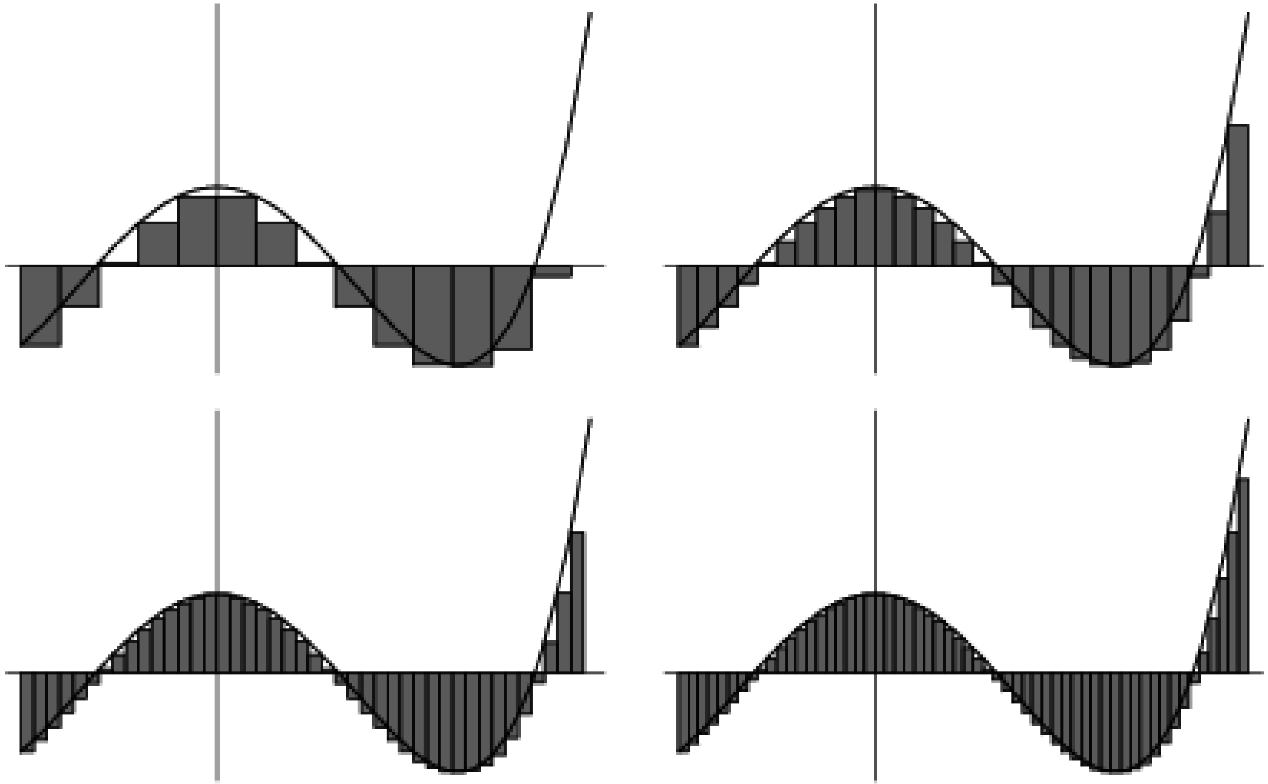
Darboux ολοκλήρωμα

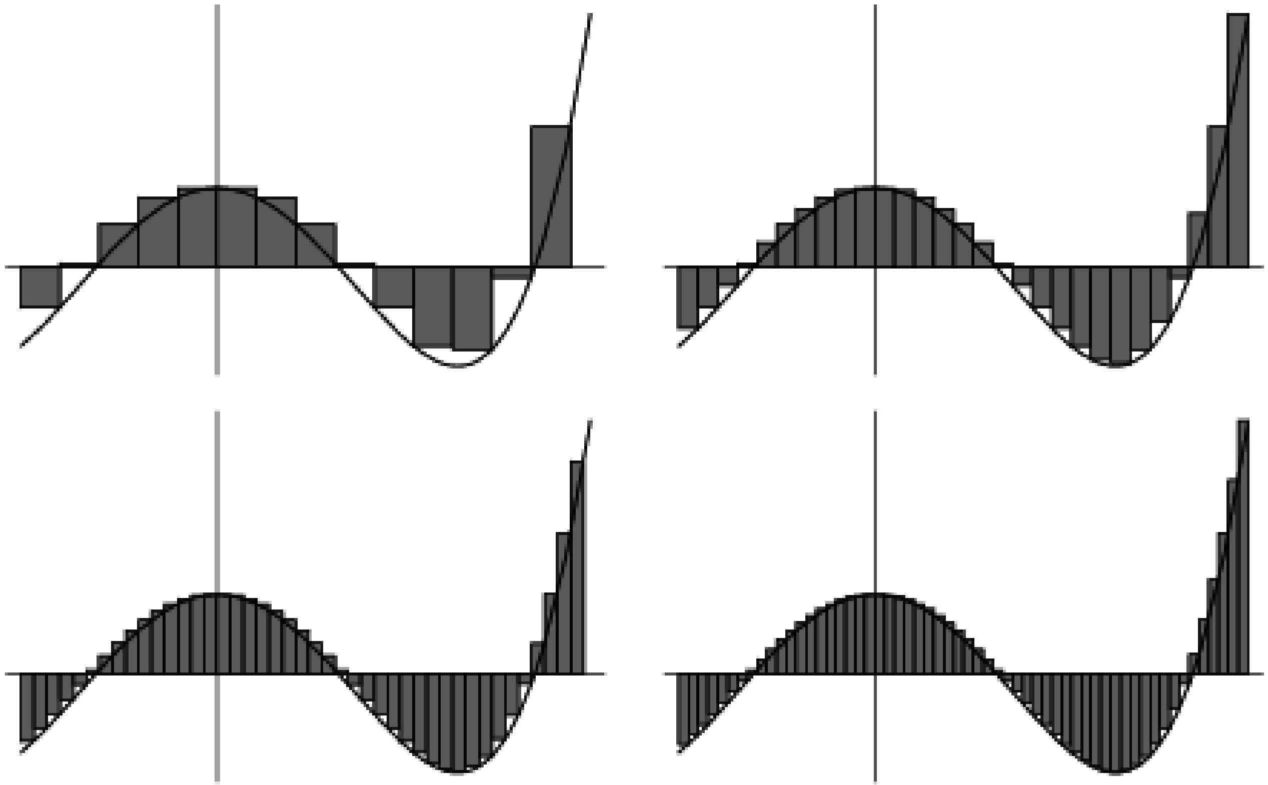
Κάτω ολοκλήρωμα

$$L(f) \equiv \sup_{P} L(P, f)$$



Ανω ολοκλήρωμα

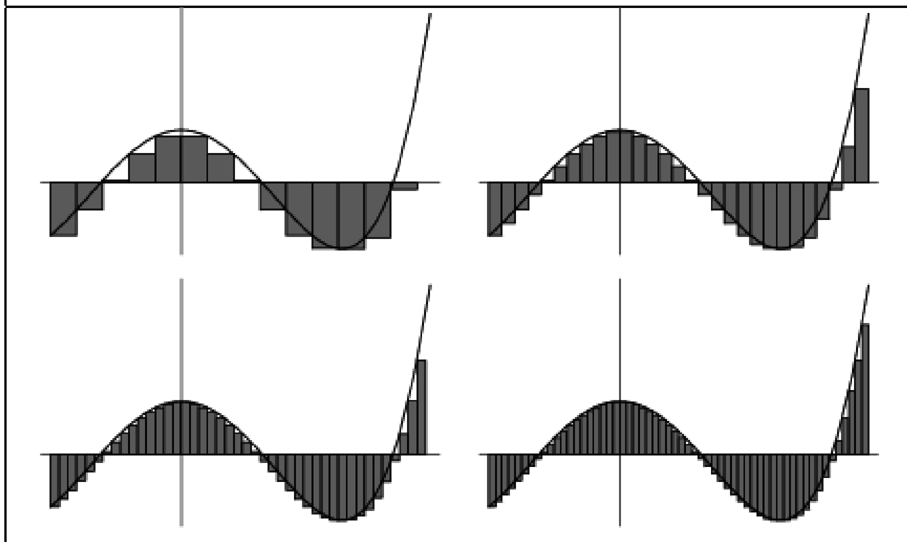
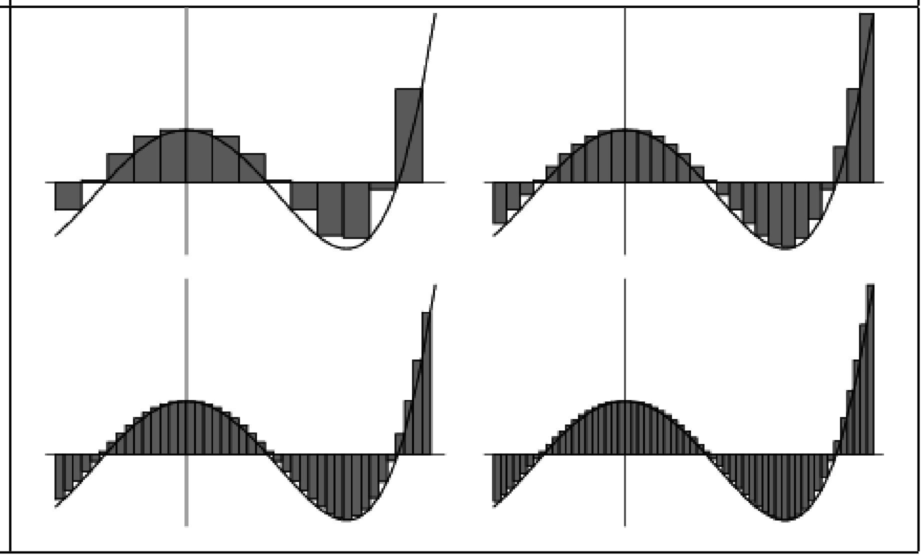
$$U(f) \equiv \inf_P U(P, f)$$



Ολοκλήρωμα Darboux

$$\boxed{f(x) \text{ Darboux–ολοκληρώσιμη} \Leftrightarrow L(f) = U(f)}$$

$$L(f) = U(f) \equiv I_D(f) \equiv \int_a^b f(x)\,dx$$

Κάτω ολοκλήρωμα	Ανω ολοκλήρωμα
	

Πρ. 5

Αν υπάρχει P_n είναι <u>κάποια</u> ακολουθία διαμερίσεων τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} U(P_n, f)$$

τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη

Λήμμα

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P : \; U(P, f) - L(P, f) < U(f) - L(f) + \epsilon$$

Πρ.6

$f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη $L(f) = U(f) \Leftrightarrow$
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \; : U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$

Πρ.7 Θεώρημα Darboux

$f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη $L(f) = U(f) \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; : \; |P| < \delta \Rightarrow U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$$

Πρ. 5

Αν υπάρχει P_n είναι κάποια ακολουθία διαμερίσεων τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} U(P_n, f)$$

τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη

Απόδειξη.

Εχουμε ότι

$$L(P_n, f) \le L(f) \le U(f) \le U(P_n, f) \;\Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, f) \le L(f) \le U(f) \le \lim_{n\to\infty} U(P_n, f)$$

□

Λήμμα

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P : \; U(P, f) - L(P, f) < U(f) - L(f) + \epsilon$$

Απόδειξη.

Επειδή

$$L(f) = \sup_P L(P, f) \;\Rightarrow\; \forall \epsilon > 0 \,\exists P_1 : L(P_1, f) > L(f) - \epsilon/2$$

$$U(f) = \inf_P U(P, f) \;\Rightarrow\; \forall \epsilon > 0 \,\exists P_2 : U(P_2, f) < U(f) + \epsilon/2$$

και για $P = P_1 \bigcup P_2$

$L(P, f) \ge L(P_1, f) > L(f) - \epsilon/2 \qquad U(P, f) \le U(P_2, f) > U(f) + \epsilon/2$

άρα $U(P, f) - L(P, f) < U(f) - L(f) + \epsilon$ □

Πρ.6

$f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη $L(f) = U(f) \Leftrightarrow$
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P : U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$

Απόδειξη.

Αν $L(f) = U(f)$ τότε από το παραπάνω λήμμα έχουμε ότι:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P : U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$$

Εστω τώρα ότι η παραπάνω σχέση αληθεύει τότε έχουμε επίσης ότι:

$$L(P,f) \leq L(f) \leq U(f) \leq U(P,f) \Rightarrow U(f) - L(F) \leq U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$$

Αρα $\forall \epsilon > 0 \quad U(f) - L(F) < \epsilon$ οπότε $L(f) = U(f)$. $\square$

Πρ.7 Θεώρημα Darboux

$f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη $L(f)=U(f) \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ |P| < \delta \Rightarrow U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$$

Απόδειξη.

Αν $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ |P| < \delta \Rightarrow U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$ τότε ικανοποιούνται οι συνθήκες της πρότασης 6, επειδή

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P : \ U(P,f) - L(P,f) < \epsilon \Rightarrow L(f) = U(f)$$

Εστω τώρα $L(f)=U(f)$ τότε σύμφωνα με την πρόταση 6

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P_0 \ : U(P_0,f) - L(P_0,f) < \epsilon/2$$

Από την διαμέριση P_0 ορίζουμε

$$\delta = \frac{\epsilon}{8d(P_0)B} \qquad |f(x)| < B$$

Εστω μια διαμέριση $P, \quad |P| < \delta.$
Ορίζουμε $Q = P \bigcup P_0 \ \rightsquigarrow \ d(Q) - d(P) \leq d(P_0)$
Από την πρόταση 2

$$L(Q,f) - L(P,f) \leq 2\left(d(Q) - d(P)\right) B|P| \leq 2d(P_0)B|P| < 2d(P_0)B\delta = \frac{\epsilon}{4}$$

από την πρόταση 2 έχουμε

$$L(P_0,f) - L(P,f) \leq L(Q,f) - L(P,f) < \frac{\epsilon}{4}$$

όμοια αποδεικνύουμε ότι: $U(P,f) - U(P_0,f) < \frac{\epsilon}{4}$ επομένως

$$U(P,f) - L(P,f) =$$
$$= \underbrace{U(P,f) - U(P_0,f)}_{<\epsilon/4} + \underbrace{U(P_0,f) - L(P_0,f)}_{<\epsilon/2} + \underbrace{L(P_0,f) - L(P,f)}_{<\epsilon/4} < \epsilon$$

$\square$

Πρ. 8

$f(x)$ μονότονη και φραγμένη στο $[a,b] \rightsquigarrow f(x)$ (Darboux)-ολοκληρώσιμη

Απόδειξη.

Εστω $f(x)$ αύξουσα και $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ μιά διαμέριση και $\triangle x_k \le |P|$
Αν $x_{k-1}\le x\le x_k$ τότε $m_k=\inf\{f(x),x\in[x_{k-1},x_k]\}=f(x_{k-1})$ και $M_k=\sup\{f(x),x\in[x_{k-1},x_k]\}=f(x_k)$ οπότε

$$U(P,f)-L(P,f)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\triangle x_k \le$$

$$\le |P|\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)=|P|(f(b)-f(a))$$

Για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει μια διαμέριση με $|P|<\dfrac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$ οπότε $U(P,f)-L(P,f)<\epsilon$. Από την Πρ. 6 συνεπάγεται ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα Darboux. □

Πρ. 9

$f(x)$ συνεχής στο $[a,b] \rightsquigarrow f(x)$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$
$\rightsquigarrow f(x)$ (Darboux)-ολοκληρώσιμη

Απόδειξη.

$f(x)$ ομοιόμορφα συνεχής $\Leftrightarrow$

$$\forall\,\epsilon>0,\ \exists\delta(\epsilon)\ :\ |x-y|<\delta(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |f(x)-f(y)|<\frac{\epsilon}{b-a}$$

Διαλέγουμε μια διαμέριση με $|P|<\delta(\epsilon)$. Επειδή η συνάρτηση είναι (ομοιόμορφα) συνεχής στο διάστημα $[x_{k-1},x_k]$ θα έχουμε

$$M_k=\sup\{f(x),x\in[x_{k-1},x_k]\}=f(\xi_k)$$

$$m_k=\inf\{f(x),x\in[x_{k-1},x_k]\}=f(\eta_k)$$

με $\xi_k,\ \eta_k\ \in[x_{k-1},x_k]$ οπότε $M_k-m_k=f(\xi_k)-f(\eta_k)<\dfrac{\epsilon}{b-a}$ και

$$U(P,f)-L(P,f)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\triangle x_k <$$

$$\le \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\triangle x_k=\epsilon$$

Από την Πρ. 6 συνεπάγεται ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα Darboux. □

Πρ. 8

$f(x)$ μονότονη και φραγμένη στο $[a, b] \rightsquigarrow f(x)$ (Darboux)-ολοκληρώσιμη

Πρ. 9

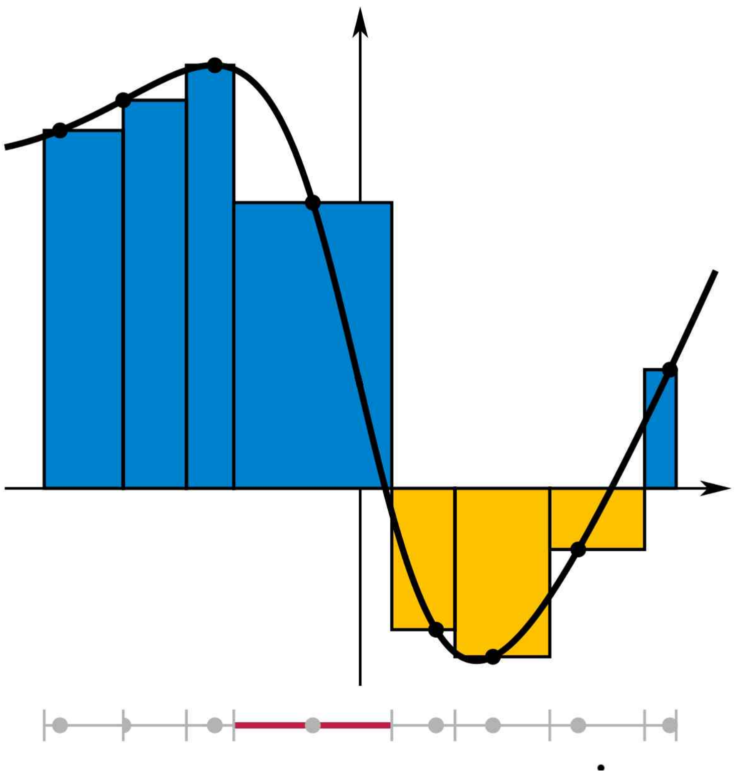
$f(x)$ συνεχής στο $[a, b] \rightsquigarrow f(x)$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$
$\rightsquigarrow f(x)$ (Darboux)-ολοκληρώσιμη

Ολοκλήρωμα Riemann

$$\textit{διαμέριση } P = \{x_0,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\}$$
$$\textit{επιλογή σημείων } T = \{\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_n,\} \text{ όπου } x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$$

άθροισμα Riemann

$$S\,(P,T,f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\triangle x_k$$



Ορισμός: Ολοκλήρωμα Riemann

$\exists$ ολοκλήρωμα Riemann $\Leftrightarrow \exists \lim_{|P|\to 0} S(P, T, f) = I_R(f)$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > O : \ \forall |P| < \delta \ \text{ και } \ T \ \text{ επιλογή σημείων}$$
$$\Rightarrow \ |S(P, T, f) - I_R(f)| < \epsilon$$

Αν υπάρχει το ολοκλήρωμα Riemann τότε είναι μοναδικό

Πρ. 10

: ολοκλήρωμα Riemann $I_R(f) = I_D(f)$ ολοκλήρωμα Darboux

Πρ. 11 (Θεώρημα Darboux)

$$\boxed{\boxed{\begin{aligned} &\xi_{k,n} \in \left[a + \frac{k-1}{n}(b-a),\ a + \frac{k}{n}(b-a)\right] \\ &\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_{k,n}\right) \end{aligned}}}$$

Παράδειγμα

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + \frac{k}{n}} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$$

Πρ. 12 Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

Γραμμικότητα

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\, dx = c_1 \int_a^b f(x)\, dx + c_2 \int_a^b g(x)\, dx$$

¨Θετικότητα’

$$f_1(x) \leq f_2(x) \rightsquigarrow \int_a^b f_1(x)\, dx \leq \int_a^b f_2(x)\, dx$$

¨Τριγωνική ιδιότητα’

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

¨Χωρισμός διαστήματος’

$$c \in [a,\, b] \rightsquigarrow \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

¨Επεκτάσεις ολοκληρώματος’

$$\int_b^a f(x)\, dx \overset{\text{op}}{\equiv} -\int_a^b f(x)\, dx \qquad \int_a^a f(x)\, dx \overset{\text{op}}{\equiv} 0$$

$$m \leq f(x) \leq M \rightsquigarrow \boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)}$$