

### Θεωρήματα Μέσης Τιμής

$$(1) a > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n+a}}^{\frac{1}{n}} \underbrace{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}_{f(x)} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x)} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) \int_{\frac{1}{n+a}}^{\frac{1}{n}} g(x) dx =$$

$$a, \quad \xi_n \in \left[\frac{1}{n+a}, \frac{1}{n}\right]$$

$$(2) f(x) \text{ συνεχής γύρω από το } 0, a > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{(n+a)^2}}^{\frac{1}{n^2}} \frac{f(x)}{x^{3/2}} dx = 2af(0)$$

(3) "συνάρτηση δέλτα"

$$f(x) \text{ συνεχής γύρω από το } 0, D_n(x) \geq 0 \text{ και } D_n(x) = 0 \text{ όταν } x \notin$$

$$\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \text{ και } \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} D_n(x) dx = 1 \text{ τότε } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} D_n(x) f(x) dx = f(0)$$

(4) **Θεώρημα Bonnet**

$f(x) \geq 0, f(a) \neq 0$  και φθίνουσα στο  $[a, b]$  ( $\rightsquigarrow$  ολοκληρώσιμη),  
 $g(x)$  ολοκληρώσιμη και σταθερού προσήμου, τότε

$$\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx$$

$$(5) f(a) > a > 0 \text{ και } \int_a^b f(x) dx < \frac{b^2-a^2}{2} \text{ τότε } \exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \xi$$

(Σημ: Θέτουμε  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ )

$$(6) f(x), g(x) \text{ συνεχείς για } x \in [0, 1] \text{ και } f(x) > 0, g(x) < 0 \text{ τότε}$$

$$\exists \xi \in [0, 1] : \int_0^\xi f(x) dx + \int_1^\xi g(x) dx = 0$$

$$(7) \exists f''(x) \text{ και } f(a) = f(b) = k \text{ και } \int_a^b f(x) dx = k(b-a) \text{ τότε η}$$

$$f'(x) \text{ έχει δύο ρίζες και } \exists \xi \in (a, b) : f''(\xi) = 0$$

$$(8) f(x) \text{ συνεχής στο } [a, b] \text{ και } f(a) > 0 \text{ και } \int_a^b f(x) dx < 0 \text{ τότε (α)}$$

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = 0 \text{ και } \exists \xi \in (a, b) : \int_a^\xi f(x) dx = 0$$