ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

12 Ιουνίου 2008

Θέμα 1: Δίνεται η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x+1}, \qquad (x,y) \in [1,3] \times [1,3]$$

Να βρεθεί ένα διάστημα της μεταβλητής x, στο οποίο να προσδιορίζεται μονοσήμαντα η λύση της διαφορικής εξίσωσης με την μέθοδο Picard.

Θέμα 2: Δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση

$$y(x+y+1)dx + (x+2y)dy = 0$$

έχει ενα ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(x)$. Να βρεθεί η λύση, η οποία δι'ερχεται από το σημείο $(x,y) = (1,1)$

Θέμα 3: Να βρεθεί η λύση του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y + \mathrm{e}^{4t}$$

$$\frac{dy}{dt} = 5x + 2y$$

Θέμα 4: Να βρεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 6x\frac{dy}{dx} + y = \ln\, x, \qquad x > 0$$

Θέμα 5: Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha(x)\frac{dy}{dx} + \beta(x)y = 0,$$

με $\alpha(x)$ και $\beta(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $\phi_1(x)$ και $\phi_2(x)$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης και ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες:

$$\phi_1(0) = 3 \;\text{ και }\; \phi_1'(0) = 1$$

$$\phi_2(0) = -1 \;\text{ και }\; \phi_1'(0) = 4$$

Εκφράσατε την λύση $\phi(x)$ της διαφορικής εξίσωσης, που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$\phi(0) = \phi'(0) = 1$$

σαν συνάρτηση των λύσεων $\phi_1(x)$ και $\phi_2(x)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !