ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η σειρά συναρτήσεων $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $S(x)$ αν

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = S(x), \text{ ομοιόμορφα } \Leftrightarrow$$

Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \text{ συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall\,\epsilon \;\; \forall\,x \in I \;\; \exists\,N(\epsilon) \; : \; n > N(\epsilon) \;\; \rightsquigarrow$$

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x)\right| < \epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\,\epsilon \;\; \forall\,x \in I \;\; \exists\,N(\epsilon) \; : \; n > m > N(\epsilon) \;\; \rightsquigarrow$$

$$|S_n(x) - S_m(x)| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \epsilon$$

Πρόταση 6

$$|f_n(x)| \leq v_n(x)$$

$$\text{ΚΑΙ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

Πρόταση 7 Weierstrass M-Test

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \text{ΚΑΙ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n \quad \text{συγκλίνει}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

Πρόταση 8

Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και οι συναρτήσεις $f_n(x)$ είναι συνεχείς σε ένα διάστημα I τότε και η συνάρτηση $S(x)$ είναι συνεχής

Πρόταση 9

Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και οι συναρτήσεις $f_n(x)$ και $S(x)$ είναι ολοκληρώσιμες και συνεχείς σε ένα διάστημα I τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx$$

Πρόταση 10

Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και οι συναρτήσεις $f_n'(x)$ και $S'(x)$ είναι συνεχείς σε ένα διάστημα I και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = S'(x)$$