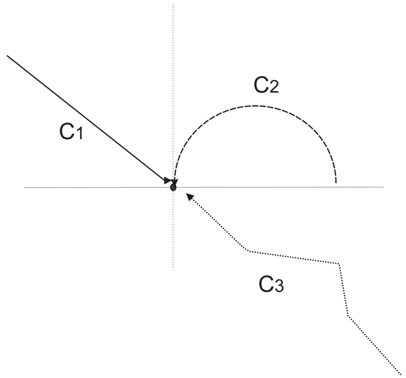
Ορισμός: $\boxed{\text{συνεχές τόξο (arc)}}$ - τροχιά

$$\mathbb{R} \supset [a, b] \ni t \xrightarrow[\text{επί}]{1:1} \overline{x}(t) = (x_1(t), x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

$x_i(t),\ i = 1, 2, \dots, n$ συνεχείς συναρτήσεις, π.χ




$$c_1 : \overline{x}(t) = (x(t), y(t)) = (1 - t, 1 - t)\,, \quad t \in [0, 1]$$

$$c_2 : \overline{x}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)\,, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \supset A \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι της μορφής:

$$u = f(\overline{x}) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

αν έχουμε ένα τόξο, τότε

$$u = u(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

πχ $u = f(x, y) = \frac{x\,y}{x^2 + y^2}$

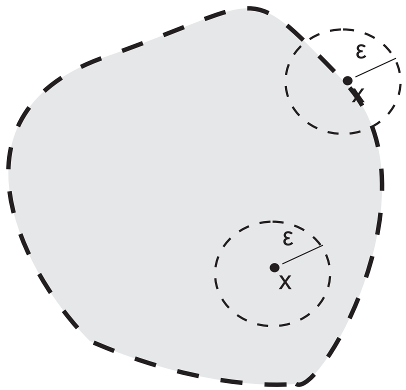
στο τόξο $c_2$ θα έχουμε $u = u(t) = \cos t \sin t$

$A$ ένα ανοικτό σύνολο.

$\overline{x}_0$ είναι **σημείο συσσώρευσης** του $A$ αν συμβαίνει ένα από τα ακόλουθα

1. Είτε $\overline{x}_0 \in A$

2. Είτε $\overline{x}_0 \notin A$, αλλά $\forall \epsilon > 0 \rightsquigarrow B(\overline{x}_0, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$




**Παράγωγος** $A'$ ονομάζουμε το $A$ και τα σημεία συσσώρευσης του.

## Όριο συνάρτησης

Θεωρούμε μια συναρτήση $f(\overline{x})$ με πεδίο ορισμού το ανοικτό σύνολο $A$ και $\overline{x}_0 \in A'$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\left\{\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = L\right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\forall\,\epsilon > 0,\ \exists\,\delta(\epsilon) > 0\ : \\ \overline{x} \in A,\ \|\ \overline{x} - \overline{x}_0\ \| < \delta(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |f(\overline{x}) - L| < \epsilon\end{array}\right\}\end{array}}$$

πχ

$$f(\overline{x}) = f(x,y) = \frac{x^4}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \rightsquigarrow\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Πεδίο ορισμού της $f(x,y)$ είναι το σύνολο $A = \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$
Απόδειξη:

---

Σημείωση:

$$|f(x,y) - 0| = \frac{x^4}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{(x^2+y^2)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 < \delta^3 = \epsilon$$

$$\rightsquigarrow\ \delta = (\epsilon)^{\frac{1}{3}}$$

---

$$\begin{array}{r}\forall\,\epsilon > 0,\ \exists\,\delta(\epsilon) = \epsilon > 0\ : \\ \overline{x} \in A,\ \|\ \overline{x} - (0,0)\ \| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \\ \rightsquigarrow\ |f(\overline{x}) - 0| < \epsilon\end{array}$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = L \\ \overline{x}(t), \text{συνεχές τόξο} \\ t \in [a,\,b]\,,\ \lim_{t\to b} \overline{x}(t) = \overline{x}_0 \\ \overline{x}(t) \in \text{πεδίο ορισμού}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\lim_{t\to b} f(\overline{x}(t)) = L\right\}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{c}\lim_{t\to b} f(\overline{x}(t))\ \ \textbf{δεν}\ \text{υπάρχει} \\ \overline{x}(t), \text{συνεχές τόξο} \\ t \in (a,\,b)\,,\ \lim_{t\to b} \overline{x}(t) = \overline{x}_0 \\ \overline{x}(t) \in \text{πεδίο ορισμού}\end{array}\right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(x,y)\ \textbf{δεν}\ \text{υπάρχει}\right\}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) &= \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \\ &= \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)\end{aligned}}$$

Απόδειξη

$$\left\{\lim_{t\to b}\overline{x}(t)=\overline{x}_0\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c}\forall\,\zeta>0\;\exists\,\Delta(\zeta)\;:\\ |t-b|<\Delta(\zeta)\;\rightsquigarrow\;\|\,\overline{x}(t)-\overline{x}_0\,\|<\zeta\end{array}\right\}$$

$$\left\{\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0}f(\overline{x})=L\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\forall\,\epsilon>0,\;\exists\,\delta(\epsilon)>0\;:\\ \overline{x}\in A,\;\|\,\overline{x}-\overline{x}_0\,\|<\delta(\epsilon)\;\rightsquigarrow\;|f(\overline{x})-L|<\epsilon\end{array}\right\}$$

$$\zeta=\delta(\epsilon)$$

$$\left\{\begin{array}{r}\forall\,\epsilon>0,\;\exists\,Z(\epsilon)=\Delta(\delta(\epsilon))\;:\\ |t-b|<Z(\epsilon)\rightsquigarrow\|\,\overline{x}(t)-\overline{x}_0\,\|<\delta(\epsilon)\rightsquigarrow|f(\overline{x})-L|<\epsilon\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left\{\lim_{t\to b}f(\overline{x}(t))=L\right\}$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0}f(\overline{x})=L\\ \{\overline{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}\,,\\ \overline{x}_k\in A,\;\overline{x}_0\in A'\\ \lim\limits_{k\to\infty}\overline{x}_k=\overline{x}_0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\lim_{k\to\infty}f(\overline{x}_k)=L\right\}}$$

Απόδειξη

$$\left\{\lim_{k\to\infty}\overline{x}_k=\overline{x}_0\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c}\forall\,\zeta>0\;\exists\,N(\zeta)\;:\\ k>N(\zeta)\;\rightsquigarrow\;\|\,\overline{x}_k-\overline{x}_0\,\|<\zeta\end{array}\right\}$$

$$\left\{\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0}f(\overline{x})=L\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\forall\,\epsilon>0,\;\exists\,\delta(\epsilon)>0\;:\\ \overline{x}\in A,\;\|\,\overline{x}-\overline{x}_0\,\|<\delta(\epsilon)\;\rightsquigarrow\;|f(\overline{x})-L|<\epsilon\end{array}\right\}$$

$$\zeta=\delta(\epsilon)$$

$$\left\{\begin{array}{r}\forall\,\epsilon>0,\;\exists\,M(\epsilon)=N(\delta(\epsilon))\;:\\ k>M(\epsilon)\rightsquigarrow\|\,\overline{x}_k-\overline{x}_0\,\|<\delta(\epsilon)\rightsquigarrow|f(\overline{x}_k)-L|<\epsilon\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left\{\lim_{t\to k}f(\overline{x}_k)=L\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{k\to\infty} f(\overline{x}_k) \ \ \textbf{δεν υπάρχει} \\ \lim\limits_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}_0 \\ \overline{x}_k \in A,\ \overline{x}_0 \in A' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(x,y) \ \textbf{δεν}\ \text{υπάρχει} \right\}$$

## Συνέχεια συνάρτησης σε ένα σημείο

$$\left\{\begin{array}{l} A \text{ ανοικτό σύνολο,} \\ \text{πεδίο ορισμού της } f(\overline{x}) \\ \overline{x}_0 \in A \\ f(\overline{x}) \text{ συνεχής στο } \overline{x}_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta(\epsilon, \overline{x}_0) > 0\ : \\ \overline{x} \in A, \\ \| \overline{x} - \overline{x}_0 \| < \delta(\epsilon, \overline{x}_0) \ \rightsquigarrow\ |f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0)| < \epsilon \end{array}\right\}$$

συνεχής συνάρτησης στο ανοικτό σύνολο $A \Leftrightarrow$
η συνάρτηση είναι συνεχής
για κάθε σημείο στο $A$

πχ. η $f(x,y) = x^2 + y^2$ είναι συνεχής για κάθε σημείο στο $\mathbb{R}^2$

$$\left\{\begin{array}{c} f(\overline{x}) \ \ \text{συνεχής στο ανοικτό } A \\ \overline{x}(t), \text{συνεχές τόξο}, t \in [a,b] \\ \overline{x}(t) \in A \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ f(\overline{x}(t)) \ \ \text{συνεχής συνάρτηση στο } \in [a,b] \}$$

## Ομοιόμορφη συνέχεια συνάρτησης σε ένα σύνολο

$$\left\{\begin{array}{l} A \text{ ανοικτό σύνολο,} \\ \text{πεδίο ορισμού της } f(\overline{x}) \\ f(\overline{x}) \text{ ομοιόμορφα συνεχής στο } A \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta(\epsilon) > 0\ :\ \overline{x} \text{ και } \overline{x}_0 \in A, \\ \| \overline{x} - \overline{x}_0 \| < \delta(\epsilon) \rightsquigarrow |f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0)| < \epsilon \end{array}\right\}$$

πχ. η $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής για κάθε $(x,y)$ τέτοιο ώστε $\sqrt{x^2+y^2} > 2$

$$\left\{\begin{array}{l} A \text{ ανοικτό σύνολο,} \\ \text{πεδίο ορισμού της } f(\overline{x}) \\ \text{όχι ομοιόμορφα συνεχής} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \exists\, \epsilon > 0,\ \forall\, \delta > 0\ :\ \overline{x} \text{ και } \overline{x}_0 \in A, \\ \| \overline{x} - \overline{x}_0 \| < \delta \rightsquigarrow |f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0)| \geq \epsilon \end{array}\right\}$$

πχ. η $f(x,y) = x^2+y^2$ είναι απλά συνεχής για κάθε σημείο στο $\mathbb{R}^2$, αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής

$$\left\{\begin{array}{c} \{f(\overline{x}) \text{ απλά συνεχής στο } A\} \\ \left\{\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0,\ \overline{x}_0 \in A,\ \exists \delta(\epsilon, \overline{x}_0)\ : \\ \| \overline{x} - \overline{x}_0 \| < \delta(\epsilon, \overline{x}_0) \rightsquigarrow \| f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) \| < \epsilon \end{array}\right\} \\ \inf\limits_{\overline{x}_0} \delta(\epsilon, \overline{x}_0) = \Delta(\epsilon) \neq 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ f(\overline{x}) \text{ ομοιόμορφα συνεχής} \right\}$$

πχ Η $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ για $x > 1,\ y > 1$ είναι ομοιόμορφα συνεχής

$$\left\{\begin{array}{c} f(\overline{x}) \text{ συνεχής στο } A, \\ g(t) \text{ συνεχής για } t \in f(A) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{g \circ f \text{ συνεχής στο } A\}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \supset A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g\circ f"'] & f(A) \subset \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} f(\overline{x}) \text{ συνεχής στο } A, \\ g(t) \text{ συνεχής για } t \in f(A) \end{array}\right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \{g \circ f \text{ συνεχής στο } A\}}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \supset A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g\circ f"'] & f(A) \subset \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

πχ. η $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$ Απόδειξη

για ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις:

$$\left\{\lim_{t\to t_0} g(t) = g(t_0)\right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta(\epsilon) : \\ |t - t_0| < \delta(\epsilon) \rightsquigarrow |g(t) - g(t_0)| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\left\{\lim_{\overline{x}\to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = f(\overline{x}_0)\right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0, \, \exists \delta(\epsilon) > 0 : \overline{x} \text{ και } \overline{x}_0 \in A, \\ \| \overline{x} - \overline{x}_0 \| < \delta(\epsilon) \rightsquigarrow |f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0)| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\{f(\overline{x}) \text{ συνεχής στο συμπαγές } C\} \Rightarrow \\ f(C) \text{ συμπαγές σύνολο}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\{f(\overline{x})\ \text{ συνεχής στο συμπαγές } C\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \exists\, \overline{x}_M \in C \, : \, f(\overline{x}_M) = \max\limits_{x\in C} f(\overline{x}) \\ \exists\, \overline{x}_m \in C \, : \, f(\overline{x}_m) = \min\limits_{x\in C} f(\overline{x}) \end{array} \right\}\end{array}}$$

$\boxed{\text{Υπόθεση}}$: Εστω ότι $f(C)$ δεν έχει ανω φράγμα $\rightsquigarrow$ Υπάρχει ακολουθία $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $f(C)$ τέτοια ώστε $\boxed{y_k = f(\overline{x}_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty}$

$C$ συμπαγές άρα υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\overline{x}_{\ell_k}$ της ακολουθίας $\overline{x}_k$. Εστω $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{x}_{\ell_k} = \overline{x}_0 \rightsquigarrow$

Επειδή $f(\overline{x})$ συνεχής θα έχουμε $\boxed{y_{\ell_k} = f(\overline{x}_{\ell_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(\overline{x}_0)}$ $\rightsquigarrow$ ΑΤΟΠΟ Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το $C$ έχει και κάτω φράγμα.

$\exists \sup f(C) \rightsquigarrow$

$\forall\, k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \exists\, y_k = f(\overline{x}_k) \in f(C) \, : \, \sup f(C) - \frac{1}{k} < y_k \leq \sup f(C)$

$\lim\limits_{k\to\infty} f(\overline{x}_k) = \sup f(C) \rightsquigarrow \exists\, \overline{x}_{\ell_k}$ υπακολουθία της $\overline{x}_k$ που συγκλίνει, $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{x}_{\ell_k} = \overline{x}_M \in C$

συνέχεια της $f(\overline{x})$ και $C$ κλειστό $\rightsquigarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(\overline{x}_{\ell_k}) = f(\overline{x}_M) =$

$\sup f(C) \in f(C)$

$\exists\, \overline{x}_M \in C \, : \, f(\overline{x}_M) = \max\limits_{x\in C} f(\overline{x})$

$$\boxed{\begin{array}{r}\{f(\overline{x})\ \text{ συνεχής στο συμπαγές } C\} \Rightarrow \\ f(C) \text{ συμπαγές σύνολο}\end{array}}$$

Θεώρημα των ακραίων τιμών για συμπαγή σύνολα

$$\boxed{\begin{array}{l}\{f(\overline{x}) \text{ συνεχής στο συμπαγές } C\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \exists\, \overline{x}_M \in C \,:\, f(\overline{x}_M) = \max\limits_{x\in C} f(\overline{x}) \\ \exists\, \overline{x}_m \in C \,:\, f(\overline{x}_m) = \min\limits_{x\in C} f(\overline{x}) \end{array} \right\}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{r}\{f(\overline{x}) \text{ συνεχής στο συμπαγές } C\} \Rightarrow \\ \{f(\overline{x}) \text{ ομοιόμορφα συνεχής}\}\end{array}}$$

Σύνολο συνεκτικό κατά τόξα $\leftrightsquigarrow$

$$\left\{ \begin{array}{c} \overline{x}_1,\, \overline{x}_2 \,\in\, A \\ \exists \text{ τόξο } \overline{x}(t) \in A,\ t \in [t_1, t_2] \\ \overline{x}(t_1) = \overline{x}_1,\ \overline{x}(t_2) = \overline{x}_2 \end{array} \right\}$$

Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

$$\boxed{\begin{array}{l} f(\overline{x}) \text{ συνεχής στο } A, \\ A \text{ συνεκτικό κατά τόξα} \Rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{c} \overline{x}_1,\, \overline{x}_2 \,\in\, A \\ f(\overline{x}_1) < f(\overline{x}_2) \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \exists\, \overline{x} \in A \;: \\ f(\overline{x}_1) < f(\overline{x}) < f(\overline{x}_2) \end{array} \right\} \end{array}}$$