ΑΛΛΑΓΕΣ ΣΥΝΕΤΑΓΜΕΝΩΝ (Νόμος Αλυσίδας)

$$\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \xrightarrow{\phi} (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{l} x' = x(u',v') \\ y' = y(u',v') \end{array}$$

Η απεικόνιση $\boxed{\phi \text{ είναι συνεχής}}$

$$\forall \zeta > 0\ \exists \Delta(\zeta)\ :\ \sqrt{(u'-u)^2 + (v'-v)^2} < \Delta(\zeta) \ \rightsquigarrow$$
$$\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} < \zeta$$

και επομένως οι συναρτήσεις $\boxed{x(u,v) \text{ και } y(u,v) \text{ είναι συνεχείς}}$
Η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι συνεχής

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon)\ :\ \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} < \delta(\epsilon) \ \rightsquigarrow$$
$$|f(x',y') - f(x,y)| < \epsilon$$

τότε η συνάρτηση
$\boxed{(f \circ \phi)(u,v) = f(x(u,v),\, y(u,v)) \text{ είναι συνεχής}}$ Αποδ. θέτουμε $\zeta = \delta(\epsilon)$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists H(\epsilon) = \Delta(\delta(\epsilon))\ :\ \sqrt{(u'-u)^2 + (v'-v)^2} < H(\epsilon) \ \rightsquigarrow$$
$$\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} < \delta(\epsilon) \ \rightsquigarrow$$
$$|f(x',y') - f(x,y)| < \epsilon$$

Πρ. $\boxed{\begin{array}{l} f(x,y) \text{ είναι } C^1,\ x(u,v),\ y(u,v) \text{ είναι } C^1 \\ \Rightarrow \\ \text{η } (f\circ\phi)(u,v) = f(x(u,v),y(u,v)) \text{ είναι } C^1 \\ \text{ως προς τις μεταβλητές } (u,v) \end{array}}$

$$\begin{aligned} df &= f_x dx + f_y dy \\ dx &= x_u du + x_v dv \\ dy &= y_u du + y_v dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df &= (f_x x_u + f_y y_u) du + (f_x x_v + f_y y_v)\, dv \\ &= f_u du + f_v dv \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_u &= \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ f_v &= \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}}$$

$$(f_u, f_v) = (f_x, f_y) \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$