

## ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4 Σεπτεμβρίου 2006

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup> (2 β.)

Δίνεται το πρόβλημα αρχικής τιμής:

$$y' = y^2(1 + x^2), \quad y(0) = 1$$

Ποιές είναι οι προϋποθέσεις έτσι ώστε το παραπάνω πρόβλημα να έχει μοναδική λύση. Ποιά είναι η αναδρομική σχέση της ακολουθίας των συναρτήσεων  $y_n(x)$  με την μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων (μέθοδος Picard) που δίνει οριακά την λύση του προβλήματος αυτού; Να βρεθούν οι διαδοχικές προσεγγίσεις για  $n = 1, 2$  χωρίς να υπολογισθεί η ακριβής λύση της διαφορικής εξίσωσης.

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup> (2 β.)

Να βρεθεί η λύση ( $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ) του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - y + 30 \cos 2t \\ \frac{dy}{dt} &= x + 3y \end{aligned}$$

η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ .

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup> (1.5 β.)

Να βρεθούν οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y = xy' + (y')^3$$

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup> (1.5 β.)

Να βρεθεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους:

$$x(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + y(z - x) \frac{\partial z}{\partial y} = z(x - y)$$

που περιέχει την καμπύλη

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1$$

### ΘΕΜΑ 5<sup>ο</sup> (1.5 β.)

Αποδείξτε ότι διαφορική εξίσωση

$$(y + x(x^2 + y^2)) dx + (y(x^2 + y^2) - x) dy = 0$$

έχει ένα ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής  $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ . Να βρείτε την λύση της διαφορικής εξίσωσης που διέρχεται από το σημείο  $(x, y) = (1, 1)$

### ΘΕΜΑ 6<sup>ο</sup> (1.5 β.)

Να βρεθεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 4y = 2x$$

---

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !