Πρ. 8: $f(x)$ μονότονη και φραγμένη στο $[a, b]$
$\rightsquigarrow f(x)$ (Darboux)-ολοκληρώσιμη

Πρ. 9: $f(x)$ συνεχής στο $[a, b]$
$\rightsquigarrow f(x)$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$
$\rightsquigarrow f(x)$ (Darboux)-ολοκληρώσιμη

Ορισμός: Ολοκλήρωμα Riemann

διαμέριση $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \}$
επιλογή σημείων $T = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \}$
όπου $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$

άθροισμα Riemann $S(P, T, f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle x_k$

$\exists$ ολοκλήρωμα Riemann $\Leftrightarrow \exists \lim_{|P| \to 0} S(P, T, f) = I_R(f)$

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > O :$
$\forall |P| < \delta$ και T επιλογή σημείων
$\Rightarrow |S(P, T, f) - I_R(f)| < \epsilon$

Αν υπάρχει το ολοκλήρωμα Riemann τότε είναι μοναδικό

Πρ. 10: ολοκλήρωμα Riemann $I_R(f) = I_Q(f)$ ολοκλήρωμα Darboux

Πρ. 11 (Θεώρημα Darboux) :

$$\boxed{\boxed{\begin{gathered}\xi_{k,n} \in \left[a + \frac{k-1}{n}(b-a),\ a + \frac{k}{n}(b-a)\right] \\ \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_{k,n}\right)\end{gathered}}}$$

Πρ. 12 Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

Γραμμικότητα

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_a^b \left(c_1 f(x) + c_2\, g(x)\right)\, dx = \\ &= c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}}$$

¨Θετικότητα¨

$$\boxed{f_1(x) \le f_2(x) \ \rightsquigarrow\ \int_a^b f_1(x)\,dx \le \int_a^b f_2(x)\,dx}$$

¨Τριγωνική ιδιότητα¨

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\ dx}$$

Εφαρμογές Θεωρήματος Darboux

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\ln 2$$

$$\ln 2=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}$$

$$P_n=\{\underset{0}{\overset{\parallel}{x_0}},x_1,x_2,\dots,\underset{k/n}{\overset{\parallel}{x_k}},\dots,\underset{1}{\overset{\parallel}{x_n}}\}$$

$$T_n=\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\dots,\frac{k}{n},\dots,\frac{n}{n}\right\}$$

$$S\left(P_n,T_n,\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\arctan x\Big|_0^1=\pi/4$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left\{1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\dots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(k-1)}{n}}}=\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=2\sqrt{1+x}\Big|_0^3=$$

$$=2\left(\sqrt{4}-1\right)=2$$