Λογισμός ΙΙΙ
Διαφορικός Λογισμός πολλών μεταβλητών

Βιβλιογραφία

Ν. Δανίκας - Μ. Μαριάς
Μαθήματα Διαφορικού Λογισμού σε πολλές μεταβλητές
εκδ. ΖΗΤΗ 2003

J. Mardsen - A. Tromba
Διανυσματικός Λογισμός
Παν. Εκδ. Κρήτης 2000

M. Spivak
Λογισμός σε Πολλαπλότητες
Παν. Εκδ. Κρήτης 1994

R. Courant - F. John
Introduction to Calculus and Analysis II/1
Springer 2000

Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n \ni \overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \overline{z} = \alpha\,\overline{x} + \beta\,\overline{y} \ \rightsquigarrow \ z_i = \alpha x_i + \beta y_i$$
$$\overline{0} \equiv (0, 0, \ldots, 0)$$

Εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n$$

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

(i) (θετικότητα)
$\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle \geq 0$, $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle = 0 \ \rightsquigarrow \ \overline{x} = \overline{0}$

(ii) (συμμετρικότητα)
$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \langle \overline{y}, \overline{x} \rangle$

(iii) (διγραμμικότητα)
$\langle \overline{z}, \alpha\,\overline{x} + \beta\,\overline{y} \rangle = \alpha\ \langle \overline{z}, \overline{x} \rangle + \beta\ \langle \overline{z}, \overline{y} \rangle$
$\langle \alpha\,\overline{x} + \beta\,\overline{y}, \overline{z} \rangle = \alpha\ \langle \overline{x}, \overline{z} \rangle + \beta\ \langle \overline{y}, \overline{z} \rangle$

(iv) (Μη εκφυλισμός)
Αν $\forall\,\overline{y}$, $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = 0 \ \rightsquigarrow \ \overline{x} = \overline{0}$

norm $\| \overline{x} \| \equiv \sqrt{\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$

Θεώρημα Cauchy-Schwartz

$$| \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle | \leq \| \overline{x} \| \cdot \| \overline{y} \|$$

$$| \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle | = \| \overline{x} \| \cdot \| \overline{y} \| \Leftrightarrow \overline{x} = \alpha \, \overline{y}$$

Ιδιότητες norm

(i) (θετικότητα)
$\| \overline{x} \| \geq 0$ και $\| \overline{x} \| = 0 \rightsquigarrow \overline{x} = \overline{0}$

(ii) $\| \alpha \overline{x} \| = |\alpha| \, \| \overline{x} \|$

(iii) (τριγωνική ιδιότητα)
$\| \overline{x} + \overline{y} \| \leq \| \overline{x} \| + \| \overline{y} \|$

Ασκήσεις

$$\| \overline{x} - \overline{y} \|^2 + \| \overline{x} + \overline{y} \|^2 = 2 \left(\| \overline{x} \|^2 + \| \overline{y} \|^2 \right)$$

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \frac{1}{4} \left(\| \overline{x} + \overline{y} \|^2 - \| \overline{x} - \overline{y} \|^2 \right)$$

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = 0 \rightsquigarrow \| \overline{x} + \overline{y} \|^2 = \| \overline{x} \|^2 + \| \overline{y} \|^2$$

$$\| \overline{x} + \overline{y} \| \leq \| \overline{x} \| + \| \overline{y} \|$$

Απόσταση $d(\overline{x},\, \overline{y}) \equiv \parallel \overline{x} - \overline{y} \parallel$

Ιδιότητες απόστασης

(i) (θετικότητα)
$d(\overline{x},\, \overline{y}) \geq 0$ και $d(\overline{x},\, \overline{y}) = 0 \;\rightsquigarrow\; \overline{x} = \overline{y}$

(ii) (συμμετρικότητα)
$d(\overline{x},\, \overline{y}) = d(\overline{y},\, \overline{x})$

(iii) (τριγωνική ιδιότητα)
$d(\overline{x},\, \overline{z}) \leq d(\overline{x},\, \overline{y}) + d(\overline{y},\, \overline{z})$

Αλλες αποστάσεις

$$d_1\,(\overline{x},\, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d\,(\overline{x},\, \overline{y}) \leq d_1\,(\overline{x},\, \overline{y})\,, \quad d_1\,(\overline{x},\, \overline{y}) \leq n\, d\,(\overline{x},\, \overline{y})$$

$$d_\infty\,(\overline{x},\, \overline{y}) = \max\{|x_i - y_i|,\, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

$$d\,(\overline{x},\, \overline{y}) \leq \sqrt{n}\, d_\infty\,(\overline{x},\, \overline{y})\,, \quad d_\infty\,(\overline{x},\, \overline{y}) \leq d\,(\overline{x},\, \overline{y})$$

$$d_p\,(\overline{x},\, \overline{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

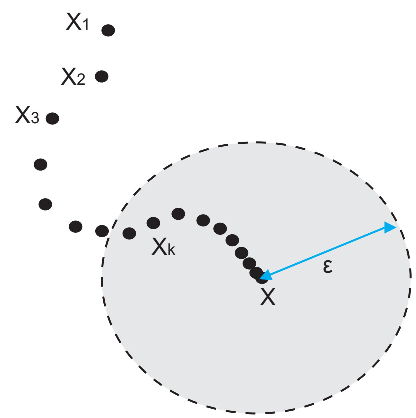
Σύγκλιση ακολουθιών στο $\mathbb{R}^n$

Ορισμός συγκλίνουσας ακολουθίας $\{\overline{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

$$\boxed{\left\{ \lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0,\; \exists\, N(\epsilon) > 0\; : \\ k > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; d(\overline{x}_k,\, \overline{x}) = \parallel \overline{x}_k - \overline{x} \parallel < \epsilon \end{array} \right\}}$$

Ανοικτή περιοχή, μπάλα ή σφαίρα
$B(\overline{x}, r) \equiv \{\overline{y} \in \mathbb{R}\; :\; d(\overline{x}, \overline{y}) < r\}$

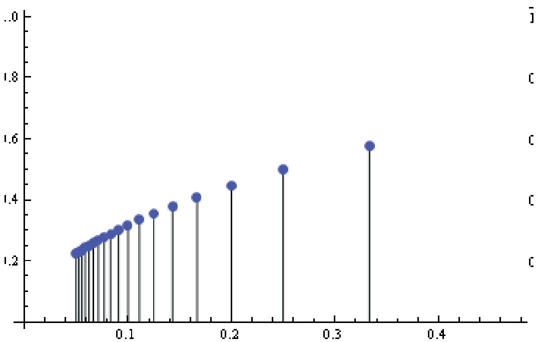
$$\boxed{\left\{ \lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0,\; \exists\, N(\epsilon) > 0\; : \\ k > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; \overline{x}_k \in B(\overline{x}, \epsilon) \end{array} \right\}}$$



$\overline{x}_k = (x_{ki})_{i=1,2,\ldots,n} = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}),$
$\overline{x} = (x_i)_{i=1,2,\ldots,n} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Πρότ. $\boxed{\left\{ \lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} i = 1,\, 2 \ldots, n \\ \lim_{k\to\infty} x_{ki} = x_i \end{array} \right\}}$

Σύγκλιση διανυσμάτων $\leftrightsquigarrow$ Σύγκλιση συνιστωσών των διανυσμάτων



$$\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x} \quad \rightsquigarrow \lim_{k\to\infty} \| \overline{x}_k \| = \| \overline{x} \|$$
$$\rightsquigarrow \lim_{k\to\infty} \| \overline{x}_k - \overline{x} \| = 0$$

$$\left. \begin{array}{r} \lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}, \\ \lim_{k\to\infty} \overline{y}_k = \overline{y} \end{array} \right\} \quad \rightsquigarrow \lim_{k\to\infty} \alpha\overline{x}_k + \beta\overline{y}_k = \alpha\overline{x} + \beta\overline{y}$$
$$\rightsquigarrow \lim_{k\to\infty} \langle \overline{x}_k, \overline{y}_k \rangle = \langle \overline{x}_k, \overline{y}_k \rangle$$

Αποδ: $\boxed{\left\{\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} i = 1, 2 \ldots, n \\ \lim_{k\to\infty} x_{ki} = x_i \end{array}\right\}}$

Ορισμός συγκλίνουσας ακολουθίας $\{\overline{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

$$\boxed{\left\{\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}\right\}} \Leftrightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ : \\ k > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow \parallel \overline{x}_k - \overline{x} \parallel < \epsilon \end{array}\right\}$$

$$|x_{ki} - x_i| \leq \parallel \overline{x}_k - \overline{x} \parallel = \sqrt{\sum_{\ell=1}^{n} |x_{k\ell} - x_\ell|^2} \rightsquigarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ : \\ k > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |x_{ki} - x_i| < \epsilon \end{array}\right\} \rightsquigarrow \boxed{\lim_{k\to\infty} x_{ki} = x_i}$$

Αποδ: $\boxed{\left\{\begin{array}{c} i = 1, 2 \ldots, n \\ \lim_{k\to\infty} x_{ki} = x_i \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}\right\}}$

$$\left\{\lim_{k\to\infty} x_{ki} = x_i\right\} \leftrightsquigarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ : \\ k > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |x_{ki} - x_i| < \epsilon \end{array}\right\}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{ki} = x_i \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0,\ \exists\, N_i(\epsilon) > 0\ : \\ k > N_i(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |x_{ki} - x_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \end{array}\right\}$$

$$k > \max\{N_1(\epsilon),\, N_2(\epsilon),\, \ldots,\, N_n(\epsilon)\} \rightsquigarrow$$
$$\parallel \overline{x}_k - \overline{x} \parallel^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_{ki} - x_i|^2 < n\frac{\epsilon^2}{n}$$

Ορισμός ακολουθίας Cauchy $\{\overline{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0 : \\ k > \ell > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow \parallel \overline{x}_k - \overline{x}_\ell \parallel < \epsilon \end{array} \right\}$$

Προτ.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Η ακολουθία } \{\overline{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \\ \text{είναι ακολουθία Cauchy} \end{array} \right\} \leftrightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Για } i = 1, 2, \ldots, n \\ \text{οι ακολουθίες } \{x_{ki}\}_{k\in\mathbb{N}} \\ \text{είναι ακολουθίες Cauchy} \end{array} \right\}$$

Θεώρημα Πληρότητας του $\mathbb{R}^n$

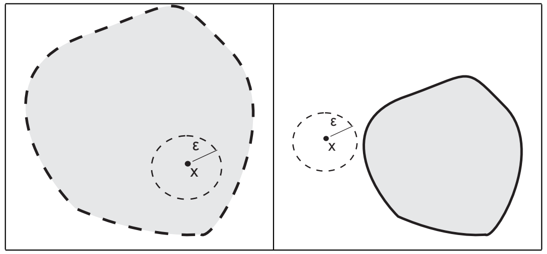
Η ακολουθία $\{\overline{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$
Η ακολουθία είναι Cauchy

Ανοικτή περιοχή, μπάλα ή σφαίρα
$B(\overline{x}, r) \equiv \{\overline{y} \in \mathbb{R} :\ d(\overline{x}, \overline{y}) < r\}$

Κλειστή περιοχή, μπάλα ή σφαίρα
$\overline{B}(\overline{x}, r) \equiv \{\overline{y} \in \mathbb{R} :\ d(\overline{x}, \overline{y}) \leq r\}$

Ορισμός

Ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n \leftrightsquigarrow$
$\{\forall\, \overline{x} \in A,\ \exists\, \epsilon(\overline{x}) >) :\ B(\overline{x}, \epsilon(\overline{x})) \subset A\}$



Ορισμός

Κλειστό σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n \leftrightsquigarrow$
το συμπλήρωμα K^C ανοικτό σύνολο

Πρόταση

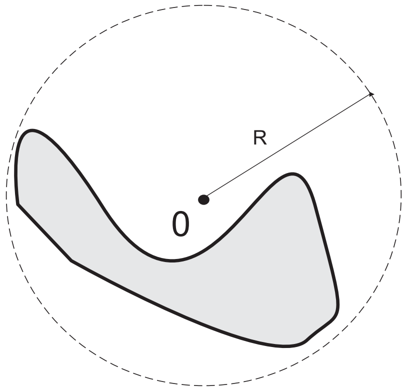
Αν τα μέλη της ακολουθίας $\overline{x}_k$ ανήκουν στο κλειστό K και υπάρχει το όριο $\overline{x} = \lim_{k\to\infty} \overline{x}_k$ τότε $\overline{x} \in K$

Ορισμός

Φραγμένο σύνολο $F \subset \mathbb{R}^n \leftrightsquigarrow$
$\exists\, R > 0 \,:\, F \subset B\left(\overline{0}, R\right)$

Ορισμός

Συμπαγές σύνολο $C \subset \mathbb{R}^n \leftrightsquigarrow$
C είναι κλειστό και φραγμένο



Σημείωση: C συμπαγές και $\overline{x} \in C \rightsquigarrow$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ θα έχουμε $|x_i| < R$

Πρόταση

Αν τα μέλη της ακολουθίας $\overline{x}_k$ ανήκουν στο συμπαγές $C \rightsquigarrow$ υπάρχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\overline{x}_{k_\ell}$

Απόδειξη: $\overline{x}_k = (x_{ki})_{i=1,2,\ldots,n} = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$
$\rightsquigarrow$ η ακολουθία είναι $\{x_{k1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ φραγμένη
$\rightsquigarrow$ υπάρχει μια υπακολουθία $x_{k_1 1}$ που συγκίνει $\lim\limits_{k_1\to\infty} x_{k_1 1} = y_1$
$\rightsquigarrow$ Η $\overline{x}_{k_1}$ είναι μια υπακολουθία της $\overline{x}_k$, και η πρώτες συνιστώσες των $\overline{x}_{k_1}$ συγκλίνουν. $\rightsquigarrow$ διαλέγουμε μια υπακολουθία $\overline{x}_{k_2}$ της ακολουθίας $\overline{x}_{k_1}$ έστσι ώστε οι δεύτερες συνιστώσες της $\overline{x}_{k_2}$ να συγκλίνουν σε ένα αριθμό y_2. (Οι πρώτες συνιστώσες συγκλίνουν στο y_1). Μετά διαλέγουμε μια υπακολουθία $\overline{x}_{k_3}$ της $\overline{x}_{k_2}$ που οι τρείς πρώτες συνιστώσες συγκλίνουν. Συνεχίζουμε έτσι και για τις n συνιστώσες οπότε καταλήγουμε σε μια υπακολουθία $\overline{x}_{k_n}$ της οποίας και οι n συνιστώσες συγκλίνουν. Οπότε η υπακολουθία $\overline{x}_{k_n}$ συγκλίνει