## ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ

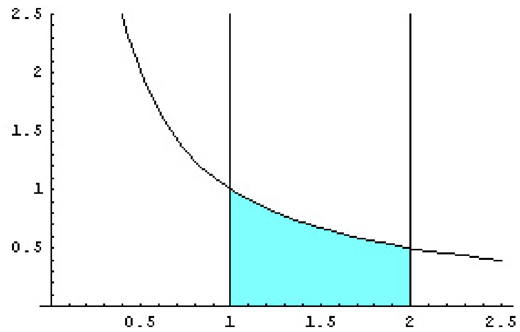
◊ εμβαδόν μεταξύ μιας καμπύλης με $y = f(x) \geq 0$ και του άξονα $Ox$

$$\boxed{S = \int_{x=a}^{x=b} y\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx}$$

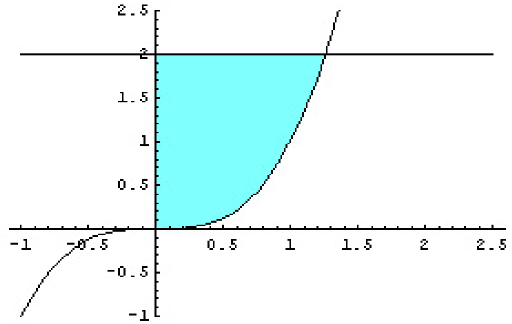
◊ εμβαδόν μεταξύ μιας καμπύλης με $y = f(x)$ και μιας καμπύλης $y = g(x)$

$$\boxed{S = \int_{x=a}^{x=b} |f(x) - g(x)|\;dx}$$

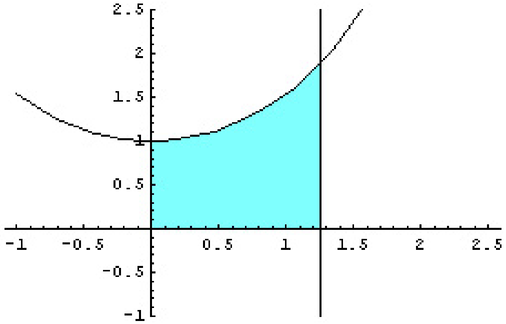
Εμβαδόν που περικλείεται από την υπερβολή $xy = a^2$, τόν άξονα $0x$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = 2a$




Εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^3$, τον άξονα $Oy$ και την ευθεία $y = 2$



Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = a\cosh(x/a)$, τον άξονα $Ox$, από το σημείο $O$ ως και την ευθεία $x = b$



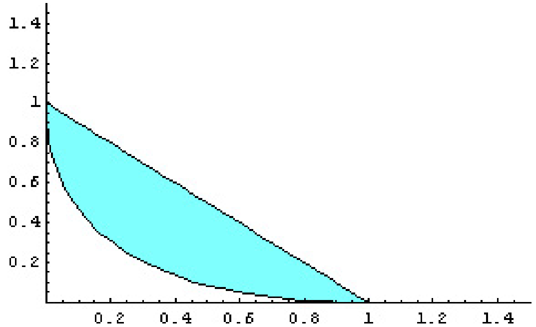

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ – ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

$\Diamond\ x = x(t),\ y = y(t) \geq 0\ \alpha \leq t \leq \beta$

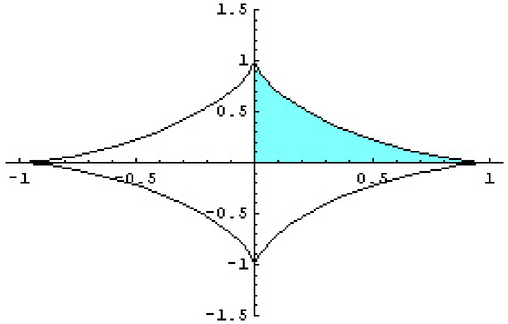
$$\rightsquigarrow \boxed{S = \int_{x=\min(x(\alpha),x(\beta))}^{x=\max(x(\alpha),x(\beta))} y\,dx = \left|\int_{t=\alpha}^{t=\beta} y(t)dx(t)\right|}$$

Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$, και την ευθεία $x + y = a$

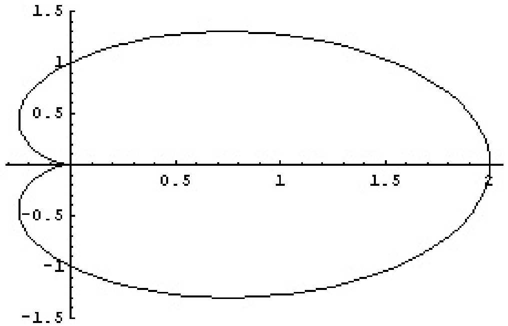
( Θέσατε $x = a\cos^4 t,\ x = a\sin^4 t, \pi/2 \geq t \geq 0$ )



Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την υποκυκλοειδή $x = a\cos^3 t$ $y = a\sin^3 t$




Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καρδιοειδή $r = f(\theta) = a\,(1 + \cos\,\theta)$




**ΜΗΚΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ**

$\Diamond$ $x = x(t),\ y = y(t)\ \alpha \le t \le \beta$

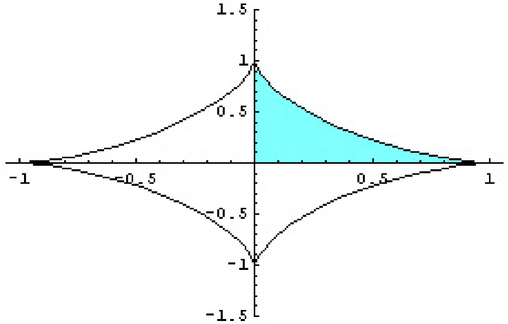
$$L = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$L = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

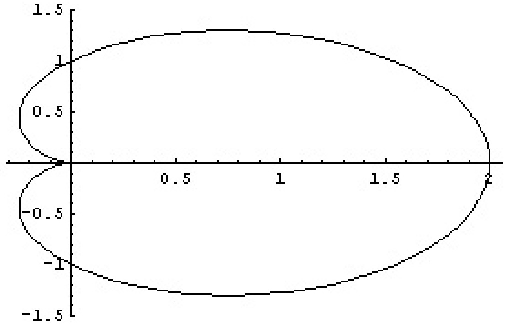
$\Diamond$ $r = f(\theta)$

$$L = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \sqrt{\left(f'(\theta)\right)^2 + (f(\theta))^2}\, dx$$

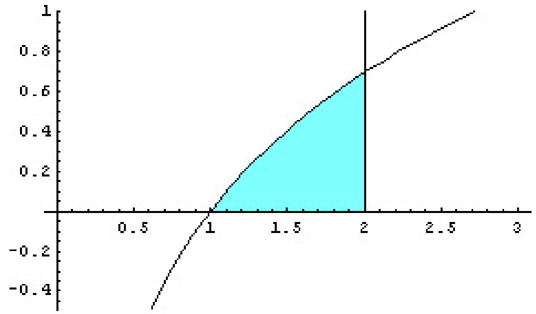
Μήκος υποκυκλοειδούς $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$



Μήκος καρδιοειδούς $r = f(\theta) = a\,(1 + \cos\,\theta)$



Να βρεθεί το εμβαδόν και το μήκος της καμπύλης $y = \ln\,x$ για $1 \leq x \leq a$.



**ΟΓΚΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΤΟΜΩΝ**

$\Diamond$ $S = S(x)$ εμβαδόν μιας παράλληλης τομής.

$$\text{όγκος} \quad V = \int_a^b S(x)\, dx$$

$\Diamond$ Αν έχουμε ένα σώμα παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $y = f(x)$ έχει εμβαδόν μιας παράλληλης τομής $S = \pi y^2 = \pi f^2(x)$

$$\text{όγκος} \quad V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

Να υπολογισθεί ο όγκος του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

($V = 4\pi abc/3$)

Να υπολογισθεί ο όγκος της αλλυσοειδούς που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης $y = a \cosh(x/a)$ για $0 \leq x \leq b$

($V = \frac{\pi a^3}{4} \sinh(2b/a) + \pi a^2 b/2$)

Να υπολογισθεί ο όγκος του σώματος που προκύπτει από την περιστροφή του κυκλοειδούς

$$x = a(t - \sin t) \quad y = a(1 - \cos t) \quad 0 \leq 0 \leq 2\pi$$

γύρω από τον άξονα $Ox$. ($V = 3\pi a^2$)

**ΕΜΒΑΔΟΝ ΣΩΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ**

◊ Αν έχουμε ένα σώμα παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $y = f(x) \geq 0$ η επιφάνεια δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}$$

Αν $y = f(x)$

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

Αν $x = x(t),\ y = y(t)$

$$\boxed{S = 2\pi \int_{t_m}^{t_M} y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt}$$

Να υπολογισθεί το εμβαδόν του παραβολοειδούς που δημιουργείται από την καμπύλη $y^2 = 2\pi x$, $0 \leq x \leq a$