$\boxed{\textit{Διαμέριση}}$ (Partition) ορισμένη στο διάστημα $I = [a,\, b]$

$$P = \{x_0,\, x_1,\, x_2, \ldots, x_n\}$$
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

$$\triangle x_k \equiv x_k - x_{k-1}$$

$\boxed{\text{norm}}$ (λεπτότητα) διαμέρισης (Partition norm (mesh))

$$|P| = \max\{\triangle x_1,\, \triangle x_2, \ldots, \triangle x_n\}$$

$\boxed{\text{διάσταση}}$ (μήκος) διαμέρισης (Part. dimension (length))

$$d(P) = n \rightsquigarrow d(P)|P| \geq b - a$$

$$P^* \ \boxed{\text{λεπτότερη}}\ P \Leftrightarrow P^* \supset P$$

$$\rightsquigarrow |P^*| < |P|, \quad d(P^*) > d(P)$$

$f(x)$ φραγμένη συνάρτηση $f\,:\,[a,\, b] \to \mathbb{R}$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{ή} \quad |f(x)| < B$$

$$m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x), \quad M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$$

$\boxed{\textit{κάτω άθροισμα}}$ (low sum) της φραγμένης συνάρτησης πάνω σε μια διαμέριση P

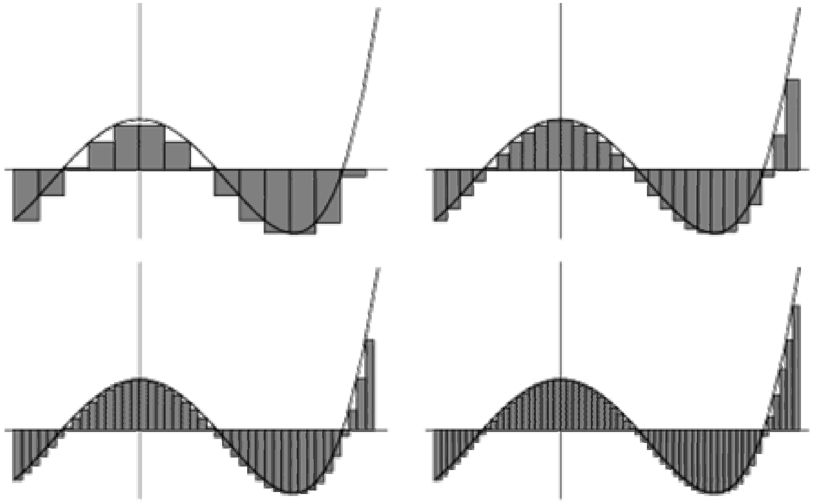
$$L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k$$

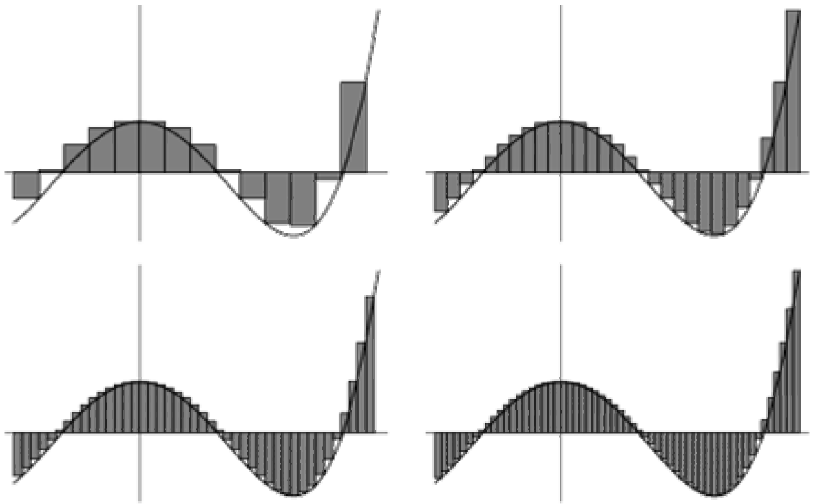
$$m_k = \inf\,\{f(x),\, x_k \leq x \leq x_{k-1}\}$$

$\boxed{\textit{άνω άθροισμα}}$ (upper sum) της φραγμένης συνάρτησης πάνω σε μια διαμέριση P

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k$$

$$M_k = \sup\,\{f(x),\, x_k \leq x \leq x_{k-1}\}$$





$f(x)$ φραγμένη συνάρτηση $f\,:\,[a,\,b]\;\rightarrow\;\mathbb{R}$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{ή} \quad |f(x)| < B$$

Πρ. 1 $\boxed{L\,(P,f)\;\leq\;U\,(P,f)}$

Πρ. 2 Λεπτότερη διαμέριση $\Rightarrow$ μεγαλύτερο κάτω άθρ.

$$P^* \supset P \;\rightsquigarrow\; L\,(P,f)\;\leq\;L\,(P^*,f)$$

$$\boxed{L\,(P^*,f) - L\,(P,f) \leq 2\,(d(P^*) - d(P))\;B\,|P|}$$

Πρ. 3 Λεπτότερη διαμέριση $\Rightarrow$ μικρότερο άνω άθροισμα

$$P^* \supset P \;\rightsquigarrow\; U\,(P^*,f)\;\leq\;U\,(P,f)$$

$$\boxed{U\,(P,f) - U\,(P^*,f) \leq 2\,(d(P^*) - d(P))\;B\,|P|}$$

Πρ. 4 $\boxed{L\,(P_1,f) \leq U\,(P_2,f)}$

$$\boxed{L(f) \equiv \sup_P L(P,f)} \qquad \boxed{U(f) \equiv \inf_P U(P,f)}$$

Λήμμα

$$\boxed{\begin{gathered} \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, P : \\ U(P,f) - L(P,f) < U(f) - L(f) + \epsilon \end{gathered}}$$

Ορ: $\boxed{\boxed{f(x) \text{ Darboux–ολοκληρώσιμη} \Leftrightarrow L(f) = U(f)}}$

$$L(f) = U(f) \equiv I_D(f) \equiv \int_a^b f(x)\,dx$$

Πρ. 5 Αν υπάρχει P_n είναι <u>κάποια</u> ακολουθία διαμερίσεων τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n,f) = \lim_{n\to\infty} U(P_n,f)$$

τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη

Λήμμα

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, P :$$

$$U(P,f) - L(P,f) < U(f) - L(f) + \epsilon$$

Πρ.6 $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη $L(f) = U(f)$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, P : U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$$

Πρ.7 Θεώρημα Darboux

$f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη $L(f) = U(f)$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 :$$
$$|P| < \delta \Rightarrow U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$$