Κλίση - gradient (∇= Nabla = ανάδελτα)

$$\nabla(f)(\overline{x}) = \text{ grad } f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Κατά διεύνθυνση $\overline{v}$ παράγωγος $\partial_{\overline{v}} f \equiv < \overline{v}, \nabla f >$

$$\boxed{\left.\frac{df(\overline{x}+t\overline{v})}{dt}\right|_{t=0} = < \overline{v}, \nabla f(\overline{x}) > \equiv \partial_{\overline{v}} f(\overline{x})}$$

Πρ. 6 Οταν $f(\overline{x})$ είναι διαφορίσιμη σε ένα ανοικτό, τότε υπάρχει η κατά οποιαδήποτε διεύθυνση παράγωγος

Αν $\| \overline{v} \| = 1$ τότε

$$\left\{ \text{Κατά διεύνθυνση } \overline{v} \text{ παράγωγος} \right\} \equiv$$
$$\left\{ \text{ρυθμός μεταβολής της } f(\overline{x}) \right\}$$

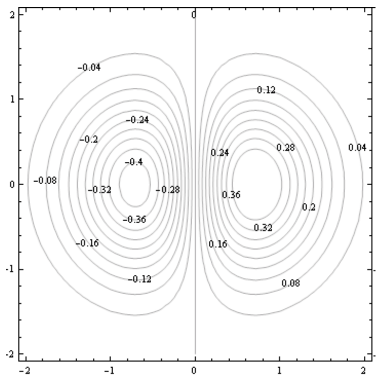
Πρ. 7 Αν η κλίση $\nabla f(\overline{x})$ είναι παράλληλη προς την κατεύθυνση που ο ρυθμός μεταβολής είναι μέγιστος.

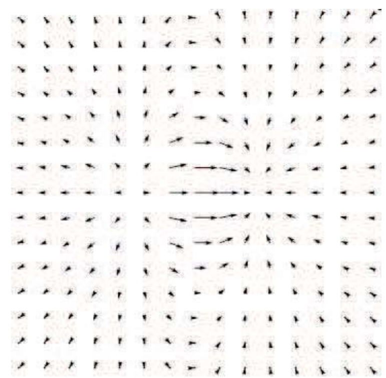
Διεύθυνση μέγιστης αλλαγής

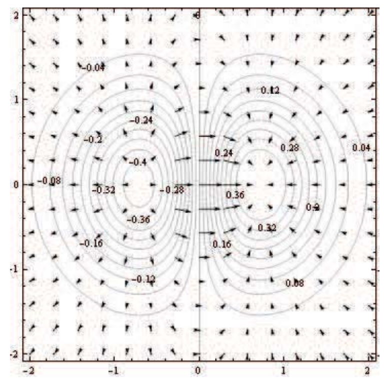
$\equiv$ μοναδιαίο διανυσμα στη κατεύθυνση της μέγιστης αλλαγής

$$\equiv \boxed{\overline{n} = \frac{\nabla f}{\| \nabla f \|}}$$

$$f(x,y) = x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$
$$\nabla f = \left(\left(1-2x^2\right)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)},\ -2xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\right)$$

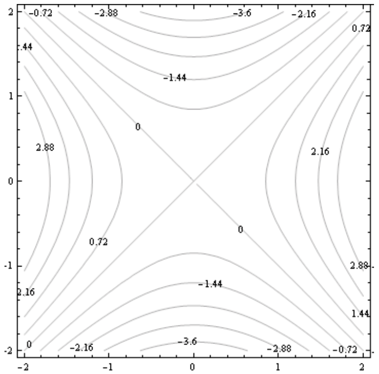


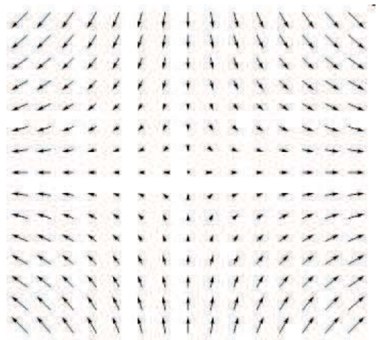


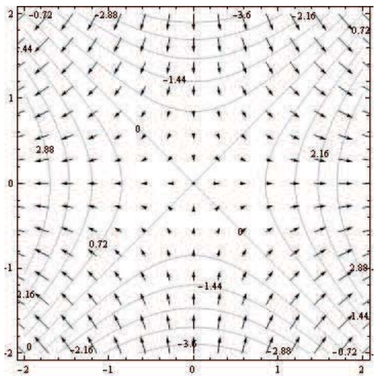


μεγαλύτερο $\| \nabla f \| \rightsquigarrow$ μεγαλύτερη αλλαγή της συνάρτησης

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$
$$\nabla f = (2x, -2y)$$







μεγαλύτερο $\| \nabla f \| \rightsquigarrow$ μεγαλύτερη αλλαγή της συνάρτησης

Πρ.8 Εστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. $\overline{x}_0$ ένα σημείο πάνω στην ισοϋψή (ή ισότιμη ή ισοσταθμική) επιφάνεια $f(\overline{x}) = c$. Τότε

(i) $\nabla f(\overline{x}_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια, δηλ. αν $\overline{v}$ εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα τόξο $\overline{x}(t)$ πάνω στην επιφάνεια, μέ $\overline{x}(0) = \overline{x}_0$ και $\overline{v} = \dot{\overline{x}}(0)$, τότε $\langle \overline{v}, \nabla f(\overline{x}_0) \rangle = 0$

(ii) Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου σ-το σημείο $\overline{x}_0$ δίνεται από την εξίσωση:

$$\langle \overline{x} - \overline{x}_0, \nabla f(\overline{x}_0) \rangle = 0$$

Εφαπτόμενο επίπεδο στη σφαίρα
$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 3$
στο σημείο $(1,1,1)$ είναι το $x + y + z = 3$