ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

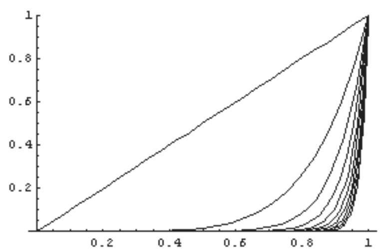
$\{f_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα $I = [a,\, b]$ (ή $(a,\, b]$ ή $[a,\, b)$ ή $(a,\, b)$)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ακολουθία συναστήσεων συγκλίνει σημειακά (point-wise convergence) στην συνάρτηση $f(x)$ αν

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \epsilon\ \ \exists N(\epsilon,\, x)\ :\ n > N(\epsilon,\, x)\ \ \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Παράδειγμα : $f_n(x) = x^n$, $|x| < 1$ τότε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$

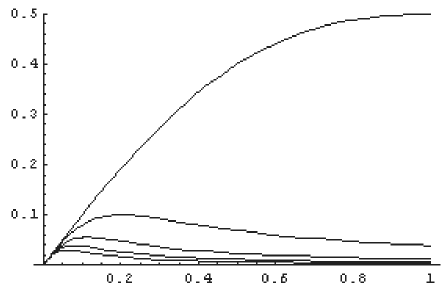


ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ακολουθία συναστήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα (uniform convergence) στην συνάρτηση $f(x)$ αν

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \text{ομοιόμορφα}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \epsilon\ \ \forall x \in I\ \ \exists N(\epsilon)\ :\ n > N(\epsilon)$$
$$\rightsquigarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Παράδειγμα : $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2 x^2}$, $0 \leq x \leq 1$ τότε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$



Η ακολουθία συναστήσεων **δεν** συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x)$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \epsilon \;\; \exists x_n \in I \;\; : \; \forall n \;\; \rightsquigarrow \;\; |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$$

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και $x_n \to x_0$ τότε αν $f_n(x_n)$ **δεν** συγκλίνει $\Rightarrow$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ **δεν** συγκλίνει ομοιόμορφα

Παράδειγμα : Οι συναρτήσεις $f_n(x) = nx(1-x)^n$ ενώ συγκλίνουν σημειακά στο μηδέν για $x \in [0,\, 1]$, **δεν** συγκλίνουν ομοιόμορφα.

Πρόταση 1

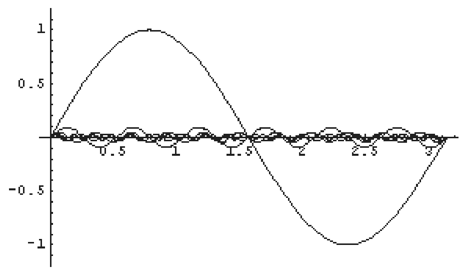
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

$$\Updownarrow$$

$$M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Παράδειγμα : Για κάθε x

$$f_n(x) = \frac{\sin(n\,x + x)}{n} \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$



Πρόταση 2 (Κριτήριο Cauchy):

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, \epsilon \;\; \forall\, x \in I \;\; \exists\, N(\epsilon) \; : \; n > m > N(\epsilon)$$

$$\rightsquigarrow \; |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Πρόταση 3:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

$f_n(x)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχείς στο ανοικτό διάστημα $(a,\, b)$

$$\Downarrow$$

$f(x)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(a,\, b)$

Τα σύμβολα $\lim\limits_{x\to x_0}$ και $\lim\limits_{n\to\infty}$ εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλινουν ομοιόμορφα:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

Πρόταση 4:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

και $f_n(x)$ συνεχείς συναρτήσεις για $x \in [a,\, b]$

$$\Downarrow$$

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ομοιόμορφα

Τα σύμβολα lim και $\int$ εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλινουν ομοιόμορφα:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,dt\right) = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)\,dt}$$

Παράδειγμα : Για κάθε $x \in [0,\, 1]$ η ακολουθία $f_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx^2}$ συγκλίνει σημειακά στο 0 αλλά **δεν** συγκλίνει ομοιόμορφα.

Συμπέρασμα:

$f_n(x)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο διάστημα $(a,\, b)$

$f_n(x)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x)$

$f_n'(x)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{df_n(x)}{dx} = f'(x) = \frac{d\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)}{dx}}$$

Τα σύμβολα lim και $\dfrac{d}{dx}$ εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλινουν ομοιόμορφα.