ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Πρ. 20a

Αν $f(x)$ φραγμένη στο $[a,\, b]$ $m \leq f(x) \leq M$
$\boxed{\textbf{και}}$ $g(x)$ ολοκληρώσιμη με σταθερό πρόσημο
$\boxed{\textbf{και}}$ $f(x)g(x)$ ολοκληρώσιμη

$$\Downarrow$$

$$\exists\, \mu \in [m,\, M] \ \rightsquigarrow \ \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \ = \ \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

Αποδ: Εστω $g(x) \geq 0$ $m \leq f(x) \leq M \ \rightsquigarrow \ mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$

(Σημ: αν $\displaystyle\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0 \ \rightsquigarrow \ \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$)

Εστω $\displaystyle\int\limits_a^b g(x)\,dx \neq 0$ τότε

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = \mu \leq M$$

(Αν $g(x) \leq 0 \ \rightsquigarrow \ -g(x) \geq 0$ και εργαζόμαστε όπως προηγούμενα)

Πρ. 20b: Πρώτο Θεωρημα Μέσης Τιμής

Αν $f(x)$ συνεχής στο $[a,\, b]$
$\boxed{\textbf{και}}$ $g(x)$ ολοκληρώσιμη
με σταθερό πρόσημο

$\rightsquigarrow$ $f(x)g(x)$
ολοκληρώσιμη

$$\Downarrow$$

$$\exists\, \xi \in [a,\, b] \ \rightsquigarrow \ \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \ = \ f(\xi) \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

Αποδ: Αφού η $f(x)$ είναι συνεχής, αν

$$m = \inf\, f(x), \qquad M = \sup\, f(x), \quad \text{για} x \in [a,b]$$

τότε $\exists\xi\ :\ f(\xi)=\mu$ όπου μ ορίστηκε στην προηγούμενη πρόταση.

Πόρισμα

Αν $f(x)$ συνεχής στο $[a,\,b]$ $\exists\xi\in[a,\,b]\ \rightsquigarrow\ \int\limits_a^b f(x)\,dx\ = f(\xi)\,(b-a)$

Αποδ: θέτουμε $g(x)=1$ στην προηγούμενη πρόταση.

Πρ. 20c

Αν $f(x)$ μονότονη $\boxed{\textbf{και}}$ $g(x)$ ολοκληρώσιμη με σταθερό πρόσημο

$$\Downarrow$$

$$\exists\xi\in[a,\,b]\ \rightsquigarrow\ \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\ =\ f(a)\int\limits_a^\xi g(x)\,dx\ +\ f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,dx$$

Αποδ: Υποθέτουμε $f(x)$ αύξουσα και $g(x)$ ολοκληρώσιμη με σταθερό θετικό πρόσημο

$$F(z)=\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\ -\ f(a)\int\limits_a^z g(x)\,dx\ -\ f(b)\int\limits_z^b g(x)\,dx$$

$$F(a)=\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\ -\ f(b)\int\limits_a^b g(x)\,dx=\int\limits_a^b (f(x)\ -\ f(b))g(x)\,dx\leq 0$$

$$F(b)=\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\ -\ f(a)\int\limits_a^b g(x)\,dx=\int\limits_a^b (f(x)\ -\ f(a))g(x)\,dx\geq 0$$

επειδή $F(z)$ συνεχής $F(a)F(b)\leq 0\ \rightsquigarrow\ \exists\xi\ :\ F(\xi)=0$.

Πρ. 20c′: Δεύτερο Θεωρημα Μέσης Τιμής

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Αν } f(x) \text{ μονότονη συνεχής} \boxed{\textbf{και}}\ \exists\, f'(x) \\ \boxed{\textbf{και}}\ g(x) \text{ συνεχής} \\ \Downarrow \\ \exists\, \xi \in [a,\, b] \ \rightsquigarrow\ \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx \,=\, f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx \,+\, f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx \end{array}}$$

Αποδ: Θεωρούμε $f'(x) \leq 0$.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \,=\, \int_a^b f(x)\,d\left(\int_a^x g(t)dt\right) \,=$$

$$= f(b)\left(\int_a^b g(t)dt\right) - \int_a^b f'(x)\left(\int_a^x g(t)dt\right)dx$$

$\left(\int_a^x g(t)dt\right)$ συνεχής

$f'(x)$ ολοκληρώσιμη και διατηρεί πρόσιμο

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \,=\, f(b)\left(\int_a^b g(t)dt\right) - \left(\int_a^\xi g(t)dt\right)\left(\int_a^b f'(x)dx\right) =$$

$$=\, f(b)\left(\int_a^b g(t)dt\right) - \left(\int_a^\xi g(t)dt\right)(f(b) - f(a)) =$$

$$=\, f(b)\left(\int_a^b g(t)dt - \int_a^\xi g(t)dt\right) + f(a)\int_a^\xi g(t)dt =$$

$$=\, f(a)\int_a^\xi g(t)dt + f(b)\int_\xi^b g(t)dt$$