ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Ορισμός $\boxed{\text{Δυναμοσειρά}: \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}$

Πρόταση 11

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Αν για } x = x_0 \text{ η σειρά } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n \text{ συγκλίνει} \\ \text{τότε η σειρά } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε } |x| < |x_0|\end{array}}$$

Αποδ. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ συγκλίνει $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0 \Rightarrow$

$$\exists\, n_0 \,:\, n > n_0 \;\rightsquigarrow\; |a_n x_0^n| < \frac{1}{2} \;\Rightarrow$$

$$\forall\, |x| < |x_0| \;\rightsquigarrow\; |a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \;\Rightarrow$$

$$|x| < |x_0| \;\rightsquigarrow\; \sum_{n>n_0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \quad \text{συγκλίνει} \;\Rightarrow$$

$$\text{M-test} \;\Rightarrow\; \sum_{n>n_0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

$$\boxed{\diamond \text{ Συκλιση στο σημείο } x_0 \Rightarrow \text{ομοιόμορφη σύγκλιση για } |x| < |x_0|}$$

$$\boxed{R = \sup\{|x_0| \,:\, \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n \text{ συγκλίνει}\}}$$

Ορισμός $\boxed{R \text{ ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης δυναμοσειράς } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}$

$$\forall\, x \in (-R,\, R) \;\rightsquigarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n| \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά}$$

$$x = \pm R \;\rightsquigarrow\; \text{ η σειρά } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\pm R\right)^n \text{ είτε συγκλίνει, είτε δεν συγκλίνει}$$

$$\forall\, x \notin (-R,\, R) \;\rightsquigarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \textbf{δεν } \text{συγκλίνει η σειρά}$$

Παράδειγματα: Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ έχει ακτίνα σύγκλισης ∞

Σημείωση Συνήθως (ΟΧΙ ΠΑΝΤΑ!!!) η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς βρίσκεται εφαρμόζοντας

είτε το **κριτήριο του λόγου**

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| < 1 \;\rightsquigarrow\; |x| < R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

είτε το **κριτήριο της ρίζας**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\; |x| < 1 \;\rightsquigarrow\; |x| < R = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Πρόταση 12

Αν η δυναμοσειρά

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα για } |x| < R$$

$$\Downarrow$$

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα για } |x| < R \;\rightsquigarrow$$

$$\text{και} \quad S'(x) = s(x)$$

Αποδ. Αφού η σειρά $S(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $|x| < R$, τότε για ένα x_0 με $|x| < |x_0|$ (όπως στην πρόταση 11) μπορούμε να διαλέξουμε ένα n_0 τέτοιο ώστε

$$n > n_0 \;\rightsquigarrow\; |a_n x_0^n| < \frac{1}{2} \;\rightsquigarrow\; |n a_n x^n| < \frac{1}{2} n \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

Αλλά η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επομένως η σειρά $s(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Η σχέση $S'(x) = s(x)$ από την πρόταση 10.

Παράδειγμα: Γεωμετρική σειρά $\rightsquigarrow \dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ για $|x| < 1$.

Πρόταση 13

Αν η δυναμοσειρά

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{συγκλίνει απόλυτα για } |x| < R \ \Rightarrow$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n+1}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για $|x| < R$

$$\text{και} \quad S(x) = \int_0^x s(t)\,dt$$

Ιδια απόδειξη όπως προηγούμενα.

Ασκήσεις

1) Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad \text{για} \quad |x| < 1$$

2) Να αποδειχθεί ότι

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{για} \quad |x| < 1$$

3) Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = 1 + \left(-1 + \frac{1}{x}\right) \log(1-x)$$

4) Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{-2\,x + (-2+x)\,\log(1-x)}{x^2}$$

5) Να αποδειχθεί ότι

$$\arctan\, x \,= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{1+2\,n}}{1+2\,n}$$