ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ¨ΑΠΛΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ¨

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} = & \frac{1}{2na^2}\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n}}+ \\ & +\frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n}}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\int \frac{xdx}{\left(x^2\pm a^2\right)^{n}} = \begin{cases} \ln\sqrt{|x^2\pm a^2|}+c & \text{για } n=1 \\ -\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{\left(x^2\pm a^2\right)^{n-1}} & \text{για } n>1 \end{cases}}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int \frac{dx}{\left(x^2-a^2\right)^{n+1}} = & -\frac{1}{2na^2}\frac{x}{\left(x^2-a^2\right)^{n}}+ \\ & -\frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{\left(x^2-a^2\right)^{n}}\end{aligned}}$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+2\alpha x+\beta\right)^{n}} = \int \frac{dx}{\left((x+\alpha)^2+\beta-\alpha^2\right)^{n}} = \cdots$$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+2\alpha x+\beta\right)^{n}} = \int \frac{\left((x+\alpha)-\alpha\right)dx}{\left((x+\alpha)^2+\beta-\alpha^2\right)^{n}}$$

$\boxed{\text{Κάθε πολυώνυμο αναλύεται σε ¨απλά¨ πολυώνυμα:}}$

$$Q(x) = A \prod_{k=1}^{p} (x-\rho_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{q} \left(x^2 + 2\alpha_\ell x + \beta_\ell\right)^{n_\ell}$$

$$\rho_k \quad \text{ρίζες}\ , \quad \alpha_\ell^2 < \beta_\ell$$

$$\text{βαθμός}\ (Q(x)) = n = \sum_{k=1}^{p} m_k + 2 \sum_{\ell=1}^{q} n_\ell$$

$\boxed{\text{¨ρητή¨}}$ πολυωνυμική συνάρτηση

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_m x^m}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Αν βαθμός } P(x) < \text{ βαθμός } Q(x) \text{ δηλ. } m < n \\ \text{το } R(x) \text{ αναλύεται σε ¨απλά¨ κλάσματα}\end{array}}$$

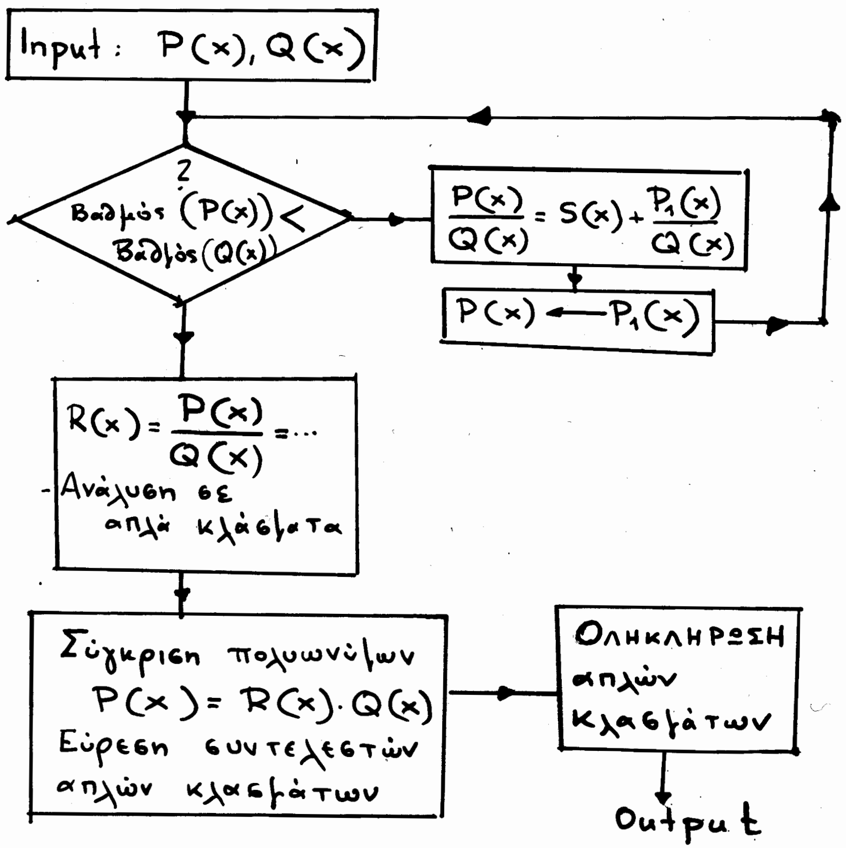
$$\begin{aligned} R(x) = \ & \tfrac{A_{11}}{x-\rho_1} + \tfrac{A_{12}}{(x-\rho_1)^2} + \cdots + \tfrac{A_{1m_1}}{(x-\rho_1)^{m_1}} + \\ & + \cdots \quad \text{για όλες τις ρίζες} \quad \cdots + \\ & + \tfrac{B_{11}x+\Gamma_{11}}{x^2+2\alpha_1 x+\beta_1} + \tfrac{B_{12}x+\Gamma_{12}}{\left(x^2+2\alpha_1 x+\beta_1\right)^2} + \cdots + \\ & \qquad + \cdots + \tfrac{B_{1n_1}x+\Gamma_{1n_1}}{\left(x^2+2\alpha_1 x+\beta_1\right)^{n_1}} + \\ & + \cdots \quad \text{για όλες τά τριώνυμα} \quad \cdots \end{aligned}$$

Από την ταυτότητα

$$Q(x)R(x) = P(x)$$

$$\text{βαθμός } [Q(x)R(x)] = \text{ βαθμός } [Q(x)] - 1$$

βρίσκουμε τους άγνωστους συντελεστές $A_{ik},\ B_{j\ell},\ \Gamma_{j\ell}$.



Input : P(x), Q(x)
Βαθμός (P(x)) < Βαθμός (Q(x))
P(x)/Q(x) = S(x) + P1(x)/Q(x)
P(x) ← P1(x)
R(x) = P(x)/Q(x) = ...
- Ανάλυση σε απλά κλάσματα
Σύγκριση πολυωνύμων
P(x) = R(x)·Q(x)
Εύρεση συντελεστών απλών κλασμάτων
ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ απλών κλασμάτων
Output