

Ορισμός

- $x = x(t), y = y(t) \alpha \leq t \leq \beta$

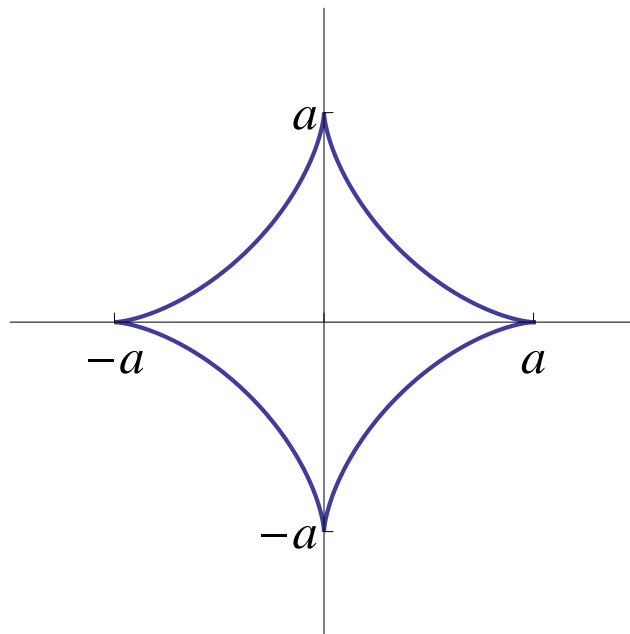
$$L = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$L = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

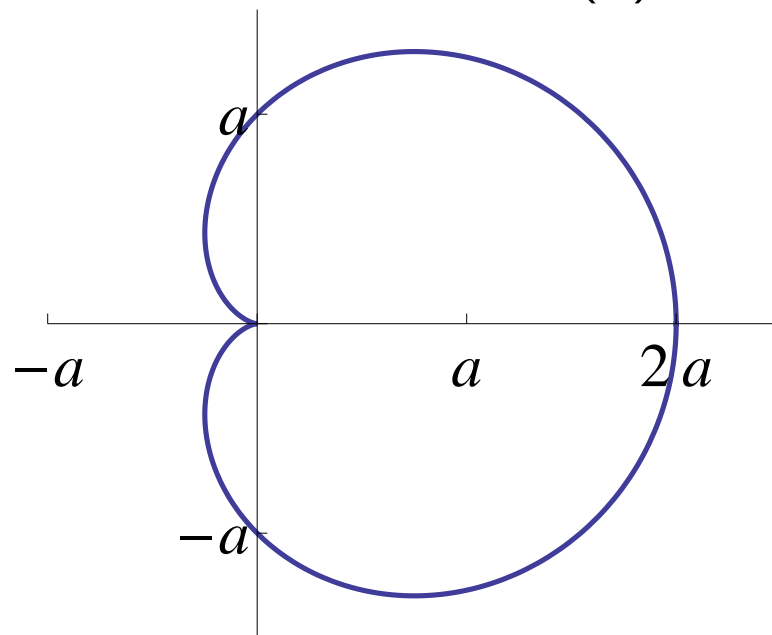
- $r = f(\theta)$

$$L = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2} dx$$

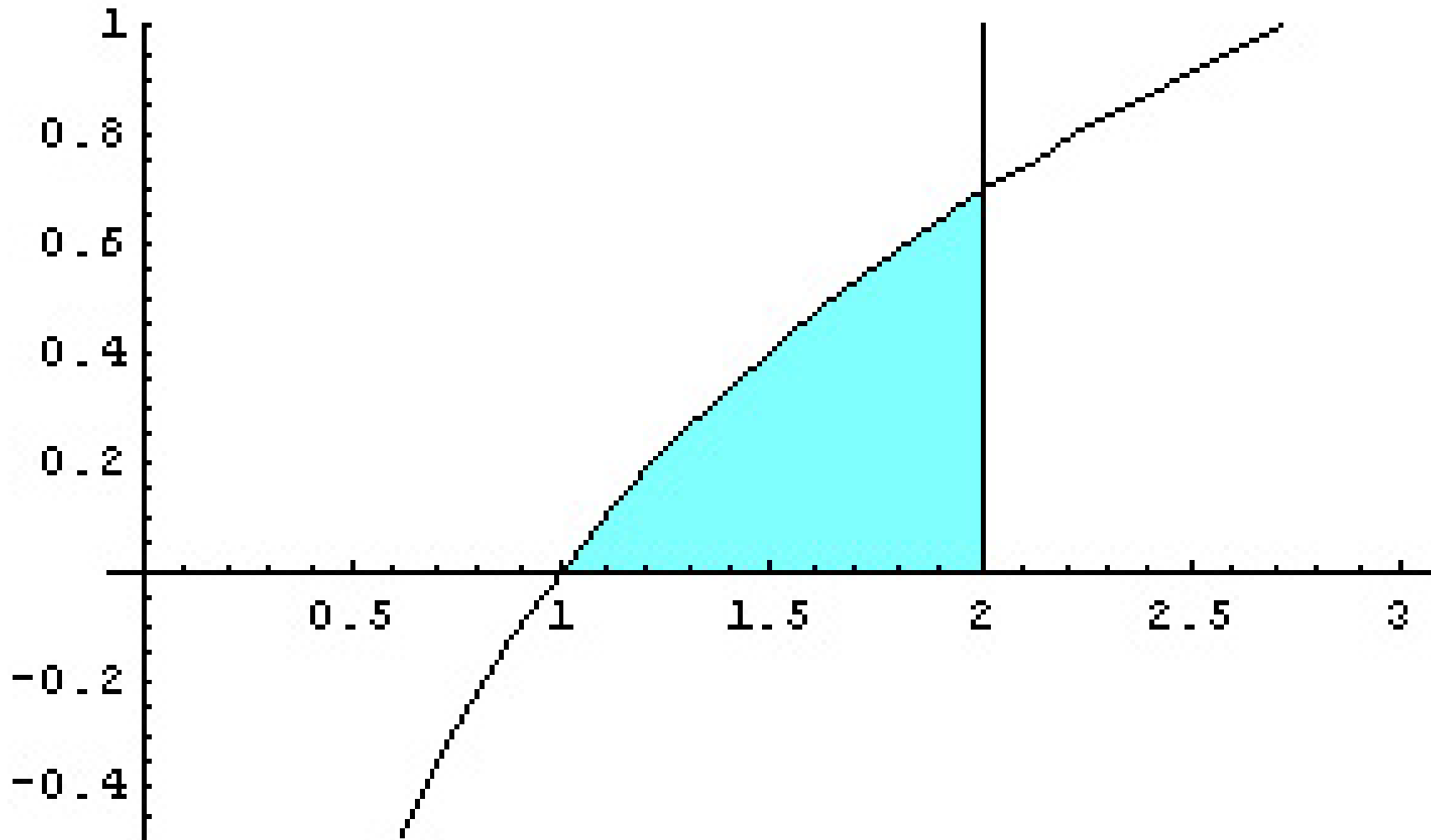
Να βρεθεί το μήκος της υποκυκλοειδούς $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$



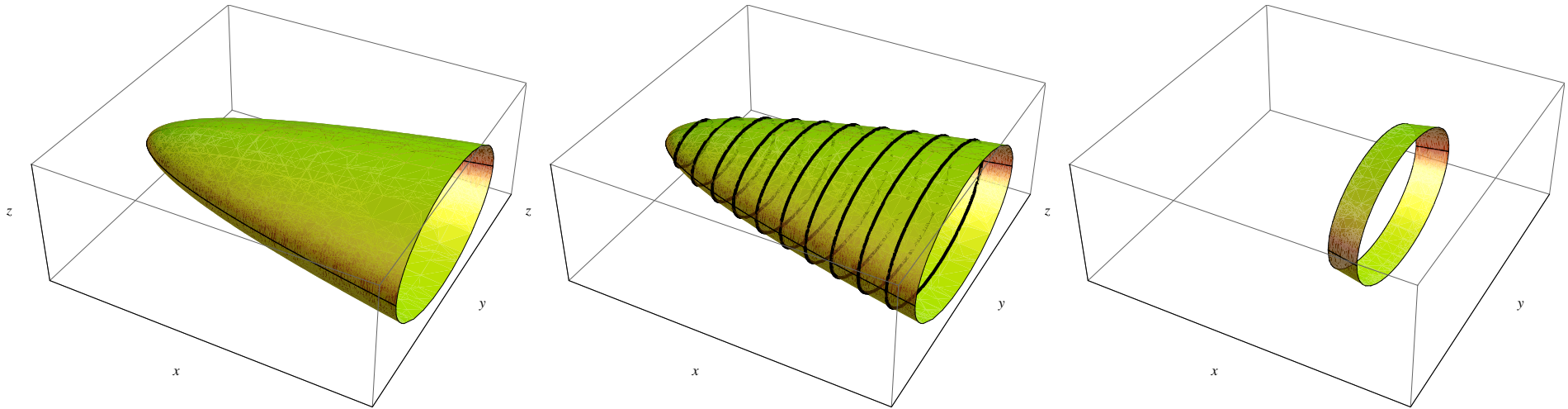
Να βρεθεί το μήκος της καρδιοειδούς $r = f(\theta) = a(1 + \cos \theta)$



Να βρεθεί το εμβαδόν και το μήκος της καμπύλης $y = \ln x$ για $1 \leq x \leq a$.



ΟΓΚΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΤΟΜΩΝ



$S(x)$ εμβαδόν μιας παράλληλης τομής.

$S(x) dx$ όγκος μιας παράλληλης τομής.

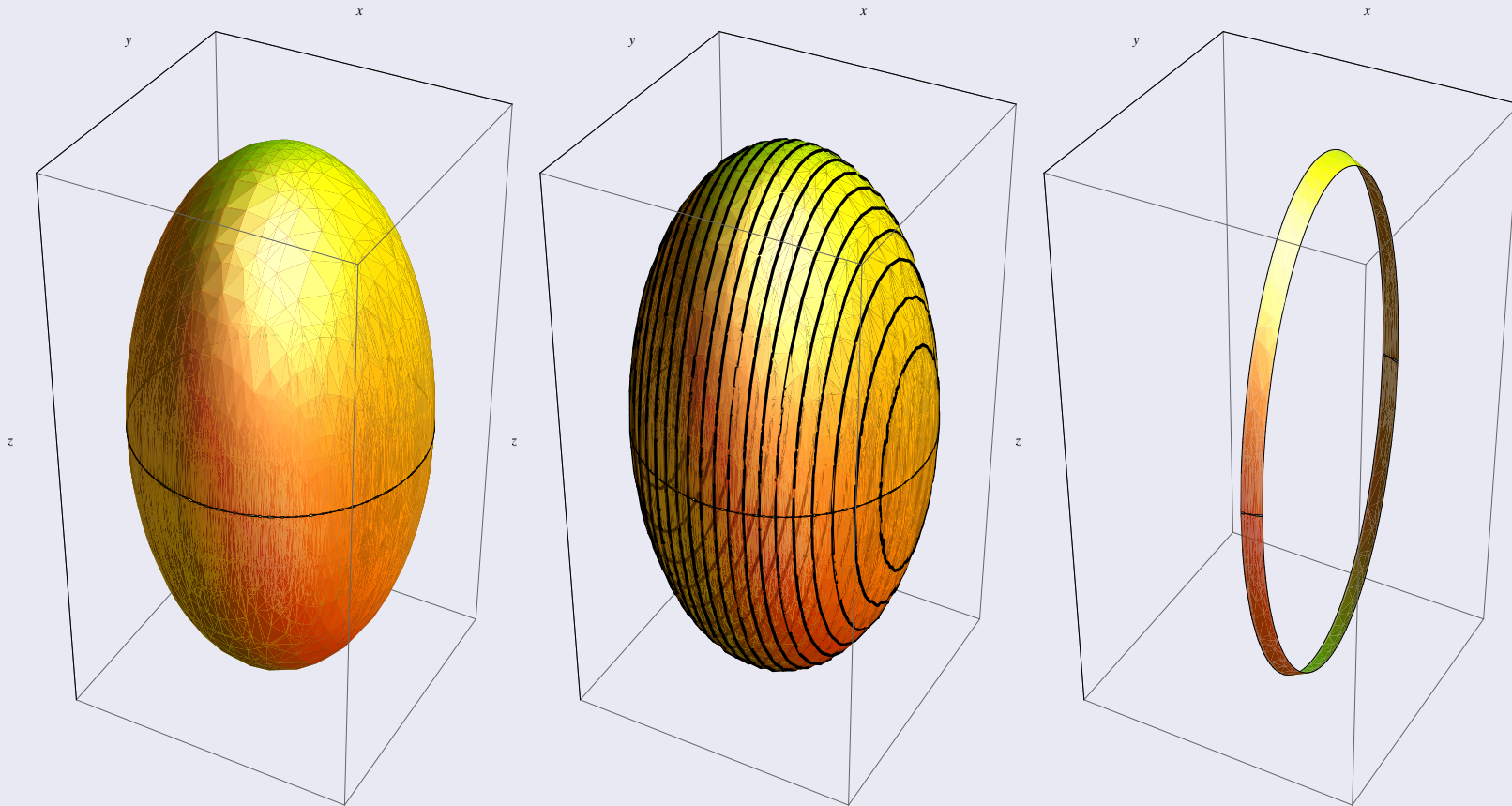
όγκος $V =$ άθροισμα όγκων παράλληλων τομών

$$\text{όγκος } V = \int_a^b S(x) dx$$

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί ο όγκος του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



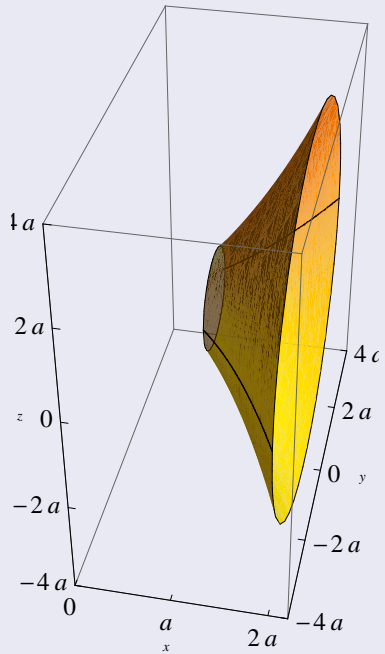
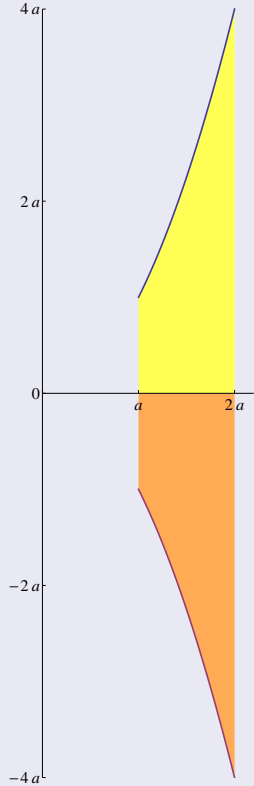
$$S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \rightsquigarrow V = \frac{4\pi abc}{3}$$

Αν έχουμε ένα σώμα παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $y = f(x)$ έχει εμβαδόν μιας παράλληλης τομής $S = \pi y^2 = \pi f^2(x)$, $a < x < 2a$ ($a = 1$)

$$\text{όγκος } V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Παραδειγμα

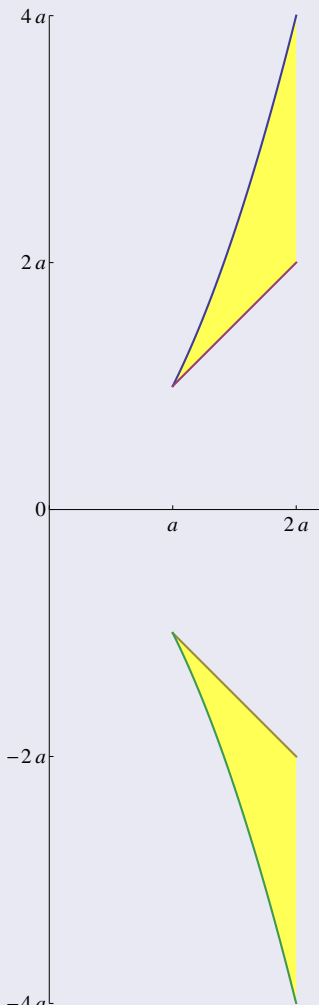
Να υπολογισθεί ο όγκος ο οποίος παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $y = x^2$ για $a \leq x \leq 2a$ γύρω από τον άξονα Ox



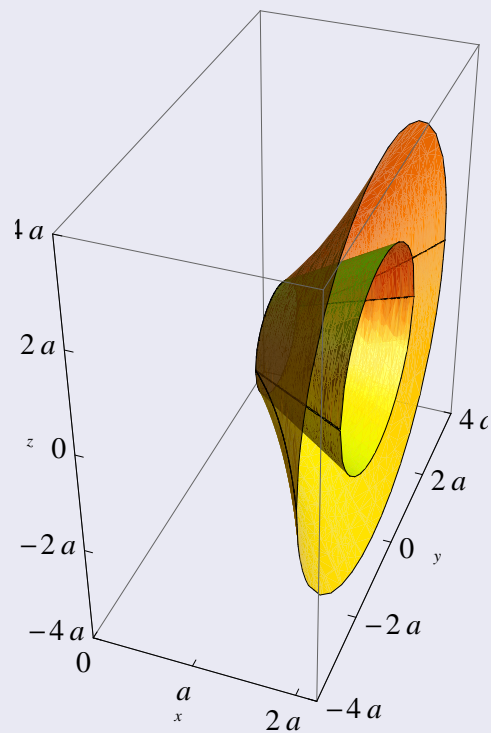
$$V = \pi \int_a^{2a} x^4 dx = \frac{\pi}{5} (2^5 - 1)$$

Παραδειγμα

Να υπολογισθεί ο όγκος ο οποίος παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα Ox του χωρίου μεταξύ των καμπύλων $y = x^2$ και $y = x$



για $a \leq x \leq 2a$



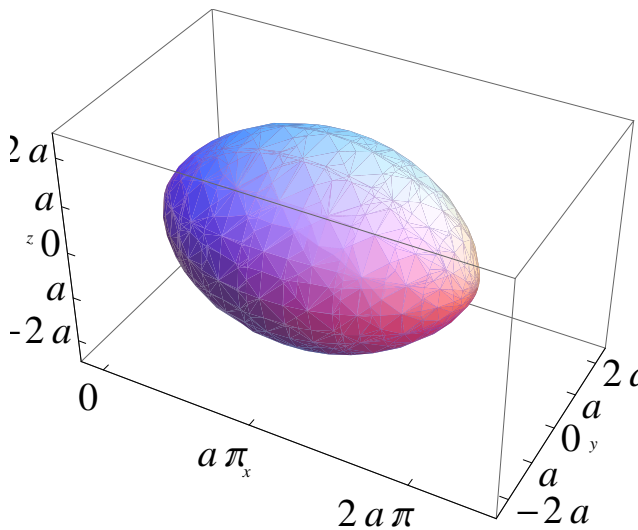
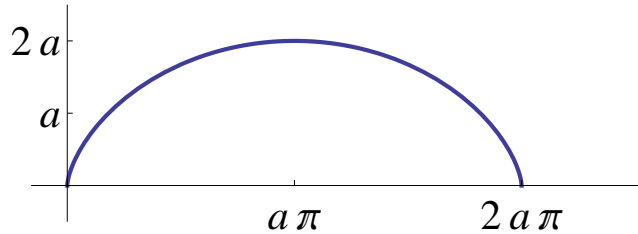
$$V = \pi \int_a^{2a} (x^4 - x^2) dx = \frac{a^5}{5} (2^5 - 1) - \frac{a^3}{3} (2^3 - 1)$$

Να υπολογισθεί ο όγκος του σώματος που προκύπτει από την περιστροφή του κυκλοειδούς

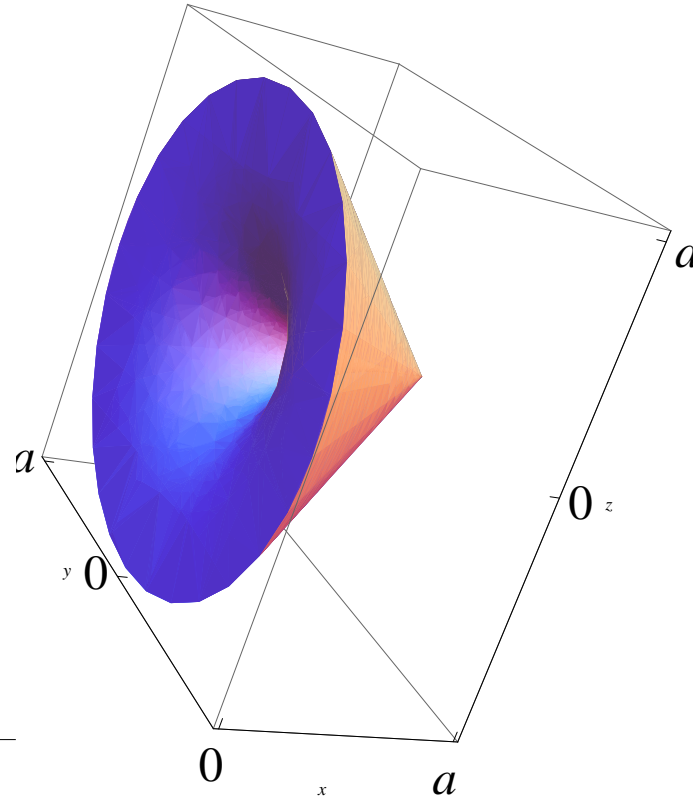
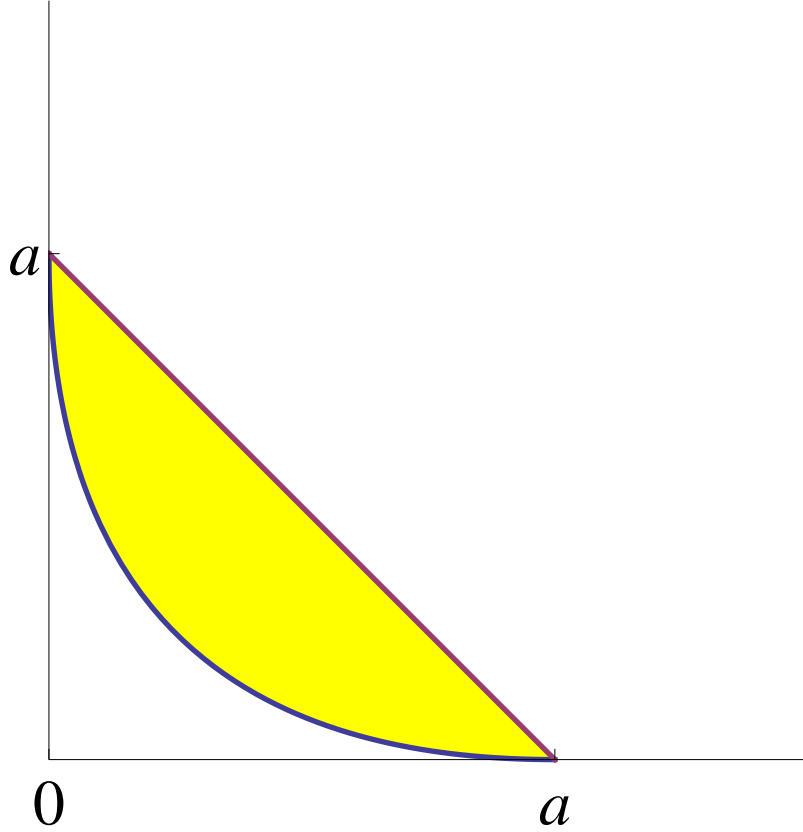
$$x = a(t - \sin t) \quad y = a(1 - \cos t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

γύρω από τον άξονα Ox .

$$(V = 3\pi a^2)$$



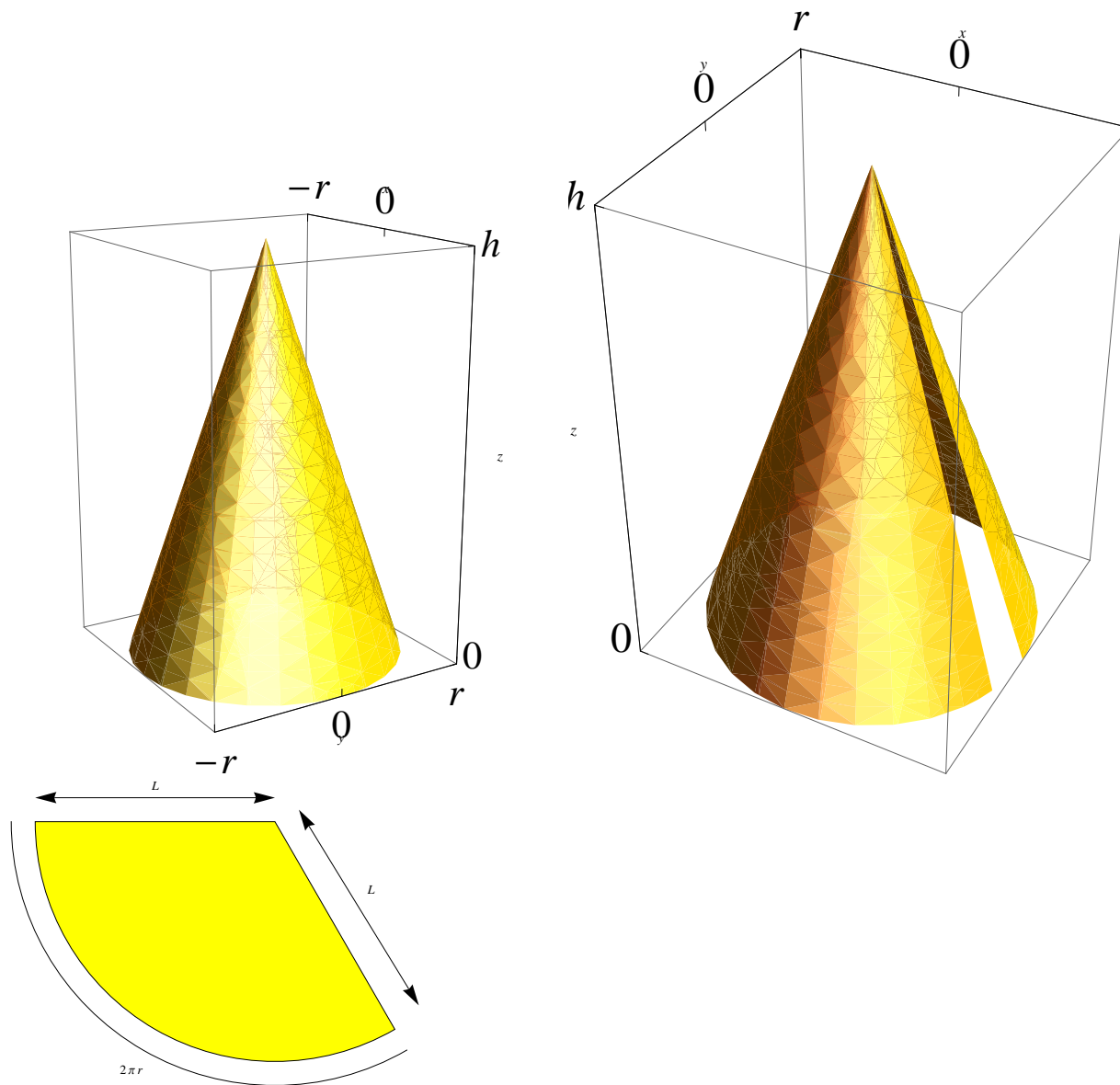
Να βρεθεί ο όγκος που δημιουργείται από την περιστροφή στον άξονα Ox του χωρίου, που περικλείεται από την καμπύλη $y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$ και την ευθεία $y = a - x$ για $0 < x < a$



Να υπολογισθεί ο όγκος της αλλυσοειδούς που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης $y = a \cosh(x/a)$ για $0 \leq x \leq b$

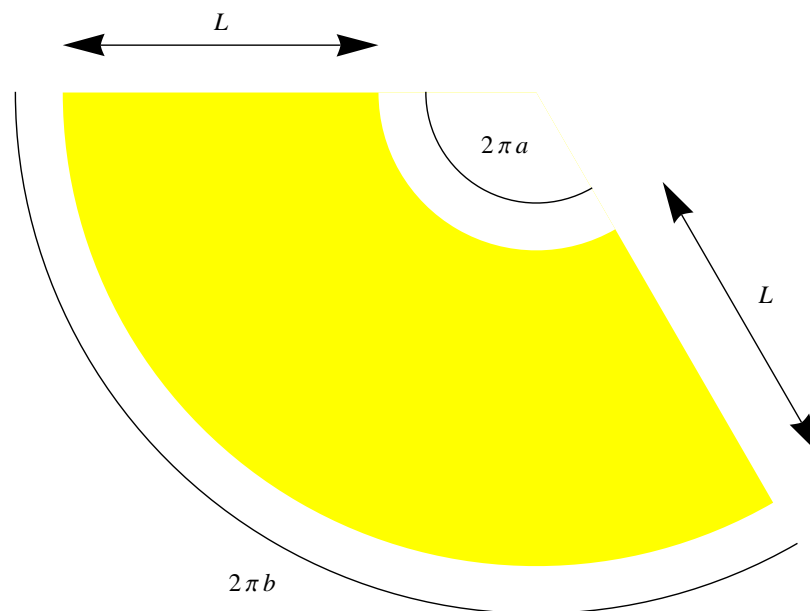
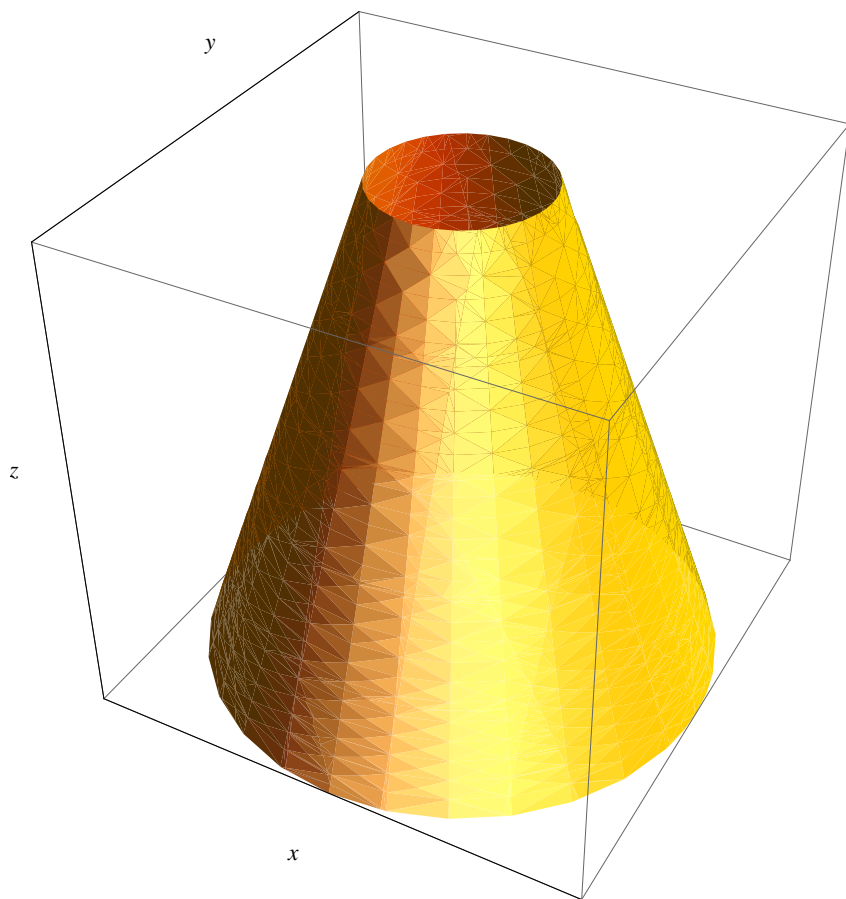
$$(V = \frac{\pi a^3}{4} \sinh(2b/a) + \pi a^2 b/2)$$

Επιφάνεια Κώνου

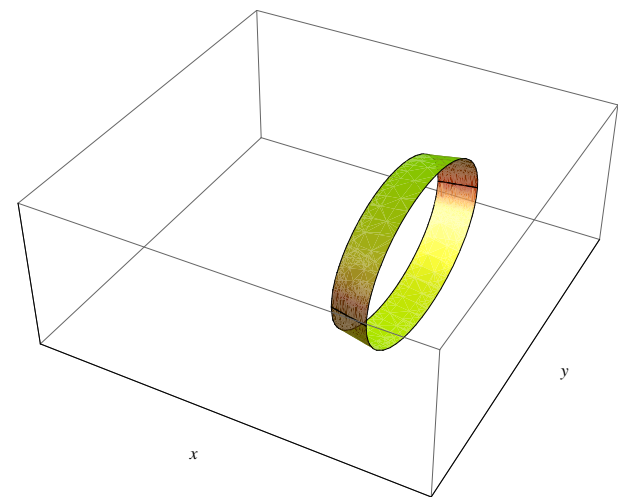
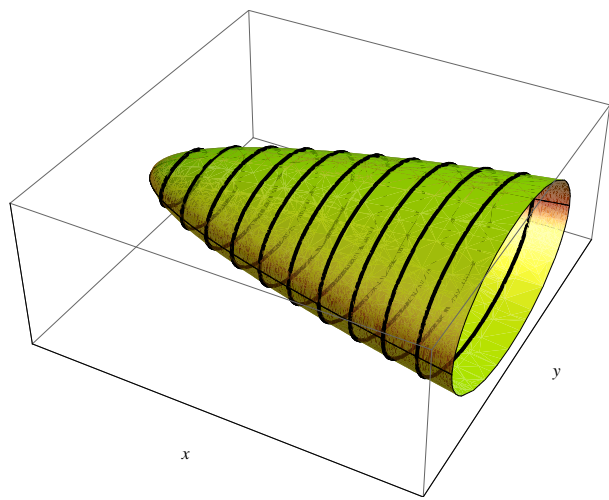
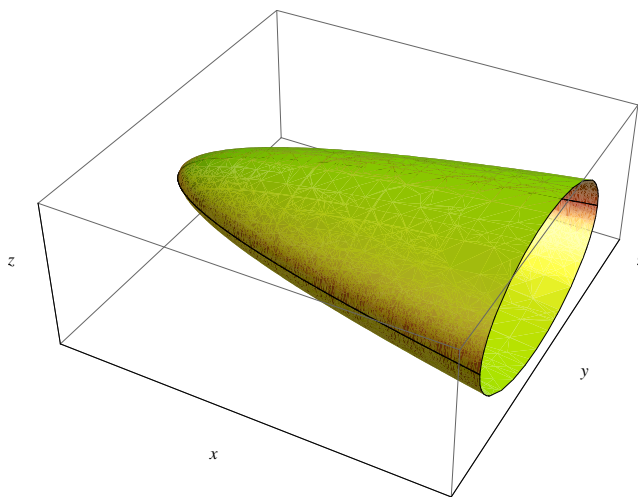


$$S = \pi L r$$

Επιφάνεια κόλουρου κώνου



$$S = 2\pi L \frac{a + b}{2}$$



ΔS εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας μιας παράλληλης τομής =
παράπλευρη επιφάνεια μικρού κόλουρου κώνου

$$\Delta S \approx 2\pi y \Delta L = 2\pi y \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

επιφάνεια S = άθροισμα παράπλευρων επιφανειών παράλληλων τομών

επιφάνεια $S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{dx^2 + dy^2}$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΣΩΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

Αν έχουμε ένα σώμα παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $y = f(x) \geq 0$ η επιφάνεια δίνεται από τον τύπο

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

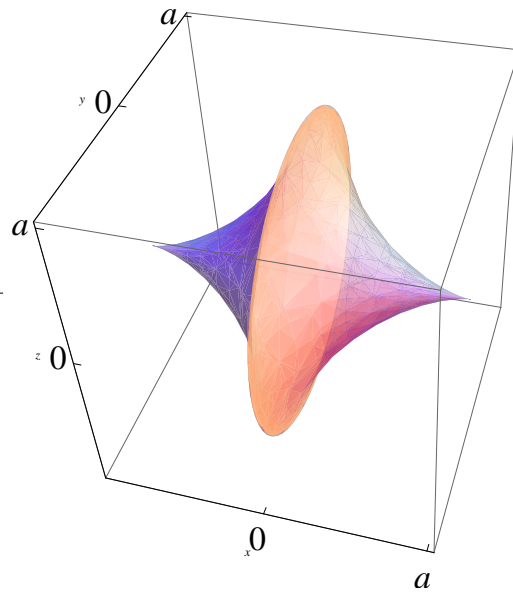
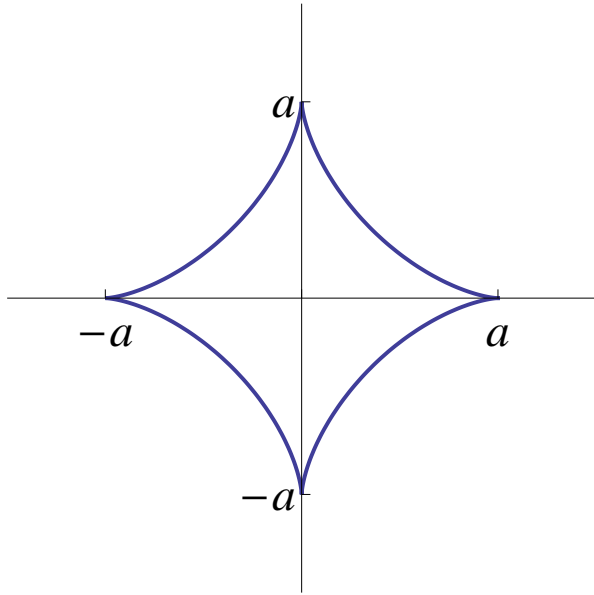
Αν $y = f(x)$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

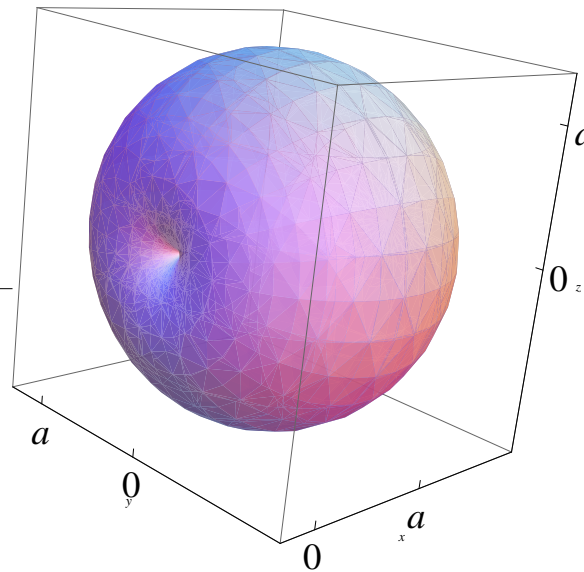
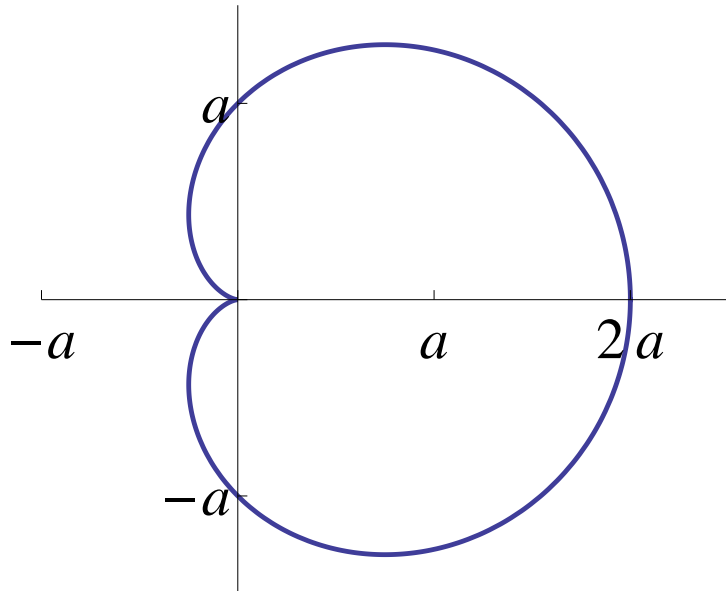
Αν $x = x(t)$, $y = y(t)$

$$S = 2\pi \int_{t_m}^{t_M} y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Να βρεθεί η επιφάνεια εκ περιστροφής της υποκυκλοειδούς $x = a \cos^3 t$,
 $y = a \sin^3 t$

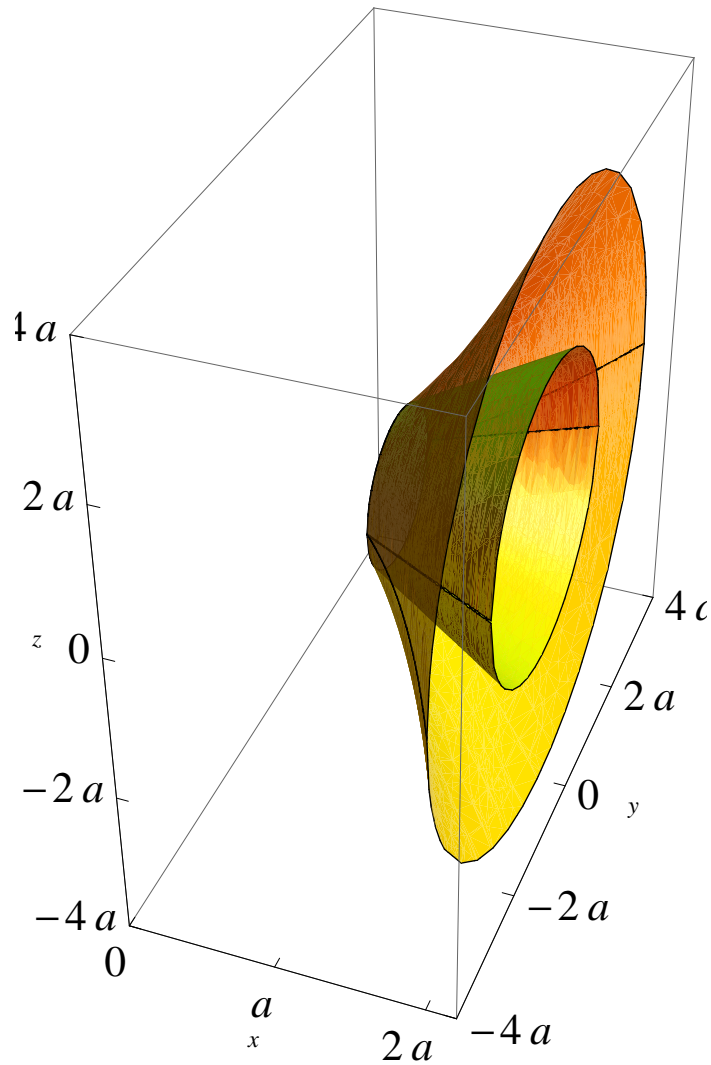
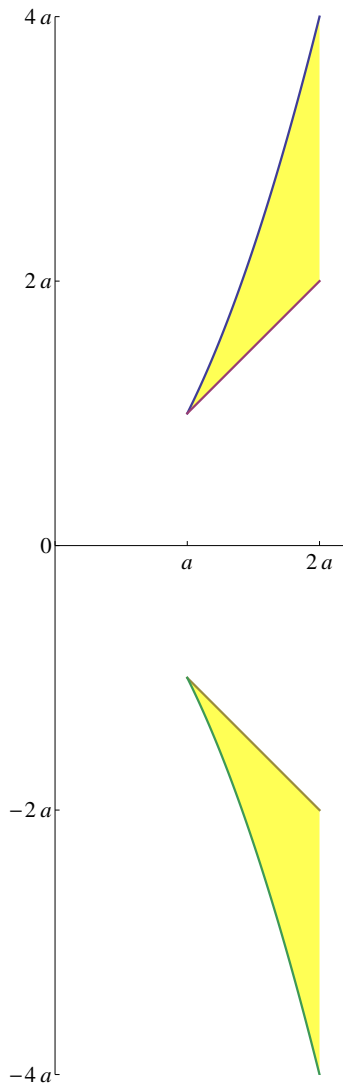


Να βρεθεί η επιφάνεια εκ περιστροφής της καρδιοειδούς $r = f(\theta) = a(1 + \cos \theta)$



Παραδειγμα

Να υπολογισθεί η έπιφάνεια του στερεού ο οποίος παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα Ox του χωρίου μεταξύ των καμπύλων $y = x^2$ και $y = x$ για $1 \leq x \leq 2$



Παραδειγμα: Τόρος

Να υπολογισθεί η επιφάνεια και όγκος του στερεού ο οποίος παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $0x$ ενός κύκλου.

