_2'(x) = g_2(x)$$

$$c_1(x) = \int g_1(x)\,dx + d_1$$
$$c_2(x) = \int g_2(x)\,dx + d_2$$

Δ.Ε. CAUCHY - EULER

$$(Ax+B)^2 y'' + \alpha (Ax+B) y' + \beta y = 0$$

$$Ax+B = e^t$$

Ειδ. μορφή Ι. $y'' = f(x)$

$$y = \int dx \left(\int dx\, f(x) \right) + c_1 x + c_2$$

Ειδ. μορφή ΙΙ. $F(x, y', y'') = 0$

$$z = y' \qquad z = z(x)$$

Ειδ. μορφή ΙΙΙ $F(y, y', y'') = 0$

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad p = p(y)$$

Ειδ. μορφή IV "Ομογενείς Δ.Ε"

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

$$F(x, \lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3) = \lambda^m F(x, u_1, u_2, u_3)$$

$$y(x) = \exp\left[\int z(x)\, dx \right]$$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. ΤΑΞΗΣ n

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \alpha_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \alpha_2(x) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} y + \cdots + \alpha_n(x) y = f(x)$$

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \alpha_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \alpha_2(x) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + \alpha_n(x) y = 0$$

ΟΜΟΓΕΝΗΣ

ΠΡΟΤΑΣΗ

$\psi = \psi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ γενική λύση ομογενούς

$\varphi = \varphi(x)$ λύση μη ομογενούς

ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ $\quad y = y(x, c_1, \dots, c_n) = \varphi(x) + \psi(x, c_1, \dots, c_n)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις ομογενούς

$$\psi = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \cdots + c_n \varphi_n(x)$$

Γενική λύση ομογενούς

Αρχικές συνθήκες : Πρόβλημα Dirichlet

Η Δ.Ε. $y^{(n)} + \alpha_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n(x) y = f(x)$ έχει μόνο μία λύση που ικανοποιεί των

Αρχικές συνθήκες

$$\left.\begin{aligned} y^{(n-1)}(x_0) &= \gamma_{n-1} \\ &\cdots \\ y'(x_0) &= \gamma_1 \\ y(x_0) &= \gamma_0 \end{aligned}\right\} \text{γνωστά}$$

ΟΡΙΖΟΥΣΑ WRONSKY ή WRONSKIAN

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_1' & \varphi_1'' & \cdots & \varphi_1^{(n-1)} \\ \varphi_2 & \varphi_2' & \varphi_2'' & \cdots & \varphi_2^{(n-1)} \\ & & \vdots & & \\ \varphi_n & \varphi_n' & \varphi_n'' & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ γραμμικά εξαρτώμενες

$$\Updownarrow$$

$$W = 0$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_1' & \varphi_1'' & \cdots & \varphi_1^{(n-2)} & \varphi_1^{(n)} \\ \varphi_2 & \varphi_2' & \varphi_2'' & \cdots & \varphi_2^{(n-2)} & \varphi_2^{(n)} \\ & & - & - & - & \\ \varphi_n & \varphi_n' & \varphi_n'' & \cdots & \varphi_n^{(n-2)} & \varphi_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ABEL-LIOUVILLE

Αν $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της

$$y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \alpha_2 y^{(n-2)} + \cdots + \alpha_n y = 0$$

$$W(x) = W(x_0) \exp\left[- \int_{x_0}^{x} \alpha_1(t)\, dt \right]$$

$$W(x_0) \gtrless 0 \iff W(x) \gtrless 0 \quad \forall x \in I$$

ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗ Δ.Ε. ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

σταθεροί συντελεστές

$$y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \alpha_2 y^{(n-2)} + \cdots + \alpha_n y = 0$$

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

$$P(\rho) = \rho^n + \alpha_1 \rho^{n-1} + \alpha_2 \rho^{n-2} + \cdots + \alpha_n = 0$$

πολυώνυμο τάξης n

$$= (\rho - \rho_1)^{k_1} (\rho - \rho_2)^{k_2} \cdots (\rho - \rho_\ell)^{k_\ell}$$

Ρίζα πολλαπλότητας k_1

(i) Αν ρ_i ρίζα απλή $(k_i = 1)$ $\quad y = \exp[\rho_i x]$

(ii) Αν ρ_i ρίζα πολλαπλότητας k_i

$$y = (c_1 + c_2 x + \cdots + c_{k_i} x^{k_i - 1}) \exp[\rho_i x]$$

Αν $\rho_i = \lambda + i\mu$

$$y = (d_1 + d_2 x + \cdots + d_{k_i} x^{k_i-1}) e^{\lambda x} \cos \mu x + (f_1 + f_2 x + \cdots + f_{k_i} x^{k_i-1}) e^{\lambda x} \sin \mu x$$

Δ.Ε. $y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_{n-1} y' + \alpha_n y = 0$

$$\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n + \alpha_1 \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} \frac{d}{dx} + \alpha_n\right) y = 0$$

Χ.Ε. $P(\rho) = \rho^n + \alpha_1 \rho^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} \rho + \alpha_n$

$$= (\rho - \rho_\ell)^{k_\ell} \cdots (\rho - \rho_2)^{k_2} (\rho - \rho_1)^{k_1}$$

Δ.Ε.

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) y = \left(\frac{d}{dx} - \rho_\ell\right)^{k_\ell} \cdots \left(\frac{d}{dx} - \rho_1\right)^{k_1} y$$

Λύση Δ.Ε. $P\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0$

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_\ell = \sum_i y_i$$

$$\left(\frac{d}{dx} - \rho_i\right)^{k_i} y_i = 0$$

OPERATOR CALCULUS

$$T = \frac{d}{dx} - \rho_i$$

$$Ty = 0 \Rightarrow y = c_1 \exp[\rho_i x]$$

$$T^2 y = 0 \Rightarrow y = (c_1 + c_2 x) \exp[\rho_i x]$$

$$\vdots$$

$$T^k y = 0 \Rightarrow y = (c_1 + c_2 x + \cdots c_{k-1} x^{k-1}) e^{\rho_i x}$$

Λήμμα: $T(x f(x)) = f(x) + x\, T(f(x))$

Πρόταση: Αν $T^{k-1} f = 0 \Rightarrow T^k(x f) = 0$

$$T^k(xf) = T^{k-1}(T(xf)) =$$

$$= T^{k-1}(f + xTf) = T^{k-1}f + T^{k-1}(xTf)$$

$$= T^{k-1}(xTf) = T^{k-2} \cdot T(xTf) =$$

$$= T^{k-2}(Tf + xT^2 f)$$

$$= T^{k-2} x T^2 f = \cdots\cdots x(T^{k-1} f) = 0$$