

Πρόταση 14α- Ανάπτυγμα Maclaurin

Αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα με ακτίνα σύγκλισης R τότε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

και

$$f^{(k)}(x) = k! \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα με ακτίνα σύγκλισης R

Απόδειξη.

Από την πρόταση 12 έχουμε ότι

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightsquigarrow f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \rightsquigarrow f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 = 2! a_2$$

$$f^{(3)}(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} \rightsquigarrow f^{(3)}(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 = 3! a_3$$

και γενικά

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k} \rightsquigarrow f^{(k)}(0) = k \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_k = k! a_k$$

και οι διαδοχικές παράγωγοι συγκλίνουν ομοιόμορφα με ακτίνα σύγκλισης R

□

Πρόταση 14 β- Ανάπτυγμα Taylor

Αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $|x-a| < R$, τότε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((x-a) + a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x-a)^k a^{n-k} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (x-a)^k \left(\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n a^{n-k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \end{aligned}$$



ΤΥΠΟΣ TAYLOR

Λήμμα

$$\text{Αν } R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$$

$$\text{ολοκλήρωση κατά παράγοντες } \Rightarrow R_n = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}(x)$$

Ολοκληρωτικός Τύπος TAYLOR

$f(x)$ έχει συνεχείς παραγώγους τάξης $\leq n$ στο $[a, b]$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{(k)!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x)$$

$$\text{και } R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$$

Πόρισμα

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x \underbrace{(x-t)^{n-1-k}}_{\substack{\text{σταθερό} \\ \text{πρόσημο} \\ \text{για } t \\ \text{μεταξύ } x, x_0}} \underbrace{(x-t)^k f^{(n)}(t)}_{\text{ολοκληρώσιμη}} dt$$

Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής $\rightsquigarrow \exists \xi$ μεταξύ x, x_0

$$R_n(x) = \frac{(x-\xi)^k f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} \frac{(x-x_0)^{n-k}}{(n-k)}$$

$R_n(x)$ υπόλοιπο Cauchy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{(k)!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x)$$