ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Ορισμός Δυναμοσειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

Πρόταση 11

Αν για $x = x_0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $|x| < |x_0|$

$\diamond$ Συκλιση στο σημείο $x_0 \Rightarrow$ ομοιόμορφη σύγκλιση για $|x| < |x_0|$

$$R = \sup\{|x_0| \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n \text{ συγκλίνει}\}$$

Ορισμός

$$\boxed{\begin{array}{c} R \text{ ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης} \\ \text{δυναμοσειράς } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \end{array}}$$

$$\forall\, x \in (-R,\ R) \ \rightsquigarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n| \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά}$$

$x = \pm R \ \rightsquigarrow$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,(\pm R)^n$ είτε συγκλίνει, είτε δεν συγκλίνει

$$\forall\, x \notin (-R,\ R) \ \rightsquigarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \textbf{δεν} \text{ συγκλίνει η σειρά}$$

Παράδειγματα: Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1.

Σημείωση Συνήθως (ΟΧΙ ΠΑΝΤΑ!!!) η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς βρίσκεται εφαρμόζοντας

είτε το **κριτήριο του λόγου**

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| < 1 \ \rightsquigarrow \ |x| < R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

είτε το **κριτήριο της ρίζας**

$$\lim_{n\to\infty} \ \sqrt[n]{|a_n|}\ |x| < 1 \ \rightsquigarrow \ |x| < R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \ \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Πρόταση 12

Αν η δυναμοσειρά

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ a_n x^n \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα για } |x| < R$$

$$\Downarrow$$

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ n a_n x^n \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα για } |x| < R$$

$$\text{και} \quad S'(x) = s(x)$$

Πρόταση 13

Αν η δυναμοσειρά

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{συγκλίνει απόλυτα για } |x| < R \ \Rightarrow$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για $|x| < R$

και $\quad S(x) = \int_0^x s(t)\, dt$