Προσδιοριστέοι συντελεστές για πολυώνυμα, εκθετικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\int \Pi_n(x)\, \mathrm{e}^{bx} \sin\, ax\, dx = P_n(x)\mathrm{e}^{bx} \sin\, ax + Q_n(x)\mathrm{e}^{bx} \cos\, ax$$

$$\Pi_n(x)\, \mathrm{e}^{bx} \sin\, ax = \frac{d}{dx}\left(P_n(x)\mathrm{e}^{bx} \sin\, ax + Q_n(x)\mathrm{e}^{bx} \cos\, ax\right)$$

$$\int \Sigma_n(x)\, \mathrm{e}^{bx} \cos\, ax\, dx = R_n(x)\mathrm{e}^{bx} \sin\, ax + S_n(x)\mathrm{e}^{bx} \cos\, ax$$

$$\Sigma_n(x)\, \mathrm{e}^{bx} \cos\, ax = \frac{d}{dx}\left(R_n(x)\mathrm{e}^{bx} \sin\, ax + S_n(x)\mathrm{e}^{bx} \cos\, ax\right)$$

Ολες οι συναρτήσεις είναι πολυώνυμα n-τάξης ως προς x.

ΣΕΙΡΕΣ MACLAURIN

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightsquigarrow \exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$$

$$\cosh x \equiv \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x \equiv \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\exp(i\,x) = \mathrm{e}^{i\,x} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{\,n} \frac{x^n}{n!} \rightsquigarrow \exp i\,(x+y) = (\exp i\,x)(\exp i\,y)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}$$

Ιδιότητες τριγωνομετρικών- υπερβολικών συναρτήσεων

$$\cosh x \equiv \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \qquad \sinh x \equiv \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$\begin{aligned}
\cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \\
&= \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{8} + \frac{3}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) = \\
&= \frac{\cos 3x}{4} + \frac{3\cos x}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sinh 5x}{\sinh x} &= \frac{\left(e^{x}\right)^5-\left(e^{-x}\right)^5}{e^{x}-e^{-x}} = \\
&= \left(e^{x}\right)^4+\left(e^{x}\right)^3\left(e^{-x}\right)+\left(e^{x}\right)^2\left(e^{-x}\right)^2+\left(e^{x}\right)\left(e^{-x}\right)^3+\left(e^{-x}\right)^4 = \\
&= 2\cosh 4x + 2\cosh 2x + 1
\end{aligned}$$

Προσδιοριστέοι συντελεστές

$$\int x^n e^{bx} \sin ax \, dx = $$
$$= P_n(x) e^{bx} \sin ax + Q_n(x) e^{bx} \cos ax$$
$$\int x^n e^{bx} \cos ax \, dx = $$
$$= R_n(x) e^{bx} \sin ax + S_n(x) e^{bx} \cos ax$$

Υπολογισμός του $\int x^2 e^{5x} \sin^3(2x) \cos^3 x \, dx$

1^0 βήμα: Αναλύω το $\sin^3(2x)\cos^3 x$ σε άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων

2^0 βήμα: Υπολογίζω ολοκληρώματα της μορφής
$$\int P(x) e^{bx} \sin ax \, dx \text{ και } \int Q(x) e^{bx} \cos ax \, dx$$
με προσδιοριστέους συντελεστές

$$\sin\,(a+b) = \sin\,a\cos\,b + \cos\,a\sin\,b$$

$$\cos\,(a+b) = \cos\,a\cos\,b - \sin\,a\sin\,b$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right)\,dx$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right)\,dx$$

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right)\,dx$$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Αναδρομικές σχέσεις

$$\int \cos^{2m} x\,dx = \frac{\cos^{2m-1} x \sin x}{2m} + \frac{2m-1}{2m} \int \cos^{2m-2} x\,dx$$

$$C_m(x) = \int \cos^{2m} x\,dx,$$

$$C_0(x) = x, \quad C_m(x) = \frac{\cos^{2m-1} x \sin x}{2m} + \frac{2m-1}{2m} C_{m-1}(x)$$

$$\cos^n x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n$$

$$\int \cos^{2m} x\,dx = \frac{1}{2^{2m}} \left(\binom{2m}{m} x + \sum_{k=0}^{m1} \binom{2m}{k} \frac{\sin(2(m-k)x)}{m-k} \right)$$

$$\int \cos^{2n+1} x\,dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\sin^{2k+1} x}{2k+1}$$

$$\int \sin^{2m} x\,dx = -\frac{\sin^{2m-1} x \cos x}{2m} + \frac{2m-1}{2m} \int \sin^{2(m-1)} x\,dx$$

$$S_m(x) = \int \sin^{2m} x\,dx,$$

$$S_0(x) = x, \quad S_m(x) = -\frac{\sin^{2m-1} x \cos x}{2m} + \frac{2m-1}{2m} S_{m-1}(x)$$

$$\sin^n x = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^n$$

$$\int \sin^{2n+1} x\,dx = -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\cos^{2k+1} x}{2k+1}$$

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x}$$

$$\int \tan^n x \, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx$$

$$\int \cot^n x \, dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x \, dx$$

$$\int \sin^{2n+1} x \, dx = -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\cos^{2k+1} x}{2k+1}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2(n+1)} x} \, dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\tan^{2k+1} x}{2k+1}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2(n+1)} x} \, dx = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\cot^{2k+1} x}{2k+1}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ¨ΑΠΛΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ’

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού $x = a\tan t$

$$\int \frac{xdx}{(x^2\pm a^2)^n} = \begin{cases} \ln\sqrt{|x^2\pm a^2|} + c & \text{για } n=1 \\ -\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2\pm a^2)^{n-1}} & \text{για } n>1 \end{cases}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\left(x^2 - a^2\right)^{n+1}} = \; & -\frac{1}{2na^2} \frac{x}{\left(x^2 - a^2\right)^n} + \\ & -\frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{\left(x^2 - a^2\right)^n}\end{aligned}$$

Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού $x = a \tanh t$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + 2\alpha x + \beta\right)^n} = \int \frac{dx}{\left((x+\alpha)^2 + \beta - \alpha^2\right)^n} = \cdots$$

$$\int \frac{x dx}{\left(x^2 + 2\alpha x + \beta\right)^n} = \int \frac{\left((x+\alpha) - \alpha\right) dx}{\left((x+\alpha)^2 + \beta - \alpha^2\right)^n}$$

Κάθε πολυώνυμο αναλύεται σε "απλά" πολυώνυμα:

$$Q(x) = A \prod_{k=1}^{p} (x-\rho_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{q} \left(x^2 + 2\alpha_\ell x + \beta_\ell\right)^{n_\ell}$$

$$\rho_k \quad \text{ρίζες} \ , \quad \alpha_\ell^2 < \beta_\ell$$

$$\text{βαθμός } (Q(x)) = n = \sum_{k=1}^{p} m_k + 2\sum_{\ell=1}^{q} n_\ell$$

"ρητή" πολυωνυμική συνάρτηση

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_m x^m}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n}$$

Αν βαθμός $P(x) <$ βαθμός $Q(x)$ δηλ. $m < n$
το $R(x)$ αναλύεται σε "απλά" κλάσματα

$$R(x) = \frac{A_{11}}{x-\rho_1} + \frac{A_{12}}{(x-\rho_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-\rho_1)^{m_1}} +$$

$$+ \cdots \quad \text{για όλες τις ρίζες} \quad \cdots +$$

$$+ \frac{B_{11}x+\Gamma_{11}}{x^2+2\alpha_1 x+\beta_1} + \frac{B_{12}x+\Gamma_{12}}{(x^2+2\alpha_1 x+\beta_1)^2} + \cdots +$$

$$+ \cdots + \frac{B_{1n_1}x+\Gamma_{1n_1}}{(x^2+2\alpha_1 x+\beta_1)^{n_1}} +$$

$$+ \cdots \quad \text{για όλες τά τριώνυμα} \quad \cdots$$

Από την ταυτότητα

$$Q(x)R(x) = P(x)$$

$$\text{βαθμός } [Q(x)R(x)] = \text{ βαθμός } [Q(x)] - 1$$

βρίσκουμε τους άγνωστους συντελεστές A_{ik}, $B_{j\ell}$, $\Gamma_{j\ell}$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ $I = \int R(\cosh x, \sinh x)\, dx$

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$$I = \int R\left(\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) \mathrm{e}^{-x}\, d\left(\mathrm{e}^{x}\right)$$

$$\boxed{t = \mathrm{e}^{x}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\boxed{\int \underbrace{R\left(\frac{t + \frac{1}{t}}{2}, \frac{t - \frac{1}{t}}{2}\right) \frac{1}{t}}_{\text{συνάρτηση του } t}\, dt}}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ $\int R(\cos x, \sin x)\, dx$

$$\boxed{\boxed{t = \tan \frac{x}{2}}}$$

$$\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 1 + \tan^2 \frac{x}{2} = 1 + t^2$$

$$\begin{aligned} \sin x = &\ 2\cos \tfrac{x}{2} \sin \tfrac{x}{2} \\ = &\ 2\cos^2 \tfrac{x}{2} \tan \tfrac{x}{2} \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$$

$$dt = \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\boxed{I = \int R(\cos x, \sin x)\, dx = 2 \int \frac{R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)}{1+t^2}\, dt}}$$

Ολοκλήρωμα $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx$

$$t^n = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$$

Ολοκλήρωμα $\boxed{\boxed{\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx}}$

$$t^p = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \quad p = \text{ Ε. Κ. Π. } (n, m)$$

Ολοκλήρωμα $\boxed{\boxed{\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx}}$

$$\boxed{x = a \sin\,\theta}$$

$$\rightsquigarrow\ a \int R\,(a \sin\,\theta,\ a \cos\,\theta)\ \cos\,\theta\, d\theta$$

Ολοκλήρωμα $\boxed{\boxed{\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx}}$

$$\boxed{x = a \cosh\, u}$$

$$\rightsquigarrow\ a \int R\,(a \cosh\, u,\ a \sinh\, u)\ \sinh\, u\, du$$

Ολοκλήρωμα $\boxed{\boxed{\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx}}$

$$\boxed{x = a \sinh\, u} \quad \text{ή} \quad x = a \tan\,\theta$$

$$\rightsquigarrow\ a \int R\,(a \sinh\, u,\ a \cosh\, u)\ \cosh\, u\, du$$