ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ "ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ"
Εκδοση 2004
διανομή: Χριστοδουλίδης
Μελενίκου 22

Σ. ΤΡΑΧΑΝΑΣ "ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ"
Παν/κές Εκδόσεις Κρήτης 1995

W. Boyce "Στοιχειώδεις διαφ. Εξ..."
Παν/κές Εκδόσεις ΕΜΠ.

C. C. Ross "Differential equations with Mathematica"
Springer

W. Walter "Ordinary Diff. equations"
Springer

→ Σειρά Schaum "ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΔΙΑΦ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ"
ΕΣΠΙ, ΑΘΗΝΑ
Για ασκήσεις όχι θεωρία

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ

ΠΟΛΥ ΚΑΛΕΣ!

http://www.millersv.edu/~bikenaga/diffeq/deqnote.html

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΣΥΝΗΘΕΙΣ Δ.Ε. (Ordinary Differential equations O.D.E.)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

Δίνεται μία "Δ.Ε"

Αλγεβρική Συνάρτηση

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

"ολοκλήρωμα"

ζητάμε να βρούμε μία λύση $y = y(x)$ που να την ικανοποιεί

O.D.E.

ομογενής

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3x\frac{d^2y}{dx^2} + 5y^2 = 0$$

τρίτου βαθμού

μη γραμμική

γραμμική

$$\underbrace{\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^2\frac{dy}{dx} + 6y}_{\text{γραμμική}} = 3\sin x$$

Δευτέρου βαθμού

μη ομογενής

ΓΕΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η Δ.Ε. (2ου βαθμού, γραμμική, μη ομογενής)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 36y = 72x + 5$$

έχει γενική λύση

$$y(x) = c_1 \cos(6x) + c_2 \sin(6x) + 2x + \frac{5}{36}$$

"Παράμετροι"

"Σταθερές"

Η λύση εξαρτάται από 2 σταθερές

$\Updownarrow$

βαθμός Δ.Ε.

Πρόβλημα Cauchy
"
Πρόβλημα αρχικών συνθηκών

Να βρεθεί η λύση, που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$y(0) = \frac{5}{36}$$

$$y'(0) = 8$$

$$y(0) = c_1 + \frac{5}{36} \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y'(0) = 6c_2 + 2 \Rightarrow c_2 = 1$$

Αρχικές συνθήκες $\longleftrightarrow$ Σταθερές

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

$$F(x, y, y') = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = f(x, y)}$$

κανονική μορφή

normal form

*"Απλοϊκή" ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ (CAUCHY-EULER)

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h,\ \dots,\ x_n = x_{n-1} + h$$

$$\Delta x = x_n - x_{n-1} \; (= h)$$ βήμα (step)

$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n$ ← λύση

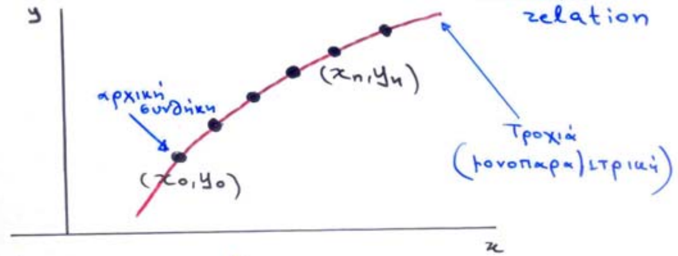
$$\Delta y = y_n - y_{n-1}$$

$$\text{Δ.Ε.} \Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \cong f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

$$\boxed{y_n \simeq y_{n-1} + h\, f(x_{n-1}, y_{n-1})}$$

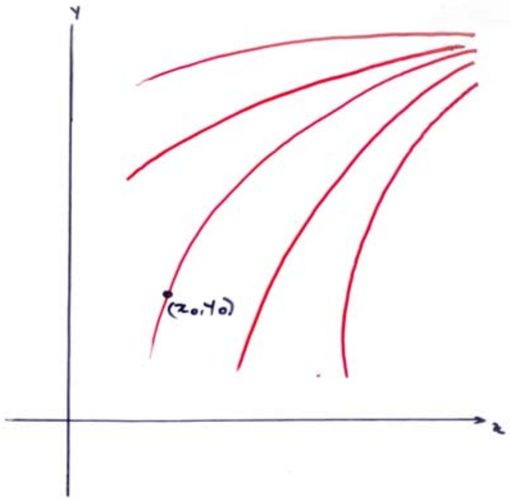
"Αναδρομική Σχέση"

Recurrence relation



(x, y) = χώρος των φάσεων

Τροχιές

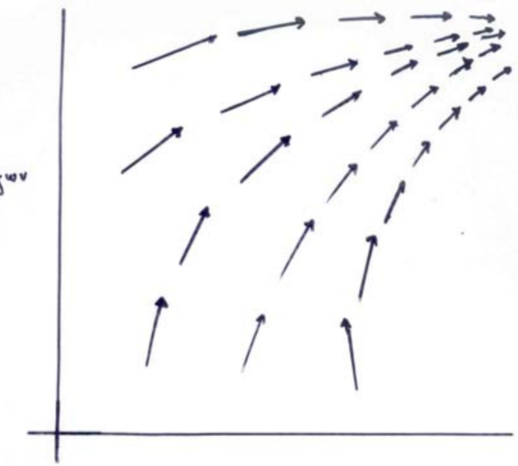


$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow y = y(x, c)$$

Οι λύσεις είναι "μονοπαραμετρικές τροχιές"

Πεδίο παραγώγων

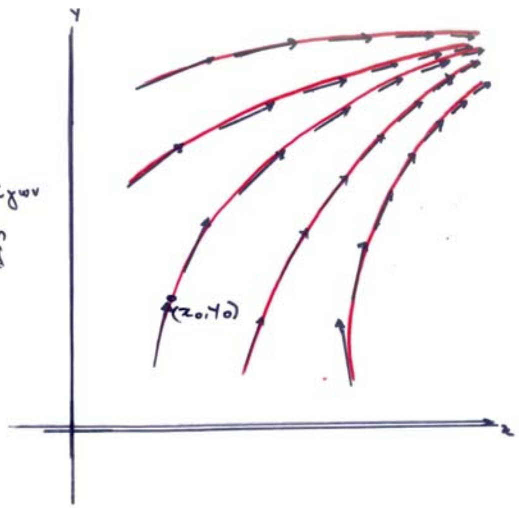
Derivation Field



Τροχιές

Πεδίο παραγώγων

Derivation Field



$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow y = y(x,c)$$

Οι λύσεις είναι "μονοπαραμετρικές τροχιές"

I. $\boxed{y' = f(x)} \rightarrow dy = f(x)\,dx$

$$y = \int f(x)\,dx + c$$

II $\boxed{y' = f(y)} \rightarrow \frac{dy}{f(y)} = dx$

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + c$$

III. Χωρισμός μεταβλητών

$$P(x,y)\,dy + Q(x,y)\,dx = 0$$

$$\Big\downarrow \text{ πράξεις}$$

$$f(y)\,dy + g(x)\,dx = 0$$

$$\Big\downarrow$$

$$\int f(y)\,dy + \int g(x)\,dx = c$$

IV. $\boxed{y' = f\left(\alpha x + \beta y + \gamma\right)}$

$$u = \boxed{u(x) = \alpha x + \beta y + \gamma}$$

$$\frac{du}{dx} = \alpha + \beta \frac{dy}{dx} = \alpha + \beta f(u)$$

χωρισμός μεταβλητών

$$\frac{du}{\alpha + \beta f(u)} = dx$$

$$\int \frac{du}{\alpha + \beta f(u)} = x + c$$

V. $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$

Ομογενείς διαφ. εξισώσεις.

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \quad \text{ή} \quad \boxed{y = x\,u(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = f(u)$$

χωρισμός μεταβλητών

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln x + c$$

$$x = D \exp\left[\int \frac{du}{f(u) - u}\right]$$

VI $\boxed{y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)}$

Περίπτωση Α

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a x_0 + b y_0 + c = 0 \\ \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0 \end{cases}$$

Το σύστημα έχει λύση (x_0, y_0)

$$\boxed{\begin{aligned} y &= y_0 + u \\ x &= x_0 + v \end{aligned}} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} ax+by+c &= av+bu \\ \alpha x+\beta y+\gamma &= \alpha v+\beta u \end{aligned}}$$

$dy = du$
$dx = dv$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{du}{dv} = f\left(\frac{a+b\,u/v}{\alpha+\beta\,u/v}\right) = F\left(\frac{u}{v}\right)}_{\text{βλ. V. Ομογενείς Δ.Ε.}}$$

Περίπτωση Β

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} a &= \lambda\alpha \\ b &= \lambda\beta \end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda(\alpha x+\beta y)+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right) = F(\alpha x+\beta y)}_{\text{βλ. IV.}}$$

Χωρισμός Μεταβλητών

$$f(y)\,dy + g(x)\,dx = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\int f(y)\,dy + \int g(x)\,dx = 0$$

$y' = f(\alpha x+\beta y+\gamma)$

$u = \alpha x+\beta y+\gamma$

$\dfrac{du}{dx} = \alpha + \beta f(y)$

$y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$y = x \cdot u(x)$

$\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx} = f(u)$

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$$

$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$

$y = y_0 + u$
$x = x_0 + v$

$\Downarrow$

$\dfrac{du}{dv} = f\left(\dfrac{a+b\,u/v}{\alpha+\beta\,u/v}\right)$

$a = \lambda\alpha$
$b = \lambda\beta$

$u = \alpha x+\beta y$

$\dfrac{du}{dx} = \alpha + \beta\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{\lambda u+c}{u+\gamma}\right) = F(u)$