ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Εστω $\{f_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα $I = [a,\, b]$ (ή $(a,\, b]$ ή $[a,\, b)$ ή $(a,\, b)$)

ΟΡΙΣΜΟΣ

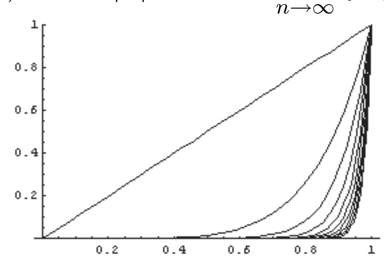
Η ακολουθία συναστήσεων συγκλίνει σημειακά (point-wise convergence) στην συνάρτηση $f(x)$ αν

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, \epsilon\ \ \exists\, N\,(\epsilon,\, x)\ :\ n > N\,(\epsilon,\, x)\ \leadsto\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Παράδειγμα 1: $f_n(x) = x^n$, $|x| < 1$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$



Παρατηρούμε ότι:

$$|x|^n < \epsilon\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\epsilon} < \frac{1}{|x|^n}\ \Leftrightarrow\ \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) < n \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\ \Leftrightarrow\ N\,(\epsilon,\, x) = \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)} < n$$

Οπότε

$$\forall\, \epsilon\ \ \exists\, N\,(\epsilon,\, x) = \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)}\ :\ n > N\,(\epsilon,\, x)\ \leadsto\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Σημείωση: $\sup\limits_{x\in I} N\,(\epsilon,\, x) = \infty$

ΟΡΙΣΜΟΣ

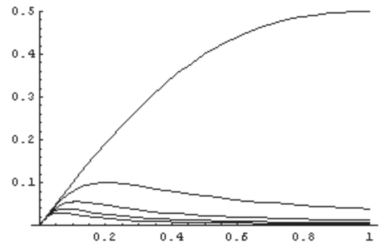
Η ακολουθία συναστήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα (uniform congergence) στην συνάρτηση $f(x)$ αν

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \text{ομοιόμορφα}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, \epsilon\ \ \forall\, x \in I\ \ \exists\, N\,(\epsilon)\ :\ n > N\,(\epsilon)\ \leadsto\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Παράδειγμα 2: $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2 x^2}$, $0 \le x \le 0$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$



Παρατηρούμε ότι:

$$f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \rightsquigarrow f_n'\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \rightsquigarrow \max_{x\in I} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}$$

$$\rightsquigarrow N(\epsilon,\, x) = N(\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon}$$

$$\forall\, \epsilon \ \ \exists\, N(\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon} \ :\ n > N(\epsilon,\, x) \rightsquigarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Από τον παραπάνω ορισμό έπεται ότι

Η ακολουθία συναστήσεων συγκλίνει σημαιακά αλλά $\boxed{\textbf{δεν}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x)$

$$\Updownarrow$$

$$\exists\, \epsilon \ \ \exists\, x_n \in I \ \ : \ \forall n \rightsquigarrow |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$$

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και $x_n \to x_0$ τότε
αν $f_n(x_n)$ $\boxed{\textbf{δεν}}$ συγκλίνει $\Rightarrow$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\textbf{δεν}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα

Παράδειγμα 3: Οι συναρτήσεις $f_n(x) = nx(1-x)^n$ ενώ συγκλίνουν σημειακά στο μηδέν για $x \in [0,\, 1]$. Για κάθε $x \in (0,\, 1)$ έχουμε

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{n+1}{n}(1-x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)(1-x)$$

Για μεγάλα n θα έχουμε:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)(1-x) < \left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

οπότε

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} < \left(1 - \frac{x}{2}\right) < 1$$

άρα $\lim\limits_{n\to 0} f_n(x) = 0 = f(x)$ σε κάθε σημείο x. Αλλά η ακολουθία $f_n(x)$ $\boxed{\textbf{δεν}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επειδή για $x_n = 1/n$ και για μεγάλα n

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} \rightsquigarrow f_n\left(\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{2\mathrm{e}} \rightsquigarrow |f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)| > \frac{1}{2\mathrm{e}}$$

Πρόταση 1

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \text{ομοιόμορφα}$$
$$\Updownarrow$$
$$M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Αποδ:

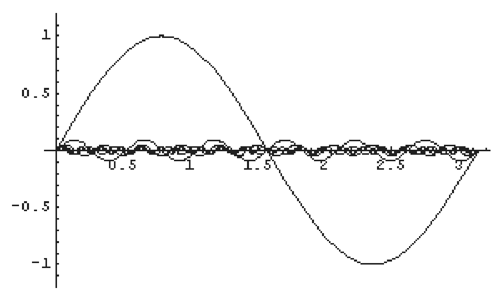
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \text{ομοιόμορφα}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\,\epsilon\ \ \forall\, x\in I\ \ \exists\, N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\ :\ n > N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\ \rightsquigarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$
$$\rightsquigarrow\ M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon\ \rightsquigarrow\ \lim_{n\to} M_n = 0$$

Το αντίστροφο αποδεικνύεται ως εξής:

$$M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\,\epsilon\ \ \exists\, N\,(\epsilon)\ :\ n > N\,(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ M_n < \epsilon\ \rightsquigarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$
$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \text{ομοιόμορφα}$$

Παράδειγμα 4: Για κάθε x

$$f_n(x) = \frac{\sin\,(n\,x + x)}{n}\ \rightsquigarrow\ |f_n(x)| \le \frac{1}{n} = M_n\ \rightsquigarrow\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,\ \text{ομοιόμορφα}$$



Πρόταση 2 (Κριτήριο Cauchy):

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \text{ομοιόμορφα}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\,\epsilon\ \ \forall\, x\in I\ \ \exists\, N\,(\epsilon)\ :\ n > m > N\,(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Αποδ: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$ ομοιόμορφα $\Rightarrow f_n(x)$ ικανοποιεί το Κριτήριο Cauchy
Εστω $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$ ομοιόμορφα, αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} \forall\,\epsilon\ \ \forall\,x\in I\ \ \exists\,N\left(\tfrac{\epsilon}{2}\right):\ \ & n > N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \rightsquigarrow |f_n(x)-f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \\ \text{και}\ \ & m > N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \rightsquigarrow |f_m(x)-f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} |f_n(x)-f_m(x)| &= |(f_n(x)-f(x)) + (f(x)-f_m(x))| \leq \\ &\leq |f_n(x)-f(x)| + |f(x)-f_m(x)| < \epsilon \end{aligned}$$

επομένως

$$\forall\,\epsilon\ \ \forall\,x\in I\ \ \exists\,N(\epsilon):\ n > m > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow\ |f_n(x)-f_m(x)| < \epsilon$$

Επομένως αποδείξαμε ομοιόμορφη σύγκλιση $\Rightarrow$ Κριτήριο Cauchy.
Για το αντίστροφο έστω ότι ισχύει το παραπάνω, αυτό σημαίνει ότι για κάθε x σταθερό η ακολουθία $f_n(x)$ είναι μια ακολουθία Cauchy άρα συγκλίνει σε κάθε σημείο σε μια συνάρτηση $f(x)$, δηλαδή

$$\lim_{k\to\infty} f_{m+k}(x) = f(x)$$

$$\forall\,\epsilon\ \ \forall\,x\in I\ \ \exists\,N\left(\frac{\epsilon}{2}\right):\ m > N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\ \text{και}\ k\geq 0 \rightsquigarrow\ |f_m(x)-f_{m+k}(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

άρα

$$\lim_{k\to\infty} |f_m(x)-f_{m+k}(x)| = |f_m(x)-f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

και η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα.
Πρόταση 3:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \text{ομοιόμορφα}$$

$f_n(x)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχείς στο ανοικτό διάστημα $(a,\,b)$

$$\Downarrow$$

$f(x)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(a,\,b)$

Αποδ.
$\diamond\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$ ομοιόμορφα $\rightsquigarrow$

$$\forall\,\epsilon>0\ \ \forall\,h\ \ \exists\,n_0\ :\ |f_{n_0}(x)-f(x)| < \frac{\epsilon}{3}\ \text{και}\ |f_{n_0}(x+h)-f(x+h)| < \frac{\epsilon}{3}$$

$\diamond\ f_{n_0}(x)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(a,\,b)$ $\rightsquigarrow$

$$\exists\,\delta(\epsilon)>0\ :\ \ |h| < \delta(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |f_{n_0}(x+h)-f_{n_0}(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Οπότε

$$\forall\,\epsilon>0\ \ \exists\,\delta(\epsilon)>0\ :\ \ |h|<\delta(\epsilon)\ \rightsquigarrow$$

$$|f(x+h)-f(x)|\le|f(x+h)-f_{n_0}(x+h)|+|f_{n_0}(x+h)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f(x)|<\epsilon$$

Αρα η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $(a,\,b)$
Αυτή η πρόταση σημαίνει ότι τα σύμβολα $\lim\limits_{x\to x_0}$ και $\lim\limits_{n\to\infty}$ εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλινουν ομοιόμορφα:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0}f_n(x)\right)}$$

Πρόταση 4:

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\ \text{ομοιόμορφα}$$

$$\text{και } f_n(x) \text{ συνεχείς συναρτήσεις για } x\in[a,\,b]$$

$$\Downarrow$$

$$F_n(x)=\int\limits_a^x f_n(t)\,dt\ \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt\ \text{ομοιόμορφα}$$

Αποδ.

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\ \text{ομοιόμορφα}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\,\epsilon>0\ \ \forall\,t\in I\ \ \exists\,N\left(\frac{\epsilon}{2(b-a)}\right)\ :$$

$$n>N\left(\frac{\epsilon}{2(b-a)}\right)\ \rightsquigarrow\ |f_n(t)-f(t)|<\frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}|F_n(x)-F(x)| = &\ \left|\int\limits_a^x (f_n(t)-f(t))dt\right|\le\\ \le &\ \int\limits_a^x |f_n(t)-f(t)|\ dt\le\tfrac{\epsilon(x-a)}{2(b-a)}<\epsilon\end{aligned}$$

Αρα η ακολουθία $F_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση $F(x)$
Η Πρόταση 4 σημαίνει ότι τα σύμβολα $\lim$ και $\int$ εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλινουν ομοιόμορφα:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_a^b f_n(t)\,dt\right)=\int\limits_a^b\left(\lim_{n\to\infty}f_n(t)\right)\,dt}$$

Παράδειγμα 5: Για κάθε $x \in [0,\, 1]$ η ακολουθία $f_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx^2}$ συγκλίνει σημειακά στο 0 αλλά **δεν** συγκλίνει ομοιόμορφα. Για μεγάλα n και $x \in (0,\, 1)$

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-x^2} < \mathrm{e}^{x^2/2}\mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{-x^2/2} < 1 \;\rightsquigarrow\; \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \text{ σημειακά}$$

Αλλά

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{\frac{n}{2\mathrm{e}}} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$$

$\rightsquigarrow$ η ακολουθία **δεν** συγκλίνει ομοιόμορφα. Παρατηρούμε ότι:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 nx\mathrm{e}^{-nx^2}\,dx = \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Αλλά

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx = 0 \neq \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right) = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 6: Αν $f_n(x) = \dfrac{n+\sin x}{3n+\cos^2\, x}$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$$

Αποδ. Η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\frac{1}{3}$ διότι (Πρόταση 1):

$$\left|\frac{n+\sin\, x}{3n+\cos^2\, x} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3\sin\, x - \cos^2\, x}{9n+3\cos^2\, x}\right| \leq \frac{4}{9n} \to 0$$

επομένως από την πρόταση 4 έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$$

Πρόταση 5

$f_n(x)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο διάστημα $(a,\, b)$

$f_n(x)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x)$

$f_n'(x)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{df_n(x)}{dx} = f'(x) = \frac{d\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)}{dx}}$$

Αποδ.: $f_n'(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα $\Leftrightarrow$ υπάρχει συνάρτηση $\phi(x)$ τέτοια ώστε:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \phi(x)$$

Από την Πρόταση 4, έχουμε ότι:

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt \;\longrightarrow\; \int_{x_0}^{x} \phi(t)\, dt \quad \text{ομοιόμορφα}$$

δηλαδή

$$\forall\, \epsilon \;\; \forall\, x \in I \;\; \exists\, N_1\,(\epsilon) \;:\; n > N_1\,(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; \left| f_n(x) - f_n(x_0) - \int_{x_0}^{x} \phi(t)\, dt \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Επειδή η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x)$

$$\forall\, \epsilon \;\; \exists\, N_2\,(\epsilon) \;:\; n > N_2\,(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{και} \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{4}$$

Οπότε γιά ένα $n > \max\{N_1(\epsilon),\, N_2(\epsilon)\}$ έχουμε:

$$\left| f(x) - f(x_0) - \int_{x_0}^{x} \phi(t)\, dt \right| =$$

$$= \left| f(x) - f_n(x) - (f(x_0) - f_n(x_0)) + f_n(x) - f_n(x_0) - \int_{x_0}^{x} \phi(t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f(x_0) - f_n(x_0)| + \left| f_n(x) - f_n(x_0) - \int_{x_0}^{x} \phi(t)\, dt \right| < \epsilon$$

δηλαδή

$$\left\{ \forall\, \epsilon > 0 \;\rightsquigarrow\; \left| f(x) - f(x_0) - \int_{x_0}^{x} \phi(t)\, dt \right| < \epsilon \right\} \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \phi(t)\, dt$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \phi(x) \;\; \rightsquigarrow \;\; \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{df_n(x)}{dx}\right)$$

Το παραπάνω συμπέρασμα σημαίνει ότι τα σύμβολα $\lim$ και $\dfrac{d}{dx}$ εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλινουν ομοιόμορφα.