Αναδρομικές σχέσεις με εκθετικές εξισώσεις

$$I_n = \int x^n \, \mathrm{e}^{\alpha x} \, dx$$

$$I_0 = \frac{1}{\alpha} \mathrm{e}^{\alpha x}$$

$$I_n = \frac{1}{\alpha} \int x^n \, d\left(\mathrm{e}^{\alpha x}\right) \, dx = \frac{1}{\alpha} x^n \, \mathrm{e}^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} \, \mathrm{e}^{\alpha x} \, dx$$

$$I_n = \frac{1}{\alpha} x^n \, \mathrm{e}^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha} \, I_{n-1}$$

κατασκευάζουμε διαδοχικά το $I_1, \; I_2, \; \ldots \; I_n$

Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών

$$I = \int P(x)\, \mathrm{e}^{\alpha x}\, dx \qquad P(x) \text{ πολυώνυμο βαθμού } n$$

$$\int P(x)\, \mathrm{e}^{\alpha x}\, dx = R(x)\mathrm{e}^{\alpha x} + c$$

$$\frac{d\left(R(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\right)}{dx} = P(x)\mathrm{e}^{\alpha x} \rightsquigarrow R'(x) + \alpha R(x) = P(x)$$

πχ

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{3x}\, dx \;=\; \left(Ax^2 + Bx + C\right) \mathrm{e}^{3x} + c$$

$$\boxed{\frac{d\left\{\left(Ax^2 + Bx + C\right)\mathrm{e}^{3x}\right\}}{dx} = x^2 \mathrm{e}^{3x}}$$

$$(2Ax + B) + 3\left(Ax^2 + Bx + C\right) = x^2$$

$$\left.\begin{array}{c} 3A = 1 \\ 2A + 3B = 0 \\ B + 3C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{2}{9}, \quad C = \frac{2}{27}$$

Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών- Απόδειξη

$$I = \int P(x)\, e^{\alpha x}\, dx \qquad P(x) \text{ πολυώνυμο βαθμού } n$$

Κάνοντας μια ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned} I &= \int P(x)\, e^{\alpha x}\, dx = \tfrac{1}{\alpha} \int P(x)\, de^{\alpha x} = \\ &= \tfrac{1}{\alpha} P(x) e^{\alpha x} - \tfrac{1}{\alpha} \int P'(x)\, e^{\alpha x}\, dx \end{aligned}$$

Το $P'(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Επαναλαμβάνοντας την ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\alpha} \underbrace{P(x)}_{\text{πολ. βαθμού } n} e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int P'(x)\, e^{\alpha x}\, dx = \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha} P(x) - \frac{1}{\alpha^2} P'(x) \right)}_{\text{πολ. βαθμού } n-1} e^{\alpha x} + \frac{1}{\alpha^2} \int P''(x)\, e^{\alpha x}\, dx \\ &= \text{.... κλπ κλπ} = \\ &= R(x) e^{\alpha x} + c \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ $R(x)$ πολυώνυμο βαθμού n

$$\frac{d\left(R(x) e^{\alpha x}\right)}{dx} = P(x) e^{\alpha x} \rightsquigarrow \boxed{R'(x) + \alpha R(x) = P(x)}$$

Αναδρομικές σχέσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$S_n = \int x^n \sin(\alpha x + \beta)\, dx \quad S_0 = -\frac{\cos(\alpha x + \beta)}{\alpha}$$

$$C_n = \int x^n \cos(\alpha x + \beta)\, dx \quad C_0 = \frac{\sin(\alpha x + \beta)}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} S_n &= -\tfrac{1}{\alpha} \int x^n \, d\cos(\alpha x + \beta) = \\ &= -\tfrac{1}{\alpha} x^n \cos(\alpha x + \beta) + \tfrac{n}{\alpha} \int x^{n-1} \cos(\alpha x + \beta)\, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n &= \tfrac{1}{\alpha} \int x^n \, d\sin(\alpha x + \beta) = \\ &= \tfrac{1}{\alpha} x^n \sin(\alpha x + \beta) - \tfrac{n}{\alpha} \int x^{n-1} \sin(\alpha x + \beta)\, dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S_n &= -\tfrac{1}{\alpha} x^n \cos(\alpha x + \beta) + \tfrac{n}{\alpha} C_{n-1} \\ C_n &= \tfrac{1}{\alpha} x^n \sin(\alpha x + \beta) - \tfrac{n}{\alpha} S_{n-1} \end{aligned}}$$

κατασκευάζουμε διαδοχικά τα $S_0,\ C_0,\ S_1,\ C_1,\ S_2,\ C_2,\ \ldots\ S_n,\ C_n,$

Προσδιοριστέοι συντελεστές

$$S_n = \int x^n \sin(\alpha x + \beta)\, dx$$

$$S_n = P_n(x)\sin(\alpha x + \beta) + Q_n(x)\cos(\alpha x + \beta)$$

$P_n(x),\ Q_n(x)$ πολυώνυμα βαθμού n

$$\begin{aligned} & x^n \sin(\alpha x + \beta) = \\ & = \frac{d}{dx}\{P_n(x)\sin(\alpha x + \beta) + Q_n(x)\cos(\alpha x + \beta)\} \end{aligned}$$

$$C_n = \int x^n \cos(\alpha x + \beta)\, dx$$

$$C_n = \widetilde{P}_n(x)\sin(\alpha x + \beta) + \widetilde{Q}_n(x)\cos(\alpha x + \beta)$$

$\widetilde{P}_n(x),\ \widetilde{Q}_n(x)$ πολυώνυμα βαθμού n

$$\begin{aligned} & x^n \cos(\alpha x + \beta) = \\ & = \frac{d}{dx}\left\{\widetilde{P}_n(x)\sin(\alpha x + \beta) + \widetilde{Q}_n(x)\cos(\alpha x + \beta)\right\} \end{aligned}$$

Αναδρομικές σχέσεις υπερβολικών συναρτήσεων

$$S_n = \int x^n \sinh(\alpha x + \beta)\, dx \quad S_0 = \frac{\cosh(\alpha x + \beta)}{\alpha}$$

$$C_n = \int x^n \cosh(\alpha x + \beta)\, dx \quad C_0 = \frac{\sinh(\alpha x + \beta)}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \tfrac{1}{\alpha} \int x^n \, d \cosh\,(\alpha x + \beta) = \\ &= \tfrac{1}{\alpha} x^n \cosh(\alpha x + \beta) - \tfrac{n}{\alpha} \int x^{n-1} \cosh\,(\alpha x + \beta)\, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n &= \tfrac{1}{\alpha} \int x^n \, d \sinh\,(\alpha x + \beta) = \\ &= \tfrac{1}{\alpha} x^n \sinh(\alpha x + \beta) - \tfrac{n}{\alpha} \int x^{n-1} \sinh\,(\alpha x + \beta)\, dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S_n &= \tfrac{1}{\alpha} x^n \cosh(\alpha x + \beta) - \tfrac{n}{\alpha}\, C_{n-1} \\ C_n &= \tfrac{1}{\alpha} x^n \sinh(\alpha x + \beta) - \tfrac{n}{\alpha}\, S_{n-1} \end{aligned}}$$

κατασκευάζουμε διαδοχικά τα $S_0,\ C_0,\ S_1,\ C_1,\ S_2,\ C_2,\ \ldots\ S_n,\ C_n,$

Προσδιοριστέοι συντελεστές

$$S_n = \int x^n \sinh(\alpha x + \beta)\, dx$$

$$S_n = P_n(x)\sinh(\alpha x + \beta) + Q_n(x)\cosh(\alpha x + \beta)$$

$P_n(x)$, $Q_n(x)$ πολυώνυμα βαθμού n

$$x^n \sinh(\alpha x + \beta) = \\ = \frac{d}{dx}\{P_n(x)\sinh(\alpha x + \beta) + Q_n(x)\cosh(\alpha x + \beta)\}$$

$$C_n = \int x^n \cosh(\alpha x + \beta)\, dx$$

$$C_n = \widetilde{P}_n(x)\sinh(\alpha x + \beta) + \widetilde{Q}_n(x)\cosh(\alpha x + \beta)$$

$\widetilde{P}_n(x)$, $\widetilde{Q}_n(x)$ πολυώνυμα βαθμού n

$$x^n \cosh(\alpha x + \beta) = \\ = \frac{d}{dx}\left\{\widetilde{P}_n(x)\sinh(\alpha x + \beta) + \widetilde{Q}_n(x)\cosh(\alpha x + \beta)\right\}$$