ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εστω $\{f_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα $I = [a,\, b]$ (ή $(a,\, b]$ ή $[a,\, b)$ ή $(a,\, b)$)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα (uniform convergence) στην συνάρτηση $S(x)$ αν

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = S(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

$$\Updownarrow$$

Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $S(x)$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon \ \ \forall x \in I \ \ \exists N(\epsilon) \ : \ n > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ |S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) \right| < \epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon \ \ \forall x \in I \ \ \exists N(\epsilon) \ : \ n > m > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ |S_n(x) - S_m(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \epsilon$$

Παράδειγμα 1: Η " γεωμετρική σειρά " συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $|x| < 1$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}}$$

Αποδ.: Εστω $I_c = [-c,\, c]$ και $0 < c < 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x} = -\frac{x^n}{1-x}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} x^k - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^n}{1-x} < \frac{c^n}{1-c} < \epsilon < 1 \ \rightsquigarrow \ n > \frac{\ln\left((1-c)\epsilon\right)}{\ln\, c} \equiv \delta(\epsilon)$$

Οπότε για κάθε $x \in I_c$ έχουμε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, και αυτό ισχύει για κάθε $c < 1$, διότι

$$\forall\, \epsilon < 1 \ \text{ και } \ \forall\, x \in I_c\ \exists\, \delta(\epsilon)\ :\ n > \delta(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ \left| \sum_{k=0}^{n-1} x^k - \frac{1}{1-x} \right| < \epsilon$$

Επομένως η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $-1 < x < 1$.

Πρόταση 6

$$|f_n(x)| \leq v_n(x) \quad \text{KAI} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

Αποδ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα} \ \Leftrightarrow$$

$$\forall\, \epsilon\ \ \forall\, x \in I\ \ \exists\, N\,(\epsilon)\ :\ n > m > N\,(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ \sum_{k=m+1}^{n} v_k(x) < \epsilon$$

αλλά

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} v_k(x) < \epsilon$$

Πρόταση 7 Weierstrass M-Test

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \text{KAI} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n \quad \text{συγκλίνει}$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

Αποδ. Είναι η ίδια πρόταση όπως η Πρόταση 6, αλλά εδώ $v_n(x) = M_n$.

Παράδειγμα 2: Η “ εκθετική σειρά ” συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αποδ. Για κάθε x υπάρχει ένα $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|x| < m$ και

$$\forall\, \ell \geq 0\ \rightsquigarrow\ \frac{x}{m+\ell} \leq \frac{x}{m} < 1$$

$$e^x \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{m+\ell}}{(m+\ell)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!} + \frac{x^m}{m!}\left(1 + \frac{x}{m+1} + \frac{x^2}{(m+1)(m+2)} + \frac{x^3}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \cdots\right)$$

$$\left|\frac{e^x - \sum\limits_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!}}{\frac{x^m}{m!}}\right| = \underbrace{\left(1 + \frac{|x|}{m+1} + \frac{|x|^2}{(m+1)^2} + \frac{|x|^3}{(m+1)^3} + \cdots\right)}_{\text{γεωμετρική σειρά}}$$

δηλαδή η εκθετική σειρά φράσσεται από την γεωμετρική σειρά για κάθε $|x| < m$. Οπότε Πρόταση 6 $\rightsquigarrow$ η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα.

Πρόταση 8

Αν η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και οι συναρτήσεις $f_n(x)$ είναι συνεχείς σε ένα διάστημα I τότε και η συνάρτηση $S(x)$ είναι συνεχής

Αποδ. Είναι άμεσο συμπέρασμα της πρότασης 3

Πρόταση 9

Αν η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και οι συναρτήσεις $f_n(x)$ και $S(x)$ είναι ολοκληρώσιμες και συνεχείς σε ένα διάστημα I τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx$$

Αποδ. Είναι άμεσο συμπέρασμα της πρότασης 4

Παράδειγμα 3: Από την γεωμετρική σειρά έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$$

Παράδειγμα 4:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots \rightsquigarrow \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Πρόταση 10

Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και οι συνάρτήσεις $f_n'(x)$ και $S'(x)$ είναι συνεχείς σε ένα διάστημα I και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = S'(x)$$

Αποδ. Είναι άμεσο συμπέρασμα της πρότασης 5

Ασκήσεις

Ασκηση 1) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}$, συγκλίνει ομοιόμορφα για $\alpha > \frac{1}{2}$ και $x \geq 0$

(Σημείωση: Αποδείξτε ότι $\frac{x}{1+nx^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ για $x \geq 0$)

Ασκηση 2) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, συγκλίνει ομοιόμορφα για $|x| < 1$

Ασκηση 3) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\left(n+1\right)}$, συγκλίνει ομοιόμορφα για $|x| < 1$

Ασκηση 4) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2+x^{2n}}$, συγκλίνει ομοιόμορφα για $|x| < 1$

Ασκηση 5) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2x^2}$, συγκλίνει ομοιόμορφα για $|x| < R < \infty$

Ασκηση 6)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n\left(n-1\right)} = x + \left(1-x\right)\ln\left(1-x\right)$$

Ασκηση 7)

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\left(n+1\right)}$$

Ασκηση 8) Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα για $x \geq 0$

$$-1 + \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2^2-1} + \frac{\mathrm{e}^{-4x}}{4^2-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2nx}}{2^2n^2-1}$$