Βασική Ανισότητα

$$m \leq f(x) \leq M \rightsquigarrow \rightsquigarrow m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)$$

Ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \leq \sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)\,dx \right)}$$

Ανισότητα Minkowski

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx} \leq$$

$$\leq \sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right)} + \sqrt{\left(\int_a^b g^2(x)\,dx \right)}$$

Λήμμα

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι φραγμένη
σε ένα διάστημα $I = [c, d]$

$$\begin{aligned} m &= \inf\{f(x), x \in I\} \\ M &= \sup\{f(x), x \in I\} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\, u \in I \quad \forall\, v \in I \;\rightsquigarrow\; |f(u) - f(v)| \leq M - m$$

και

$$\boxed{\sup\{|f(u) - f(v)|\,,\; u \in I,\; v \in I\} = M - m}$$

Πρ. 13

$$\text{Αν } f(x) \text{ ολοκληρώσιμη στο } [a,\, b]$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Η } |f(x)| \text{ ολοκληρώσιμη στο } [a,\, b]$$

Πρ. 14

$$\text{Αν } f(x) \text{ και } g(x) \text{ ολοκληρώσιμες στο } [a,\, b]$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Η } f(x) \cdot g(x) \text{ ολοκληρώσιμη στο } [a,\, b]$$

Πρ. 15

$$\text{Αν } f(x) \text{ ολοκληρώσιμη στο } [a,\, b] \text{ και}$$
$$\inf \left\{ |f(x)|\,,\, x \in [a,\, b] \right\} > 0$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Η } \frac{1}{f(x)} \text{ ολοκληρώσιμη στο } [a,\, b]$$

Πρ. 16

$$\text{Αν } f(x) \text{ ολοκληρώσιμη και}$$
$$g(x) \text{ συνεχής στο } [a,\, b]$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Η } h(x) = g\left(f(x)\right) \text{ ολοκληρώσιμη στο } [a,\, b]$$

Βασική Ανισότητα

$$m \leq f(x) \leq M \rightsquigarrow \rightsquigarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Απόδειξη.

Από την Πρ. 12 (¨Θετικότηττα¨) αποδεικνύεται η βασική ανισότητα ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[a, b]$ □

Ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \leq \sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)\,dx \right)}$$

Απόδειξη.

Γιά κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq (\lambda f(x) + g(x))^2 = \lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x)g(x) + g^2(x) \rightsquigarrow$$
$$0 \leq \lambda^2 \int_a^b f^2(x)\,dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx \rightsquigarrow$$
$$\left(\lambda \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right) - \left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)\,dx \right) \leq 0$$

□

Ανισότητα Minkowski

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx} \leq$$
$$\leq \sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right)} + \sqrt{\left(\int_a^b g^2(x)\,dx \right)}$$

Απόδειξη.

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx =$$
$$= \int_a^b f^2(x)\,dx + 2\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx \leq$$
$$\leq \int_a^b f^2(x)\,dx + 2\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| + \int_a^b g^2(x)\,dx \underbrace{\leq}_{\text{Ανισότητα Cauchy-Schwartz}}$$
$$\leq \int_a^b f^2(x)\,dx + 2\sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)\,dx \right)} + \int_a^b g^2(x)\,dx =$$
$$= \left(\sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right)} + \sqrt{\left(\int_a^b g^2(x)\,dx \right)} \right)^2$$

□

Λήμμα

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι φραγμένη
σε ένα διάστημα $I = [c,\, d]$

$$\begin{aligned} m &= \inf\,\{f(x),\, x \in I\} \\ M &= \sup\,\{f(x),\, x \in I\} \end{aligned}$$
$$\Downarrow$$
$$\forall\, u \in I \quad \forall\, v \in I \;\rightsquigarrow\; |f(u) - f(v)| \leq M - m$$
και
$$\boxed{\sup\{|f(u) - f(v)|\,,\; u \in I,\; v \in I\} = M - m}$$

Απόδειξη.

$$\forall\, u \;\rightsquigarrow\; f(u) \leq M \quad \forall\, v \;\rightsquigarrow\; -f(v) \leq -m \quad \Rightarrow f(u) - f(v) \leq M - m \quad \text{και} \quad f(v) - f(u) \leq M - m$$
$$\Rightarrow\; |f(u) - f(v)| \leq M - m$$

$$M = \sup\,\{f(x),\, x \in I\} \;\rightsquigarrow\; \forall \epsilon > 0\, \exists\, u \,:\, M - \frac{\epsilon}{2} < f(u) \leq M$$
$$m = \inf\,\{f(x),\, x \in I\} \;\rightsquigarrow\; \forall \epsilon > 0\, \exists\, v \,:\, m \leq f(v) < m + \frac{\epsilon}{2} \;\rightsquigarrow\; -m - \frac{\epsilon}{2} < -f(v) \leq -m$$
$$\forall \epsilon > 0\, \exists\, u,\, v \;\rightsquigarrow\; M - m - \epsilon < f(u) - f(v) \leq |f(u) - f(v)|$$

Οπότε
$$\sup\{|f(u) - f(v)|\,,\; u \in I,\; v \in I\} = M - m$$

$\square$

Πρ. 13

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$

$\Downarrow$

Η $|f(x)|$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$

Απόδειξη.

Εστω $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$, $M_k^* = \sup\{|f(x)|,\ x \in I_k\}$ και $m_k^* = \inf\{|f(x)|,\ x \in I_k\}$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ τότε

$$|(|f(u)| - |f(v)|)| \le |f(u) - f(v)| \underbrace{\rightsquigarrow}_{\text{Λήμμα}} M_k^* - m_k^* \le M_k - m_k$$

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \triangle x_k \quad \text{και} \quad U(P,|f|) - L(P,|f|) = \sum_{k=1}^{n} (M_k^* - m_k^*) \triangle x_k$$

$$\Rightarrow U(P,|f|) - L(P,|f|) \le U(P,f) - L(P,f) \rightsquigarrow$$

Από την Πρ.6 έχουμε

$$f \text{ ολοκληρώσιμη} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists P : U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists P : U(P,|f|) - L(P,|f|) \le U(P,f) - L(P,f) < \epsilon \Rightarrow |f| \text{ ολοκληρώσιμη}$$

□

Πρ. 14

Αν $f(x)$ και $g(x)$ ολοκληρώσιμες στο $[a,\ b]$

$\Downarrow$

Η $f(x) \cdot g(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$

Απόδειξη.

Αν $|f(x)| < B_f$ και $|g(x)| < B_g$ τότε αν $x \in [x_{k-1}, x_k]$ και $y \in [x_{k-1}, x_k]$.
Εστω $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$,

$$|(f(x)g(x) - f(y)g(y))| \le |f(x)(g(x) - g(y)) + (f(x) - f(y))g(y)| \le B_f|g(x) - g(y)| + B_g|f(x) - f(y)|$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Λήμμα}} |(f(x)g(x) - f(y)g(y))| \le B_f\left(M_k^g - m_k^g\right) + B_g\left(M_k^f - m_k^f\right)$$

όπου

$$M_k^f = \sup\{f(x),\ x_{k-1} \le x \le x_k\}, \quad M_k^g = \sup\{g(x),\ x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

$$m_k^f = \inf\{f(x),\ x_{k-1} \le x \le x_k\}, \quad m_k^g = \inf\{g(x),\ x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

άρα

$$M_k^{fg} - m_k^{fg} = \sup\{|(f(x)g(x) - f(y)g(y))|,\ x,\ y \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$f \text{ ολοκληρώσιμη} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists P_1 : U(P_1,f) - L(P_1,f) < \frac{\epsilon}{B_g}$$

$$g \text{ ολοκληρώσιμη} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists P_2 : U(P_2,f) - L(P_2,f) < \frac{\epsilon}{B_f}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists P = P_1 \bigcup P_2 : \quad U(P,f) - L(P,f) \underbrace{\le}_{\text{Πρ.2 και 3}} U(P_1,f) - L(P_1,f) < \tfrac{\epsilon}{B_g}$$

$$U(P,g) - L(P,g) \underbrace{\le}_{\text{Πρ.2 και 3}} U(P_2,g) - L(P_2,g) < \tfrac{\epsilon}{B_f}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists P : U(P,fg) - L(P,fg) < \epsilon \Leftrightarrow fg \text{ ολοκληρώσιμη}$$

□

Πρ. 15

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\, b]$ και
$\inf\left\{|f(x)|\,,\, x \in [a,\, b]\right\} > 0$
$\Downarrow$
Η $\dfrac{1}{f(x)}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\, b]$

Απόδειξη.

$$0 < \gamma = \inf\left\{|f(u)|\,,\, u \in [a,\, b]\right\} \rightsquigarrow 0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{\gamma}$$

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| = \frac{1}{f(x)f(y)}\,|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{\gamma^2}\,|f(x) - f(y)|$$

$$\rightsquigarrow M_k^{1/f} - m_k^{1/f} \leq \frac{1}{\gamma^2}\left(M_k^f - m_k^f\right)$$

κλπ κλπ όπως στις προηγούμενες προτάσεις $\square$

Πρ. 16

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη και
$g(x)$ συνεχής στο $[a,\, b]$
$\Downarrow$
Η $h(x) = g\left(f(x)\right)$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\, b]$

(Απόδειξη δυσκολώτερη αλλά στο πνεύμα των προηγουμένων, δεν έγινε στην τάξη)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Αποδείξτε f ολοκληρώσιμη $\rightsquigarrow$ f^2 ολοκληρώσιμη
(2) Αποδείξτε $f > 0$ ολοκληρώσιμη $\rightsquigarrow$ $\sqrt{f}$ ολοκληρώσιμη
(3) Αποδείξτε $f > 0$ ολοκληρώσιμη $\rightsquigarrow$ $\sqrt[3]{f}$ ολοκληρώσιμη

Πρ. 17a

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\, b]$

$\boxed{\textbf{και}}$ $F(x)$ συνεχής $\boxed{\textbf{και}}$ $F'(x) = f(x)$ στο $(a,\, b)$

$$\Downarrow$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Πρ. 17b Θεώρημα Cauchy

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\, b]$

$$\boxed{\textbf{και}}\ F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \qquad \forall\, x \in [a,\, b]$$

$$\Downarrow$$

$F(x)$ συνεχής στο $[a,\, b]$

Πρ. 17c

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$

$\boxed{\textbf{και}}$ $f(x)$ συνεχής από αριστερά $\boxed{\text{ή}}$ από δεξιά στο $x_0 \in [a,\ b]$

$$\boxed{\textbf{και}}\ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,\ b]$$

$$\Downarrow$$

$$F'_-(x_0) = \lim_{\epsilon\to 0} f(x_0+\epsilon) \quad \epsilon > 0$$

$$\boxed{\text{ή}}\ F'_+(x_0) = \lim_{\epsilon\to 0} f(x_0-\epsilon) \text{ στο } [a,\ b]$$

Πρ. 17d Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

Αν $f(x)$ συνεχής στο $[a,\ b]$ τότε

$$G(x) - G(a) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\Updownarrow$$

$$G'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,\ b]$$

Πρ. 18

Αν $f'(x)$ και $g'(x)$ ολοκληρώσιμες στο $[a,\, b]$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx + \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x)]_a^b$$

Πρ. 19

Αν $f(x)$ συνεχής και $g(x)$ διαφορίσιμη στο $[a,\, b]$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)\, dt\right) = f\left(g(x)\right)\, g'(x)$$

Πόρισμα

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\, dt\right) = f\left(g(x)\right)\, g'(x) - f\left(h(x)\right)\, h'(x)$$