Βασική Ανισότητα

$$\boxed{\begin{array}{ll} m & \leq\ f(x)\ \leq\ M\ \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow & m\,(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a) \end{array}}$$

Αποδ.: Από την Πρ. 12 (¨Θετικότητττα¨) αποδεικνύεται η βασική ανισότητα ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[a,\,b]$

Ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$\boxed{\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\left(\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int\limits_a^b g^2(x)\,dx\right)}}$$

Αποδ.: Γιά κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{l} 0 \leq (\lambda f(x) + g(x))^2 = \lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x)g(x) + g^2(x)\ \rightsquigarrow \\ 0 \leq \lambda^2 \int\limits_a^b f^2(x)\,dx + 2\lambda \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx + \int\limits_a^b g^2(x)\,dx\ \rightsquigarrow \\ \left(\lambda \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right) - \left(\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int\limits_a^b g^2(x)\,dx\right) \leq 0 \end{array}$$

Ανισότητα Minkowski

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt{\int\limits_a^b (f(x)+g(x))^2\ dx} \leq \\ \leq \sqrt{\left(\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\right)} + \sqrt{\left(\int\limits_a^b g^2(x)\,dx\right)} \end{array}}$$

Αποδ.:

$$\begin{array}{l} \int\limits_a^b (f(x)+g(x))^2\ dx = \\ = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx + 2\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx + \int\limits_a^b g^2(x)\,dx \leq \\ \leq \int\limits_a^b f^2(x)\,dx + 2\left||\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right| + \int\limits_a^b g^2(x)\,dx \qquad \underbrace{\leq}_{\text{Ανισότητα Cauchy-Schwartz}} \\ \leq \int\limits_a^b f^2(x)\,dx + 2\sqrt{\left(\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int\limits_a^b g^2(x)\,dx\right)} + \int\limits_a^b g^2(x)\,dx = \\ = \left(\sqrt{\left(\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\right)} + \sqrt{\left(\int\limits_a^b g^2(x)\,dx\right)}\right)^2 \end{array}$$

Λήμμα:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Αν η συνάρτηση } f(x) \text{ είναι φραγμένη} \\ \text{σε ένα διάστημα } I = [c,\, d] \\ m \,=\, \inf\,\{f(x),\, x \in I\} \\ M \,=\, \sup\,\{f(x),\, x \in I\} \\ \Downarrow \\ \forall\, u \in I \quad \forall\, v \in I \;\rightsquigarrow\; |f(u) - f(v)| \le M - m \\ \text{και} \\ \boxed{\sup\{|f(u) - f(v)|\,,\; u \in I,\; v \in I\} = M - m}\end{array}}$$

Αποδ.:

$$\forall\, u \;\rightsquigarrow\; f(u) \le M \quad \forall\, v \;\rightsquigarrow\; -f(v) \le -m \quad \Rightarrow f(u) - f(v) \le M - m \quad \text{και} \quad f(v) - f(u) \le M - m$$

$$\Rightarrow\; |f(u) - f(v)| \le M - m$$

$$M \,=\, \sup\,\{f(x),\, x \in I\} \;\rightsquigarrow\; \forall\, \epsilon > 0\; \exists\, u \,:\, M - \frac{\epsilon}{2} < f(u) \le M$$

$$m \,=\, \inf\,\{f(x),\, x \in I\} \;\rightsquigarrow\; \forall\, \epsilon > 0\; \exists\, v \,:\, m \le f(v) < m + \frac{\epsilon}{2} \;\rightsquigarrow\; -m - \frac{\epsilon}{2} < -f(v) \le -m$$

$$\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, u,\, v \;\rightsquigarrow\; M - m - \epsilon < f(u) - f(v) \le |f(u) - f(v)|$$

Οπότε

$$\sup\{|f(u) - f(v)|\,,\; u \in I,\; v \in I\} = M - m$$

Πρ. 13:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Αν } f(x) \text{ ολοκληρώσιμη στο } [a,\, b] \\ \Downarrow \\ \text{Η } |f(x)| \text{ ολοκληρώσιμη στο } [a,\, b]\end{array}}$$

Αποδ.: Εστω $P \,=\, \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$, $M_k^* \;=\; \sup\,\{|f(x)|,\, x \in I_k\}$ και $m_k^* \,=\, \inf\,\{|f(x)|,\, x \in I_k\}$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ τότε

$$|(|f(u)| - |f(v)|)| \;\le\; |f(u) - f(v)| \quad \underbrace{\rightsquigarrow}_{\text{Λήμμα}} \quad M_k^* - m_k^* \le M_k - m_k$$

$$U\,(P, f) - L\,(P, f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\, \triangle x_k \quad \text{και} \quad U\,(P, |f|) - L\,(P, |f|) = \sum_{k=1}^{n} (M_k^* - m_k^*)\, \triangle x_k$$

$$\Rightarrow\; U\,(P, |f|) - L\,(P, |f|) \le U\,(P, f) - L\,(P, f) \;\rightsquigarrow$$

Από την Πρ.6 έχουμε

$$f \text{ ολοκληρώσιμη } \Leftrightarrow\; \forall\, \epsilon > 0\; \exists\, P \,:\, U\,(P, f) - L\,(P, f) < \epsilon$$

$$\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, P \,:\, U\,(P, |f|) - L\,(P, |f|) \le U\,(P, f) - L\,(P, f) < \epsilon \;\Rightarrow\; |f| \text{ ολοκληρώσιμη}$$

Πρ. 14:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Αν } f(x) \text{ και } g(x) \text{ ολοκληρώσιμες στο } [a,\, b] \\ \Downarrow \\ \text{Η } f(x) \cdot g(x) \text{ ολοκληρώσιμη στο } [a,\, b]\end{array}}$$

Αποδ.: Αν $|f(x)| < B_f$ και $|g(x)| < B_g$ τότε αν $x \in [x_{k-1}, x_k]$ και $y \in [x_{k-1}, x_k]$.
Εστω $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$,

$$|(f(x)g(x) - f(y)g(y))| \le |f(x)\,(g(x) - g(y)) + (f(x) - f(y))\,g(y)| \le B_f\,|g(x) - g(y)| + B_g\,|f(x) - f(y)|$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Λήμμα}} \; |(f(x)g(x) - f(y)g(y))| \le B_f\,(M_k^g - m_k^g) + B_g\left(M_k^f - m_k^f\right)$$

όπου

$$M_k^f = \sup\{f(x),\ x_{k-1} \le x \le x_k\}, \quad M_k^g = \sup\{g(x),\ x_{k-1} \le x \le x_k\}$$
$$m_k^f = \inf\{f(x),\ x_{k-1} \le x \le x_k\}, \quad m_k^g = \inf\{g(x),\ x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

άρα

$$M_k^{fg} - m_k^{fg} = \sup\left\{\left|(f(x)g(x) - f(y)g(y))\right|,\ x,\ y\ \in [x_{k-1}, x_k]\right\}$$
$$f \text{ ολοκληρώσιμη } \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists P_1\ :\ U(P_1, f) - L(P_1, f) < \frac{\epsilon}{B_g}$$
$$g \text{ ολοκληρώσιμη } \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists P_2\ :\ U(P_2, f) - L(P_2, f) < \frac{\epsilon}{B_f}$$
$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists P = P_1 \bigcup P_2\ :\quad U(P, f) - L(P, f) \underbrace{\le}_{\text{Πρ.2 και 3}} U(P_1, f) - L(P_1, f) < \tfrac{\epsilon}{B_g}$$
$$U(P, g) - L(P, g) \underbrace{\le}_{\text{Πρ.2 και 3}} U(P_2, g) - L(P_2, g) < \tfrac{\epsilon}{B_f}$$
$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists P\ :\ U(P, fg) - L(P, fg) < \epsilon \ \Leftrightarrow\ fg \text{ ολοκληρώσιμη}$$

Πρ. 15:

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$ και $\inf\{\left|f(x)\right|,\ x \in [a,\ b]\} > 0$ $\Downarrow$ Η $\dfrac{1}{f(x)}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$

Αποδ.:

$$0 < \gamma = \inf\{\left|f(u)\right|,\ u \in [a,\ b]\} \ \rightsquigarrow\ 0 < \frac{1}{f(x)} \le \frac{1}{\gamma}$$
$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| = \frac{1}{f(x)f(y)}\left|f(x) - f(y)\right| \le \frac{1}{\gamma^2}\left|f(x) - f(y)\right|$$
$$\rightsquigarrow\ M_k^{1/f} - m_k^{1/f} \le \frac{1}{\gamma^2}\left(M_k^f - m_k^f\right)$$

κλπ κλπ όπως στις προηγούμενες προτάσεις

Πρ. 16:

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη και $g(x)$ συνεχής στο $[a,\ b]$ $\Downarrow$ Η $h(x)\ =\ g(f(x))$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$

(Απόδειξη δυσκολώτερη αλλά στο πνεύμα των προηγουμένων, δεν έγινε στην τάξη)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Αποδείξτε f ολοκληρώσιμη $\rightsquigarrow$ f^2 ολοκληρώσιμη
(2) Αποδείξτε $f > 0$ ολοκληρώσιμη $\rightsquigarrow$ $\sqrt{f}$ ολοκληρώσιμη
(3) Αποδείξτε $f > 0$ ολοκληρώσιμη $\rightsquigarrow$ $\sqrt[3]{f}$ ολοκληρώσιμη