ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Β′ ΕΙΔΟΥΣ

Ορισμός

$f(x)$ $\boxed{\text{¨τοπικά' ολοκληρώσιμη}}$ στο $(a,\ b)$ $\boxed{\text{αν}}$ για κάθε κλειστό $[c,\ d] \subset (a,\ b)$ η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη.

πχ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ είναι ¨τοπικά' ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$

Ορισμός

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα για μια τοπικά ολκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ υπάρχει αν μπορούμε να βρούμε τα όρια για κάθε $u \in (a,\ b)$

$$\int_a^b f(x)\, dx \overset{\text{ορ}}{\equiv} \lim_{c \to a} \int_c^u f(x)\, dx + \lim_{d \to b} \int_u^d f(x)\, dx$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Β′ ΕΙΔΟΥΣ στο ένα όριο της ολοκλήρωσης Εστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ συνάρτηση δεν ορίζεται στο b αλλά είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b)$

$$F(u) = \int_a^u f(x) dx \text{ και } \int_a^u f(x) dx = \lim_{u \to b} F(u)$$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ Β′ ΕΙΔΟΥΣ

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Β′ ΕΙΔΟΥΣ στο ένα όριο της ολοκλήρωσης Εστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ συνάρτηση δεν ορίζεται στο b αλλά είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο $[a, b)$

$$F(u) = \int_a^u f(x)dx \text{ και } \int_a^u f(x)dx = \lim_{u \to b} F(u)$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ Cauchy

Υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\Leftrightarrow$ η συνάρτηση $F(u)$ ικανοποιεί μια συνθήκη Cauchy για $u \in [a\, b]$

$$\forall \epsilon\, \exists \delta(\epsilon) > 0 \,:\, |x_2 - x_1| < \delta(\epsilon) \;\Rightarrow\; |F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| < \epsilon$$

Απόλυτη σύγκλιση $\Rightarrow$ **σύγκλιση**

$$\exists \int_a^b |f(x)|\, dx \;\Rightarrow\; \exists \int_a^b f(x)\, dx$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Μπορεί να υπάρχει σύγκλιση αλλά όχι απόλυτη σύγκλιση

Κριτήριο σύγκρισης

$$0 \le f(x) \le g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\exists \int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx \qquad \nexists \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \nexists \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\boxed{|f(x)| < \frac{C}{(x-a)^p} \text{ και } 0 \le p < 1 \text{ για } b \ge x \ge a \Rightarrow f(x) \text{ ολοκληρώσιμη}}$$

Οριακό κριτήριο σύγκλισης

$$0 \le f(x) \quad \text{και} \quad 0 < g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \ge 0$$

1. $0 < \ell < \infty \rightsquigarrow \exists \int_a^b g(x)\,dx \Leftrightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$
2. $\ell = 0 \rightsquigarrow \exists \int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$

Απόλυτη σύγκλιση $\Rightarrow$ **σύγκλιση**

$$\exists \int_a^b |f(x)|\, dx \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\, dx$$

Αποδ.:

$$\exists \int_a^b |f(x)|\, dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon\, \exists \delta > 0 \; : \; |x_2 - b| < \delta \quad \text{και} \quad |x_1 - b| < \delta; \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\, dx \right| < \epsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\, dx$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \epsilon\, \exists \delta > 0 \; : \; |x_2 - b| < \delta \quad \text{και} \quad |x_1 - b| < \delta; \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| < \epsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \int_a^b f(x)\, dx$$

Κριτήριο σύγκρισης

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\exists \int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\nexists \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \nexists \int_a^b g(x)\,dx$$

Αποδ.: Η απόδειξη στηρίζεται στην σύγκλιση Cauchy και στο γεγονός ότι

$$0 \leq \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \leq \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx$$

πχ το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ δεν υπάρχει γιατί $\sin x < x$ για $0 < x < 1$ και $\frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$ και το $\int_0^\infty \frac{dx}{x}$ δεν υπάρχει.

$\rightsquigarrow$ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΝΟΝΤΑΙ ΣΤΟ a

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη για $x > a > 0$ αν

$$\exists \int_a^b |f(x)|dx \quad \text{για κάποιο } b > a$$

$$\boxed{|f(x)| < \frac{C}{(x-a)^p} \text{ και } 0 \leq p < 1 \text{ για } b \geq x \geq a \Rightarrow f(x) \text{ ολοκληρώσιμη}}$$

Αποδ.: Αν $1 > p \geq 0$ τότε για $u > a \rightsquigarrow$

$$F(u) = \int_u^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{(x-a)^{1-p}}{1-p}\bigg|_u^b = \frac{(b-a)^{1-p} - (u-a)^{1-p}}{1-p} \xrightarrow[u \to a]{} \frac{(b-a)}{1-}$$

γιατί $1 - p > 0$ οπότε η $\frac{C}{(x-a)^p}$ είναι ολοκληρώσιμη στο a οπότε

$\exists \int_a^b |f(x)|dx \leq C\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$ πχ η $\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ είναι ολοκληρώσιμη στο 0

Οριακό κριτήριο σύγκλισης

$$0 \leq f(x) \quad \text{και} \quad 0 < g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \geq 0$$

1. $0 < \ell < \infty \rightsquigarrow \exists \int_a^b g(x)\,dx \Leftrightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$
2. $\ell = 0 \rightsquigarrow \exists \int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Εστω $\{f_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα $I = [a, b]$ (ή $(a, b]$ ή $[a, b)$ ή (a, b))

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ακολουθία συναστήσεων συγκλίνει σημειακά (point-wise convergence) στην συνάρτηση $f(x)$ αν

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon \ \exists N(\epsilon, x) \ : \ n > N(\epsilon, x) \ \rightsquigarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Παράδειγμα 1

$f_n(x) = x^n$, $|x| < 1$ τότε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$