

Αναδρομικές σχέσεις

$$I_n = \int x^n e^{\alpha x} dx$$

$$I_0 = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{\alpha} \int x^n d(e^{\alpha x}) dx = \\ &= \frac{1}{\alpha} x^n e^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} e^{\alpha x} dx \end{aligned}$$

$$I_n = \frac{1}{\alpha} x^n e^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha} I_{n-1}$$

κατασκευάζουμε διαδοχικά το I_1, I_2, \dots, I_n

Αναδρομικές σχέσεις

$$S_n = \int x^n \sin(\alpha x + \beta) dx \quad S_0 = -\frac{\cos(\alpha x + \beta)}{\alpha}$$

$$C_n = \int x^n \cos(\alpha x + \beta) dx \quad C_0 = \frac{\sin(\alpha x + \beta)}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} S_n &= -\frac{1}{\alpha} \int x^n d \cos(\alpha x + \beta) = \\ &= -\frac{1}{\alpha} x^n \cos(\alpha x + \beta) + \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} \cos(\alpha x + \beta) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{\alpha} \int x^n d \sin(\alpha x + \beta) = \\ &= \frac{1}{\alpha} x^n \sin(\alpha x + \beta) - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} \sin(\alpha x + \beta) dx \end{aligned}$$

$$S_n = -\frac{1}{\alpha} x^n \cos(\alpha x + \beta) + \frac{n}{\alpha} C_{n-1}$$

$$C_n = \frac{1}{\alpha} x^n \sin(\alpha x + \beta) - \frac{n}{\alpha} S_{n-1}$$

κατασκευάζουμε διαδοχικά τα

$S_0, C_0, S_1, C_1, S_2, C_2, \dots, S_n, C_n,$

Ιδιότητες τριγωνομετρικών- υπερβολικών συναρτήσεων

$$\cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \\ &= \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{8} + \frac{3}{8} (e^{ix} + e^{-ix}) = \\ &= \frac{\cos 3x}{4} + \frac{3 \cos x}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sinh 5x}{\sinh x} &= \frac{(e^x)^5 - (e^{-x})^5}{e^x - e^{-x}} = \\ &= (e^x)^4 + (e^x)^3 (e^{-x}) + (e^x)^2 (e^{-x})^2 + \\ &\quad + (e^x) (e^{-x})^3 + (e^{-x})^4 = \\ &= 2 \cosh 4x + 2 \cosh 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\begin{aligned} \int \sin(ax) \cos(bx) dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin(a + b)x + \sin(a - b)x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \cos(ax) \cos(bx) dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int (\cos(a - b)x + \cos(a + b)x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin(ax) \sin(bx) dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int (\cos(a - b)x - \cos(a + b)x) dx \end{aligned}$$

“ Προσδιοριστέοι συντελεστές ”:

$$I = \int P(x) e^{\alpha x} dx \quad P(x) \text{ πολυώνυμο βαθμού } n$$

$$\int P(x) e^{\alpha x} dx = R(x) e^{\alpha x} + c$$

$$\frac{d(R(x)e^{\alpha x})}{dx} = P(x)e^{\alpha x} \rightsquigarrow R'(x) + \alpha R(x) = P(x)$$

πχ

$$\int x^2 e^{3x} dx = (Ax^2 + Bx + C) e^{3x} + c$$

$$\frac{d\{(Ax^2 + Bx + C) e^{3x}\}}{dx} = x^2 e^{3x}$$

$$(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} 3A = 1 \\ 2A + 3B = 0 \\ B + 3C = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{2}{9}, \quad C = \frac{2}{27}$$

Προσδιοριστέοι συντελεστές

$$I = \int P(x) e^{\alpha x} dx \quad P(x) \text{ πολυώνυμο βαθμού } n$$

Κάνοντας μια ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned} I &= \int P(x) e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \int P(x) d e^{\alpha x} = \\ &= \frac{1}{\alpha} P(x) e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int P'(x) e^{\alpha x} dx \end{aligned}$$

Το $P'(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n - 1$. Επαναλαμβάνοντας την ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\alpha} \underbrace{P(x)}_{\text{πολ. βαθμού } n} e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int P'(x) e^{\alpha x} dx = \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha} P(x) - \frac{1}{\alpha^2} P'(x) \right)}_{\text{πολ. βαθμού } n-1} e^{\alpha x} + \frac{1}{\alpha^2} \int P''(x) e^{\alpha x} dx \\ &= \dots \text{ κλπ κλπ} = \\ &= R(x) e^{\alpha x} + c \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow R(x)$ πολυώνυμο βαθμού n

$$\frac{d(R(x)e^{\alpha x})}{dx} = P(x)e^{\alpha x} \rightsquigarrow R'(x) + \alpha R(x) = P(x)$$

Προσδιοριστέοι συντελεστές

$$S_n = \int x^n \sin(\alpha x + \beta) dx$$

$$S_n = P_n(x) \sin(\alpha x + \beta) + Q_n(x) \cos(\alpha x + \beta)$$

$P_n(x)$, $Q_n(x)$ πολυώνυμα βαθμού n

$$\begin{aligned} x^n \sin(\alpha x + \beta) &= \\ &= \frac{d}{dx} \{P_n(x) \sin(\alpha x + \beta) + Q_n(x) \cos(\alpha x + \beta)\} \end{aligned}$$

$$C_n = \int x^n \cos(\alpha x + \beta) dx$$

$$C_n = \tilde{P}_n(x) \sin(\alpha x + \beta) + \tilde{Q}_n(x) \cos(\alpha x + \beta)$$

$\tilde{P}_n(x)$, $\tilde{Q}_n(x)$ πολυώνυμα βαθμού n

$$\begin{aligned} x^n \cos(\alpha x + \beta) &= \\ &= \frac{d}{dx} \{ \tilde{P}_n(x) \sin(\alpha x + \beta) + \tilde{Q}_n(x) \cos(\alpha x + \beta) \} \end{aligned}$$

Προσδιοριστέοι συντελεστές

$$\begin{aligned} \int x^n e^{bx} \sin ax dx &= \\ &= P_n(x) e^{bx} \sin ax + Q_n(x) e^{bx} \cos ax \\ \int x^n e^{bx} \cos ax dx &= \\ &= R_n(x) e^{bx} \sin ax + S_n(x) e^{bx} \cos ax \end{aligned}$$

Υπολογισμός του $\int x^2 e^{5x} \sin^3(2x) \cos^3 x dx$

1⁰ βήμα: Αναλύω το $\sin^3(2x) \cos^3 x$ σε άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων

2⁰ βήμα: Υπολογίζω ολοκληρώματα της μορφής $\int P(x) e^{bx} \sin ax dx$ και $\int Q(x) e^{bx} \cos ax dx$ με προσδιοριστέους συντελεστές