Ασκηση 1: Δεν υπάρχει το ολοκλήρωμα Riemann για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{για } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{για } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad 0 \le x \le 1$$

Ασκηση 2: Δεν υπάρχει το ολοκλήρωμα Darboux για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]} & \text{για } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{για } x = 0 \end{cases}$$

Ασκηση 3: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό ολοκληρώματος Riemann αποδείξτε ότι ($c \neq 0$):

$$(\mathbf{a}) \int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx \qquad (\mathbf{b}) \int_{ac}^{bc} f(x)\,dx = c\int_a^b f(cx)\,dx$$

Ασκηση 4: Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ \\ x & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

για $0 \le x \le 1$ δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Αποδ: Εστω μια διαμέριση

$$P = \{x_0 = 0,\, x_1,\, x_2, \ldots, x_{n-1},\, x_n = 1\}, \quad I_k = [x_{k-1},\, x_k], \quad \triangle x_k = x_k - x_{k-1}$$

$$m_k = \inf\{f(x),\ x \in I_k\}, \quad M_k = \sup\{f(x),\ x \in I_k\}$$

Γενικά θα έχουμε

$$M_k = \max\left\{\underbrace{\sup\left\{f(x),\ x \in I_k \bigcap \mathbb{Q}\right\}}_{=1}, \underbrace{\sup\left\{f(x),\ x \in I_k \bigcap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\right\}}_{=x_k}\right\} = 1$$

Οπότε

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k = \sum_{k=1}^{n} \triangle x_k = x_n - x_0 = 1$$

$$m_k = \min\left\{\underbrace{\inf\left\{f(x),\ x \in I_k \bigcap \mathbb{Q}\right\}}_{=1}, \underbrace{\inf\left\{f(x),\ x \in I_k \bigcap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\right\}}_{=x_{k_1}}\right\} = x_{k-1}$$

Αν θέσουμε $g(x) = x$ τότε $\inf\{g(x),\, x \in I_k\} = x_{k-1}$
Οπότε

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \triangle x_k = L(P,g) \le L(g) = \int_0^1 g(x)\, dx = \frac{1}{2}$$

Οπότε θα έχουμε

$$\forall P:\ U(P,f) - L(P,f) \ge \frac{1}{2}$$

Αρα $\boxed{\textbf{δεν}}$ υπάρχει το ολοκλήρωμα Darboux (βλέπε: Πρόταση 6 στις διαφάνειες)

Ασκηση 5: Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ \\ x^2 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

για $0 \le x \le 1$ δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Αποδ: Παρόμοια όπως προηγούμενα για μια διαμέριση:

$$M_k = \max\left\{ \underbrace{\sup\left\{ f(x),\ x \in I_k \bigcap \mathbb{Q} \right\}}_{=x_k}, \underbrace{\sup\left\{ f(x),\ x \in I_k \bigcap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \right\}}_{=x_k^2} \right\} = x_k$$

Οπότε

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \triangle x_k \underbrace{=}_{g(x)=x} U(P,g) \ge U(g) \equiv \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$$

Ομοια έχουμε:

$$m_k = \min\left\{ \underbrace{\inf\left\{ f(x),\ x \in I_k \bigcap \mathbb{Q} \right\}}_{=x_{k-1}}, \underbrace{\inf\left\{ f(x),\ x \in I_k \bigcap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \right\}}_{=x_{k-1}^2} \right\} = x_{k-1}^2$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \triangle x_k \underbrace{=}_{h(x)=x^2} L(P,h) \le L(h) \equiv \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$$

Οπότε θα έχουμε

$$\forall P:\ U(P,f) - L(P,f) \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Αρα $\boxed{\textbf{δεν}}$ υπάρχει το ολοκλήρωμα Darboux (βλέπε: Πρόταση 6 στις διαφάνειες)

Ασκηση 6: Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x)\begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ \\ 1-x & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

για $0 \leq x \leq 1$ δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Ασκηση 7: Να υπολογισθεί το όριο: $\lim\limits_{n\to 0} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(2\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{k}{n} \right)$

Αποδ: Εστω μια διαμέριση

$$P_n = \{x_0 = 0,\, x_1,\, x_2, \ldots, x_{n-1},\, x_n = 1\}, \quad x_k = \frac{k}{n}, \quad \triangle x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(2\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{k}{n} \right) = \lim_{n\to 0} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{n}}_{=\triangle x_k} \underbrace{f\left(x_k\right)}_{f(x)=2x^2+x} = \int\limits_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{6}$$

Εφαρμόσαμε το "Θεώρημα Darboux" (βλέπε Πρόταση 11)

Ασκηση 8: Να υπολογισθεί το όριο: $\lim\limits_{n\to 0} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(5 + \frac{3k}{n}\right)^4$

Αποδ:

$$\lim_{n\to 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(5 + \frac{3k}{n}\right)^4 = \lim_{n\to 0} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{n}}_{=\triangle x_k} \underbrace{f\left(x_k\right)}_{f(x)=(5+3x)^4} = \int\limits_0^1 f(x)\,dx = \frac{8^5-5}{15}$$

Ασκηση 9: Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{n\to 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1+2n}{k-1+n} = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k-1}{n}+2}{\frac{k-1}{n}+1} = \int\limits_0^1 \frac{x+2}{x+1}\,dx = 1 + \ln 2$$

Ασκηση 10: p και q θετικοί αριθμοί και $0 \leq x \leq 1$. Αποδείξτε ότι:

(α′) Αν $f(x)$ γνήσια φθίνουσα για $0 \leq x \leq 1$, τότε και $f^{-1}(x)$ γνήσια φθίνουσα

(β′) Αν $f(0) = 1$ και $f(1) = 0$ τότε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες θέτοντας $t = f(x)$ αποδείξτε ότι:
$$\int\limits_0^1 f^{-1}(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(t)\,dt$$

(γ′) Αν $f(x) = (1-x^p)^{1/q}$ τότε $f^{-1}(x) = (1-x^q)^{1/p}$

(δ′) $\int\limits_0^1 (1-x^p)^{1/q}\, dx = \int\limits_0^1 (1-x^q)^{1/p}\, dx$

Ασκηση 11: Αν $f(x)$ συνεχής και $\int\limits_0^1 f(xt)\,dt = 0$ για κάθε x, δείξτε ότι: $f(x)=0$

Ασκηση 12: Αν $f(x)$ συνεχής και περιοδική $f(x+T)=f(x)$.

(α′) Θέτουμε $g(x) = f(x) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt$. Τότε $\int\limits_0^T g(x)\,dx = 0$

(β′) Η $h(x) = \int\limits_0^x g(t)\,dt$ είναι περιοδική $g(x)=g(x+T)$