ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός

$f(x)$ $\boxed{\text{¨τοπικά¨ ολοκληρώσιμη}}$ στο $(a,\, b)$ $\boxed{\text{αν}}$ για κάθε κλειστό $[c,\, d] \subset (a,\, b)$ η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη.

πχ $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ είναι ¨τοπικά¨ ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ είναι ¨τοπικά¨ ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$

Ορισμός

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα για μια τοπικά ολκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ υπάρχει αν μπορούμε να βρούμε τα όρια για κάθε $u \in (a, , b)$

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \overset{\text{ορ}}{\equiv} \lim_{c \to a} \int\limits_c^u f(x)\, dx + \lim_{d \to b} \int\limits_u^b f(x)\, dx$$

πχ **ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Α΄ ΕΙΔΟΥΣ** $a = -\infty$ ή (και) $b = \infty$

$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ είναι ¨τοπικά¨ ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim_{d\to\infty}\int_0^d \mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim_{d\to\infty}\left(1 - \mathrm{e}^{-d}\right) = 1$$

πχ **ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Β΄ ΕΙΔΟΥΣ** στο ένα ή και στα δύο όρια της ολοκλήρωσης η συνάρτηση δεν ορίζεται.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ είναι ¨τοπικά¨ ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \underbrace{\quad=\quad}^{x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{1}{2}\cos t}{\frac{1}{2}\cos t}dt = \pi$$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ Α΄ ΕΙΔΟΥΣ

Θεωρούμε ολοκληρώματα το είδους $f(x)$ τοπικά ολοκληρώριμη, $F(u) = \int\limits_a^u f(x)\,dx$ και

$$\lim_{u\to\infty} F(u) \equiv \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ Cauchy

Υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\Leftrightarrow$ η συνάρτηση $F(u)$ ικανοποιεί μια συνθήκη Cauchy για $u \to \infty$ $$\forall\, \epsilon\ \exists\, R > 0\ :\ x_2 > x_1 > R\ \Rightarrow$$ $$\lvert F(x_2) - F(x_1) \rvert = \left\lvert \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right\rvert < \epsilon$$

Παράδειγμα: Ολοκλήρωμα $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\, x}{x}\,dx$

Απόλυτη σύγκλιση $\Rightarrow$ **σύγκλιση**

$$\boxed{\exists \int_a^\infty |f(x)|\, dx \;\Rightarrow\; \exists \int_a^\infty f(x)\, dx}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Μπορεί να υπάρχει σύγκλιση αλλά όχι απόλυτη σύγκλιση

πχ. $\exists \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ αλλά $\nexists \displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx$

Κριτήριο "σύγκρισης"

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \le f(x) \le g(x) \quad \text{για} \quad x > a \\[2ex] \exists \displaystyle\int_a^\infty g(x)\, dx \;\Rightarrow\; \exists \int_a^\infty f(x)\, dx \\[2ex] \nexists \displaystyle\int_a^\infty f(x)\, dx \;\Rightarrow\; \nexists \int_a^\infty g(x)\, dx \end{array}}$$

$\rightsquigarrow$ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΝΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ∞

$\boxed{f(x) < Cx^p e^{-x}}$ και $\boxed{f(x) < \dfrac{C}{x^q}, \quad q > 1}$

Οριακό κριτήριο σύγκλισης

$$0 \leq f(x) \quad \text{και} \quad 0 < g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \geq 0$$

1. $0 < \ell < \infty \;\rightsquigarrow\; \exists \int_a^\infty g(x)\,dx \;\Leftrightarrow\; \exists \int_a^\infty f(x)\,dx$

2. $\ell = 0 \;\rightsquigarrow\; \exists \int_a^\infty g(x)\,dx \;\Rightarrow\; \exists \int_a^\infty f(x)\,dx$

3. $\ell = \infty \;\rightsquigarrow\; \int_a^\infty g(x)\,dx = \infty \;\Rightarrow\; \exists \int_a^\infty f(x)\,dx = \infty$

Ολοκληρωτικό κριτήριο Cauchy

Αν $f(x) > 0$ συνεχής και φθίνουσα στο $[m, \infty)$ τότε

$$\exists \int_m^\infty f(x)\,dx \;\Leftrightarrow\; \sum_{k \geq m}^{\infty} f(k) < \infty$$