ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ DARBOUX

$\boxed{\textit{Διαμέριση}}$ (Partition) ορισμένη στο διάστημα $I = [a,\, b]$

$$P = \{x_0,\, x_1,\, x_2, \ldots, x_n\}$$
$$a \;=\; x_0 \;<\; x_1 \;<\; \ldots \;< x_n = b$$

$$\triangle x_k \;\equiv\; x_k \;-\; x_{k-1}$$

$\boxed{\text{norm}}$ (λεπτότητα) διαμέρισης (Partition norm (mesh))

$$|P| \;=\; \max\{\triangle x_1,\, \triangle x_2, \ldots, \triangle x_n\}$$

$\boxed{\text{διάσταση}}$ (μήκος) διαμέρισης (Part. dimension (length))

$$d(P) = n \;\rightsquigarrow\; d(P)|P| \geq b - a$$

$$P^* \quad \boxed{\text{λεπτότερη}} \quad P \;\Leftrightarrow\; P^* \supset P$$

$$\rightsquigarrow\; |P^*| < |P|, \quad d(P^*) > d(P)$$

$f(x)$ φραγμένη συνάρτηση $f \;:\; [a,\, b] \;\rightarrow\; \mathbb{R}$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{ή} \quad |f(x)| < B$$

$$m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x), \quad M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$$

$\boxed{\textit{κάτω άθροισμα}}$ (low sum) της φραγμένης συνάρτησης πάνω σε μια διαμέριση P

$$L(P, f) \;=\; \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k$$

$$m_k \;=\; \inf\;\{f(x),\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

$\boxed{\textit{άνω άθροισμα}}$ (upper sum) της φραγμένης συνάρτησης πάνω σε μια διαμέριση P

$$U(P, f) \;=\; \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k$$

$$M_k \;=\; \sup\;\{f(x),\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

$f(x)$ φραγμένη συνάρτηση $f\,:\,[a,\,b]\,\to\,\mathbb{R}$

$$m \le f(x) \le M \quad \text{ή} \quad |f(x)| < B$$

Πρ. 1 $L\,(P,f)\,\le\,U\,(P,f)$

Αποδ: Από τον ορισμό

$$L(P,f)\,=\,\sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k$$

$$m_k\,=\,\inf\,\{f(x),\,x_{k-1}\le x\le x_k\}$$

και

$$U(P,f)\,=\,\sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k$$

$$M_k\,=\,\sup\,\{f(x),\,x_{k-1}\le x\le x_k\}$$

έχουμε ότι: $m_k \le M_k$ επομένως $L\,(P,f)\,\le\,U\,(P,f)$

Πρ. 2 Λεπτότερη διαμέριση $\Rightarrow$ μεγαλύτερο κάτω άθροισμα

$$P^* \supset P \;\rightsquigarrow\; L\,(P,f)\,\le\,L\,(P^*,f)$$

$$L\,(P^*,f) - L\,(P,f) \le 2\,(d(P^*) - d(P))\;B\,|P|$$

Αποδ: Εστω P_1 μια διαμέριση που προκύπτει από την P αν προσθέσουμε ένα νέο σημείο y, δηλ. $P_1 = P\bigcup\{y\}$

$$P = \{x_0,\,x_1,\,x_2,\ldots,x_{i-1},\,x_i,\,\ldots,x_n\} \quad d(P) = n$$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < \underbrace{x_{i-1} < y < x_i} < \ldots < x_n = b$$

$$P_1 = \{x_0,\,x_1,\,x_2,\ldots,x_{i-1},\; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{νέο} \\ \text{στοιχ.}}}{y} \;,\,x_i,\,\ldots,x_n\}$$

$$\begin{aligned} L(P,f) = \;& \sum_{k=1}^{i-1} m_k \triangle x_k + \\ & + \left(\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)\right)\,(x_i - x_{i-1}) + \\ & + \sum_{k=i+1}^{n} m_k \triangle x_k \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L(P_1,f) = \ & \sum_{k=1}^{i-1} m_k \triangle x_k + \\
& + \left(\inf_{x_{i-1}\le x\le y} f(x) \right) (y - x_{i-1}) + \\
& + \left(\inf_{y\le x\le x_i} f(x) \right) (x_i - y) + \\
& + \sum_{k=i+1}^{n} m_k \triangle x_k
\end{aligned}
$$

Επειδή $\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \le \inf_{x_{i-1}\le x\le y} f(x)$ και $\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \le \inf_{y\le x\le x_i} f(x)$ επομένως

$$
\begin{aligned}
& L(P_1,f) - L(P,f) = \\
& = \left(\inf_{x_{i-1}\le x\le y} f(x) - \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \right) (y - x_{i-1}) + \\
& + \left(\inf_{y\le x\le x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \right) (x_i - y) \ge 0
\end{aligned}
$$

Επειδή $|f(x)| < B$ τότε

$$
\inf_{x_{i-1}\le x\le y} f(x) - \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \le |\inf_{x_{i-1}\le x\le y} f(x)| + |\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)| < 2B
$$

όμοια

$$
\inf_{y\le x\le x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) < 2B
$$

οπότε

$$
L(P_1,f) - L(P,f) < 2B\,(x_i - x_{i-1}) = 2B|P|
$$

οπότε επαναλαμβάνοντας το αποτέλεσμα για διαφορές στοιχείων περισσότερο από 1, έτσι αν P_2 προκύπτει από την διαμέριση P_1 με την προσθήκη ενός νέου στοιχείου, η P_3 προκύπτει από την διαμέριση P_2 με την προσθήκη ενός νέου στοιχείου κ.ο.κ. θα έχουμε:

$$
\left.
\begin{array}{l}
L(P_1,f) - L(P,f) < 2B|P| \\
L(P_2,f) - L(P_1,f) < 2B|P_1| \le 2B|P| \\
L(P_3,f) - L(P_3,f) < 2B|P_2| \le 2B|P| \\
\quad \ldots \\
L(P_m,f) - L(P_{m-1},f) < 2B|P_{m-1}| \le 2B|P|
\end{array}
\right\} \Rightarrow \ L(P_m,f) - L(P_1,f) < 2mB|P|
$$

αλλά $m = d(P_m) - d(P)$. Οπότε

$$
L(P^*,f) - L(P,f) < 2B\,m\,|P| \quad m = d(P^*) - d(P)
$$

Πρ. 3 Λεπτότερη διαμέριση $\Rightarrow$ μικρότερο άνω άθροισμα

$$
P^* \supset P \ \rightsquigarrow \ U(P^*,f) \ \le \ U(P,f)
$$

$$
U(P,f) - U(P^*,f) \le 2\,(d(P^*) - d(P))\ B\,|P|
$$

Η απόδειξη είναι ίδια όπως στην πρόταση 2.

Πρ. 4 $L\left(P_1, f\right) \leq U\left(P_2, f\right)$

Αποδ:

$$
\begin{aligned}
L\left(P_1, f\right) \leq\ & L\left(P_1 \bigcup P_2, f\right) \leq U\left(P_1 \bigcup P_2, f\right) \leq \\
\leq\ & U\left(P_2, f\right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{L(f) \;\equiv\; \sup_P \; L(P, f)} \qquad \boxed{U(f) \;\equiv\; \inf_P \; U(P, f)}$$

Ορ: $\boxed{\boxed{f(x) \text{ Darboux–ολοκληρώσιμη} \Leftrightarrow L(f) = U(f)}}$

$$L(f) = U(f) \equiv I_D(f) \equiv \int_a^b f(x)\, dx$$

Πρ. 5 Αν υπάρχει P_n είναι <u>κάποια</u> ακολουθία διαμερίσεων τέτοια ώστε

$$\lim_{n \to \infty} L(P_n, f) \;=\; \lim_{n \to \infty} U(P_n, f)$$

τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη

Αποδ: Εχουμε ότι

$$L(P_n, f) \leq L(f) \leq U(f) \leq U(P_n, f) \;\Rightarrow\; \lim_{n \to \infty} L(P_n, f) \leq L(f) \leq U(f) \leq \lim_{n \to \infty} U(P_n, f)$$

Λήμμα

$$\forall \epsilon \,>\, 0 \quad \exists\, P:\; U(P, f) - L(P, f) < U(f) - L(f) + \epsilon$$

Αποδ: Επειδή

$$L(f) = \sup_P \; L(P, f) \;\Rightarrow\; \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, P_1 : L(P_1, f) > L(f) - \epsilon/2$$

$$U(f) = \inf_P \; U(P, f) \;\Rightarrow\; \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, P_2 : U(P_2, f) < U(f) + \epsilon/2$$

και για $P = P_1 \bigcup P_2$

$$L(P, f) \geq L(P_1, f) > L(f) - \epsilon/2 \qquad U(P, f) \leq U(P_2, f) > U(f) + \epsilon/2$$

άρα $U(P, f) - L(P, f) < U(f) - L(f) + \epsilon$

Πρ.6

$$f(x) \text{ είναι ολοκληρώσιμη } L(f)=U(f)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\, \epsilon\, >\, 0 \quad \exists\, P\, : U(P,f)-L(P,f)<\epsilon$$

Αποδ.: Αν $L(f)=U(f)$ τότε από το παραπάνω λήμμα έχουμε ότι:

$$\forall\, \epsilon\, >\, 0 \quad \exists\, P\, : U(P,f)-L(P,f)<\epsilon$$

Εστω τώρα ότι η παραπάνω σχέση αληθεύει τότε έχουμε επίσης ότι:

$$L(P,f)\leq L(f)\leq U(f)\leq U(P,f) \;\Rightarrow\; U(f)-L(F)\leq U(P,f)-L(P,f)<\epsilon$$

Αρα $\forall\, \epsilon\, >\, 0 \quad U(f)-L(F)<\epsilon$ οπότε $L(f)=U(f)$.

Πρ.7 Θεώρημα Darboux

$$f(x) \text{ είναι ολοκληρώσιμη } L(f)=U(f)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\, \epsilon\, >\, 0 \quad \exists\, \delta>0\, :\; |P|<\delta \Rightarrow U(P,f)-L(P,f)<\epsilon$$

Αποδ.: Αν $\forall\, \epsilon\, >\, 0 \quad \exists\delta\, >\, 0\; :\; |P|\, <\, \delta\, \Rightarrow\, U(P,f)-L(P,f)\, <\, \epsilon$ τότε ικανοποιούνται οι συνθήκες της πρότασης 6, επειδή

$$\forall\, \epsilon\, >\, 0 \quad \exists\, P:\; U(P,f)-L(P,f)<\epsilon \Rightarrow L(f)=U(f)$$

Εστω τώρα $L(f)=U(f)$ τότε σύμφωνα με την πρόταση 6

$$\forall\, \epsilon\, >\, 0 \quad \exists\, P_0\, : U(P_0,f)-L(P_0,f)<\epsilon/2$$

Από την διαμέριση P_0 ορίζουμε

$$\delta=\frac{\epsilon}{8d(P_0)B} \quad |f(x)|<B$$

Εστω μια διαμέριση $P, \quad |P|<\delta$. Ορίζουμε

$$Q=P\bigcup P_0 \;\rightsquigarrow\; d(Q)-d(P)\leq d(P_0)$$

Από την πρόταση 2

$$L(Q,f)-L(P,f)\leq 2\left(d(Q)-d(P)\right)B|P|\leq 2d(P_0)B|P|<2d(P_0)B\delta=\frac{\epsilon}{4}$$

από την πρόταση 2 έχουμε

$$L(P_0,f)-L(P,f)\leq L(Q,f)-L(P,f)<\frac{\epsilon}{4}$$

όμοια αποδεικνύουμε ότι:

$$U(P,f)-U(P_0,f)<\frac{\epsilon}{4}$$

επομένως

$$U(P,f)-L(P,f)=\underbrace{U(P,f)-U(P_0,f)}_{<\epsilon/4}+\underbrace{U(P_0,f)-L(P_0,f)}_{<\epsilon/2}+\underbrace{L(P_0,f)-L(P,f)}_{<\epsilon/4}<\epsilon$$