ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός

$f(x)$ $\boxed{\text{¨τοπικά¨ ολοκληρώσιμη}}$ στο $(a,\,b)$ $\boxed{\text{αν}}$ για κάθε κλειστό $[c,\,d] \subset (a,\,b)$ η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη.

πχ $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ είναι ¨τοπικά¨ ολοκληρώσιμη στο $[0,\infty)$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ είναι ¨τοπικά¨ ολοκληρώσιμη στο $(0,1)$

Ορισμός

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα για μια τοπικά ολκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ υπάρχει αν μπορούμε να βρούμε τα όρια για κάθε $u \in (a,,b)$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{ορ}}{\equiv} \lim_{c\to a}\int\limits_c^u f(x)\,dx + \lim_{d\to b}\int\limits_u^b f(x)\,dx$$

πχ **ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Α΄ ΕΙΔΟΥΣ** $a = -\infty$ ή (και) $b = \infty$

$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ είναι ¨τοπικά¨ ολοκληρώσιμη στο $[0,\infty)$

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim_{d\to\infty}\int\limits_0^d \mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim_{d\to\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-d}\right) = 1$$

πχ **ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Β΄ ΕΙΔΟΥΣ** στο ένα ή και στα δύο όρια της ολοκλήρωσης η συνάρτηση δεν ορίζεται.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ είναι ¨τοπικά¨ ολοκληρώσιμη στο $(0,1)$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} \overbrace{=}^{x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin t} = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{1}{2}\cos t}{\frac{1}{2}\cos t}dt = \pi$$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ Α΄ ΕΙΔΟΥΣ

Θεωρούμε ολοκληρώματα το είδους $f(x)$ τοπικά ολοκληρώριμη, $F(u) = \int\limits_a^u f(x)\,dx$ και

$$\lim_{u\to\infty} F(u) \equiv \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ Cauchy

Υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\Leftrightarrow$ η συνάρτηση $F(u)$ ικανοποιεί μια συνθήκη Cauchy για $u \to \infty$

$$\forall\,\epsilon\;\exists\,R > 0\;:\; x_2 > x_1 > R\;\Rightarrow\;|F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| < \epsilon$$

Παράδειγμα: Ολοκλήρωμα $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\,x}{x}\,dx$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sin\,x}{x}\,dx = -\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{d\cos\,x}{x} = \frac{\cos\,x_1}{x_1} - \frac{\cos\,x_2}{x_2} + \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\cos\,x}{x^2}\,dx$$

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sin\,x}{x}\,dx\right| \le \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{|\cos\,x|}{x^2}\,dx \le \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x^2}\,dx \le \frac{2}{x_1}$$

$$\forall\,\epsilon\;\exists\,R = \frac{2}{\epsilon}\;:\; x_2 > x_1 > R\;\Rightarrow\;\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sin\,x}{x}\,dx\right| \le \frac{2}{x_1} < \epsilon$$

Απόλυτη σύγκλιση $\Rightarrow$ **σύγκλιση**

$$\exists\int\limits_a^\infty |f(x)|\;dx\;\Rightarrow\;\exists\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$$

Αποδ.:

$$\exists \int_a^\infty |f(x)|\,dx$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \epsilon\, \exists R>0\ :\ x_2>x_1>R\ \Rightarrow\ \left|\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx\right| < \epsilon$$
$$\Downarrow$$
$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| \le \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \epsilon\, \exists R>0\ :\ x_2>x_1>R\ \Rightarrow\ \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| < \epsilon \Downarrow$$
$$\exists \int_a^\infty f(x)\,dx$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Μπορεί να υπάρχει σύγκλιση αλλά όχι απόλυτη σύγκλιση πχ. το $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ υπάρχει αλλά **δεν** υπάρχει το $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$

$$\int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int_a^\infty \frac{dx}{x}}_{\nexists} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_a^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx}_{\exists}$$

Κριτήριο σύγκρισης

$$\boxed{\begin{gathered} 0 \le f(x) \le g(x) \quad \text{για} \quad x>a \\ \exists \int_a^\infty g(x)\,dx \ \Rightarrow\ \exists \int_a^\infty f(x)\,dx \\ \nexists \int_a^\infty f(x)\,dx \ \Rightarrow\ \nexists \int_a^\infty g(x)\,dx \end{gathered}}$$

Αποδ.: Η απόδειξη στηρίζεται στην σύγκλιση Cauchy και στο γεγονός ότι

$$0 \le \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \le \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx$$

πχ το ολοκλήρωμα $\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}}dx$ δεν υπάρχει γιατί $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}}$ και το $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x+1}dx$ δεν υπάρχει.

$\rightsquigarrow$ **ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΝΟΝΤΑΙ ΣΤΟ** ∞

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞ αν

$$\exists \int\limits_a^\infty |f(x)|dx \quad \text{για κάποιο } a > 0$$

$$\boxed{|f(x)| < Cx^p \mathrm{e}^{-x} \text{ για μεγάλα } x}$$

Αποδ.: Αν $p \leq 0$ τότε για $x > a > 1 \rightsquigarrow$

$$x^p \mathrm{e}^{-x} < \underbrace{a^p \mathrm{e}^{-x}}_{\text{ολοκληρώσιμη στο } [a,\infty)}$$

οπότε $\exists \int\limits_a^\infty |f(x)|dx \leq Ca^p \int\limits_a^\infty \mathrm{e}^{-x}dx$

Αν $p > 0$ τότε η συνάρτηση $g(x) = x^p \mathrm{e}^{-x/2}$ έχει μέγιστο για $x = 2p$ οπότε

$$|f(x)| < \underbrace{(2p)^p \mathrm{e}^{-p} \mathrm{e}^{-x/2}}_{\text{ολοκληρώσιμη στο } [a,\infty)}$$

πχ η $x^2 \sin x \mathrm{e}^{-x}$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞

$$\boxed{|f(x)| < \frac{C}{x^q}, \quad q > 1 \text{ για μεγάλα } x}$$

Αποδ.: Η συνάρτηση $\frac{C}{x^q}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[1, \infty)$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{q-1}$$

πχ η $\frac{\sin x^5}{x^{3/2}}$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞

Οριακό κριτήριο σύγκλισης

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \leq f(x) \quad \text{και} \quad 0 < g(x) \quad \text{για} \quad x > a \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell \geq 0 \\ \text{(1) } 0 < \ell < \infty \ \rightsquigarrow \ \exists \displaystyle\int\limits_a^\infty g(x)\,dx \Leftrightarrow \exists \int\limits_a^\infty f(x)\,dx \\ \text{(2) } \ell = 0 \ \rightsquigarrow \ \exists \displaystyle\int\limits_a^\infty g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int\limits_a^\infty f(x)\,dx \\ \text{(3) } \ell = \infty \ \rightsquigarrow \ \displaystyle\int\limits_a^\infty g(x)\,dx = \infty \Rightarrow \exists \int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \infty \end{array}}$$

Αποδ.:

(1) Για μεγάλα $x > R$ έχουμε $\frac{\ell}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3\ell}{2}$ επομένως

$$\frac{\ell}{2}g(x) < f(x) \ \rightsquigarrow \ \exists \int\limits_R^\infty f(x)\,dx \ \Rightarrow \ \exists \int\limits_R^\infty g(x)\,dx$$

$$f(x) < \frac{3\ell}{2}g(x) \ \rightsquigarrow \ \exists \int\limits_R^\infty g(x)\,dx \ \Rightarrow \ \exists \int\limits_R^\infty f(x)\,dx$$

(2) Για μεγάλα $x > R$ έχουμε $\frac{f(x)}{g(x)} < \frac{1}{2}$ επομένως

$$f(x) < \frac{1}{2}g(x) \ \rightsquigarrow \ \exists \int\limits_R^\infty g(x)\,dx \ \Rightarrow \ \exists \int\limits_R^\infty f(x)\,dx$$

(3) Για μεγάλα $x > R$ έχουμε $1 < \frac{f(x)}{g(x)}$ επομένως

$$g(x) < f(x) \ \rightsquigarrow \ \int\limits_R^\infty g(x)\,dx = \infty; \Rightarrow \ \int\limits_R^\infty f(x)\,dx = \infty$$

πχ Αν $0 < \alpha < 2\beta - 1$ τότε $\exists \displaystyle\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{(1+x^2)^\beta}\,dx$

Ολοκληρωτικό κριτήριο Cauchy

Αν $f(x) > 0$ συνεχής και φθίνουσα στο $[m, \infty)$ τότε

$$\exists \int\limits_m^\infty f(x)\,dx \ \Leftrightarrow \ \sum_{k\geq m}^\infty f(k) < \infty$$

Αποδ.: $f(x) > 0$ συνεχής και φθίνουσα $\rightsquigarrow$

$$k < x < k{+}1 \ \Rightarrow \ f(\underbrace{k+1}_{=\ell}) \leq f(x) \leq f(k) \ \Rightarrow \ \sum_{\ell=q+1}^{\ell=p+1} f(\ell) \leq \int\limits_q^p f(x)\,dx \leq \sum_{k=q}^{k=p} f(k)$$

Οπότε αν $S_n = \sum\limits_{k=m}^{k=n} f(k)$ Cauchy τότε $F(x) = \int\limits_m^x f(t)\,dt$ Cauchy και αντίστροφα.

πχ. Η $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$ συγκλίνει για $s > 1$ γιατί το ολοκλήρωμα $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$ υπάρχει.