ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εστω $\{f_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα $I = [a, b]$ (ή $(a, b]$ ή $[a, b)$ ή (a, b))

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα (uniform convergence) στην συνάρτηση $S(x)$ αν $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = S(x)$, ομοιόμορφα

$$\Updownarrow$$

Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $S(x)$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon \ \ \forall x \in I \ \ \exists N(\epsilon) \ : \ n > N(\epsilon)$$

$$\rightsquigarrow \ |S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) \right| < \epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon \ \ \forall x \in I \ \ \exists N(\epsilon) \ : \ n > m > N(\epsilon)$$

$$\rightsquigarrow \ |S_n(x) - S_m(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \epsilon$$

Παράδειγμα 1 Η " γεωμετρική σειρά " συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $|x| < c < 1$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}}$$

Αποδ.: Εστω $I_c = [-c, c]$ και $0 < c < 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x} = -\frac{x^n}{1-x}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} x^k - \frac{1}{1-x}\right| = \frac{|x|^n}{1-x} < \frac{c^n}{1-c} < \epsilon < 1 \;\rightsquigarrow\; n > \frac{\ln\left((1-c)\epsilon\right)}{\ln c} \equiv \delta(\epsilon)$$

Οπότε για κάθε $x \in I_c$ έχουμε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, και αυτό ισχύει για κάθε $c < 1$, διότι

$$\forall \epsilon < 1 \;\; \text{και} \;\; \forall x \in I_c \, \exists \delta(\epsilon) \, : \; n > \delta(\epsilon) \; \rightsquigarrow \left|\sum_{k=0}^{n-1} x^k - \frac{1}{1-x}\right| < \epsilon$$

Επομένως η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $-1 < x < 1$.

Πρόταση 6

$$|f_n(x)| \leq v_n(x) \quad \text{ΚΑΙ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

Πρόταση 7 Weierstrass M-Test

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \text{ΚΑΙ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n \quad \text{συγκλίνει}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

Παράδειγμα 1 Η “ γεωμετρική σειρά ” συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $|x| < c < 1$

Παράδειγμα 2 Η “ εκθετική σειρά ” συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $|x| < R$

Πρόταση 6

$$|f_n(x)| \leq v_n(x) \quad \text{ΚΑΙ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

Απόδειξη.

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα} \;\Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon \;\; \forall x \in I \;\; \exists N(\epsilon) : \; n > m > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; \sum_{k=m+1}^{n} v_k(x) < \epsilon$$

αλλά

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} v_k(x) < \epsilon$$

$\square$

Πρόταση 7 Weierstrass M-Test

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \text{ΚΑΙ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n \quad \text{συγκλίνει}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

Απόδειξη.

Είναι η ίδια πρόταση όπως η Πρόταση 6, αλλά εδώ $v_n(x) = M_n$. □

Παράδειγμα 2: Η " εκθετική σειρά " συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αποδ. Για κάθε x υπάρχει ένα $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|x| < m$ και

$$\forall \ell \geq 0 \rightsquigarrow \frac{x}{m+\ell} \leq \frac{x}{m} < 1$$

$$\mathrm{e}^x \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{m+\ell}}{(m+\ell)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!} + \frac{x^m}{m!} \left(1 + \frac{x}{m+1} + \frac{x^2}{(m+1)(m+2)} + \frac{x^3}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \cdots \right)$$

$$\left| \frac{\mathrm{e}^x - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!}}{\frac{x^m}{m!}} \right| = \underbrace{\left(1 + \frac{|x|}{m+1} + \frac{|x|^2}{(m+1)^2} + \frac{|x|^3}{(m+1)^3} + \cdots \right)}_{\text{γεωμετρική σειρά}}$$

δηλαδή η εκθετική σειρά φράσσεται από την γεωμετρική σειρά για κάθε $|x| < m$. Οπότε Πρόταση 6 $\rightsquigarrow$ η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα.

Πρόταση 8

Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και οι συναρτήσεις $f_n(x)$ είναι συνεχείς σε ένα διάστημα I τότε και η συνάρτηση $S(x)$ είναι συνεχής

Πρόταση 9

Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και οι συναρτήσεις $f_n(x)$ και $S(x)$ είναι ολοκληρώσιμες και συνεχείς σε ένα διάστημα I τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx$$

Παράδειγμα 3

Από την γεωμετρική σειρά έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$$

Παράδειγμα 4

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots \rightsquigarrow \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Πρόταση 10

Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και οι συναρτήσεις $f_n'(x)$ και $S'(x)$ είναι συνεχείς σε ένα διάστημα I και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = S'(x)$$

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Ορισμός

Δυναμοσειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

Πρόταση 11

Αν για $x = x_0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ συγκλίνει

τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $|x| \leq |x_0|$

Συγκλιση στο σημείο $x_0 \Rightarrow$ ομοιόμορφη σύγκλιση για $|x| \leq |x_0|$

$$R = \sup\{|x_0| \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n \text{ συγκλίνει}\}$$

Ορισμός

R ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

$\forall\, c < R$ και $\forall\, x \in [-c,\, c[\ \rightsquigarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$ συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά

$x = \pm R \ \rightsquigarrow$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\pm R)^n$ είτε συγκλίνει, είτε δεν συγκλίνει

$$\forall\, x \notin (-R,\, R) \ \rightsquigarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \textbf{δεν} \text{ συγκλίνει η σειρά}$$

Παράδειγμα: Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1.

Σημείωση Συνήθως (ΟΧΙ ΠΑΝΤΑ!!!) η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς βρίσκεται εφαρμόζοντας
είτε το **κριτήριο του λόγου**

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| < 1 \ \rightsquigarrow \ |x| < R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

είτε το **κριτήριο της ρίζας**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\, |x| < 1 \ \rightsquigarrow \ |x| < R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Πρόταση 12

Αν η δυναμοσειρά

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα για } |x| < R$$

$$\Downarrow$$

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα για } |x| < R$$

$$\text{και} \quad S'(x) = s(x)$$

Πρόταση 13

Αν η δυναμοσειρά

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{συγκλίνει απόλυτα για } |x| < R \ \Rightarrow$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για $|x| < R$

$$\text{και} \quad S(x) = \int_0^x s(t)\, dt$$

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ- αποδείξεις

Ορισμός

Δυναμοσειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

Πρόταση 11

Αν για $x = x_0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ συγκλίνει

τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $|x| \leq |x_0|$

Απόδειξη.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ συγκλίνει $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0 \Rightarrow$

$$\exists\, n_0 \;:\; n > n_0 \;\rightsquigarrow\; |a_n x_0^n| < \frac{1}{2} \;\Rightarrow$$

$$\forall\, |x| < |x_0| \;\rightsquigarrow\; |a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \;\Rightarrow$$

$$|x| < |x_0| \;\rightsquigarrow\; \sum_{n>n_0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \quad \text{συγκλίνει} \;\Rightarrow$$

$$\text{M-test} \;\Rightarrow\; \sum_{n>n_0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

□

Συκλιση στο σημείο $x_0 \Rightarrow$ ομοιόμορφη σύγκλιση για $|x| \leq |x_0|$

$$R = \sup\{|x_0| \;:\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n \text{ συγκλίνει}\}$$