Λογισμός ΙΙ Αόριστο Ολοκλήρωμα

Κ. Δασκαλογιάννης
daskalo@math.auth.gr

2010

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- G. B. Thomas, R. L. Finney
  Απειροστικός Λογισμός,
  Παν. Εκδ. Κρήτης
  §4.2, 4.4, 4.8, §7.1–7.8
- M. Spivak
  Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός,
  Παν. Εκδ. Κρήτης
  Κεφ. 18
- Σ. Ντούγιας
  Απειροστικός Λογισμός- Τόμος Β′ LEADER BOOKS, 2005
  Κεφ. 1

Ορισμός Αόριστου Ολοκληρώματος

Ορισμός

$f(x)$ είναι μια <u>συνεχής</u> συνάρτηση σε ένα “διάστημα” $\mathbf{I}$

$$\mathbf{I} = [a, b] \text{ ή } (-\infty, b] \text{ ή } [a, \infty)$$

<u>*αόριστο ολοκλήρωμα*</u> $\boxed{F(x) = \int f(x)\,dx \iff \dfrac{dF}{dx} = F'(x) = f(x)}$

$F(x)$ *αντιπαράγωγος* ή *παράγουσα συνάρτηση*

Η παράγουσα συνάρτηση είναι κάποια συνεχής συνάρτηση

Παραδείγματα

- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan\, x + c$
- $\displaystyle\int |x|\,dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c & \text{αν } \; x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + c & \text{αν } \; x < 0 \end{cases}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\,|x| + c$

Συμβολικός Λογισμός με διαφορικά

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \rightsquigarrow dF = \left(\frac{dF}{dx}\right) dx = f(x)\,dx$$

$$F = \int dF = \int \left(\frac{dF}{dx}\right) dx = \int F'(x)\,dx$$

Το ολοκλήρωμα “αναιρεί” την παραγώγιση

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int x^2\,dx = & & \boxed{\displaystyle\int d\left(\frac{x^3}{3}\right)} & = & \boxed{\dfrac{x^3}{3}} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
\displaystyle\int \left(\frac{dF}{dx}\right) dx = & & \displaystyle\int dF = & & F
\end{array}$$

Θεώρημα

Η παράγουσα συνάρτηση $F(x)$ είναι *ορισμένη με προσέγγιση μιας σταθερας*:

$$F(x) \text{ παράγουσα συνάρτηση της } f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$F(x) + c \text{ παράγουσα συνάρτηση της } f(x)$$

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = \frac{d}{dx}(F(x) + c) = f(x)$$

Η απεικόνιση: συνάρτηση $f(x) \mapsto F(x)$ παράγουσα συνάρτηση

$\boxed{\text{ΔΕΝ}}$ είναι μονοσήμαντη πχ

$$\int x^4\, dx = \int d\left(\frac{x^5}{5}\right) = \frac{x^5}{5} + c$$

όπου c οποιαδήποτε σταθερά

$$\int \cos x\, dx = \int d(\sin x) = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int d(\arctan x) = \arctan x + c$$

Πίνακας Ολοκληρωμάτων

$\int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c \quad p \neq -1$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln \|x\| + c$
$\int e^x \, dx = e^x + c$	
$\int \cos x \, dx = \sin x + c$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$
$\int \cosh x \, dx = \sinh x + c$	$\int \sinh x \, dx = \cosh x + c$
$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + c$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$	$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = -\mathrm{arccot}\, x + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{arcsinh}\, x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{arccosh}\, x + c$
$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \mathrm{arctanh}\, x + c$ για $\|x\| < 1$	$\int \frac{1}{x^2-1} \, dx = -\mathrm{arccoth}\, x + c$ για $\|x\| > 1$

Βασικές ιδιότητες ολοκληρωμάτων

$$\int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx$$

$$\int \{f(x) + g(x)\}\; dx = \int f(x)\, dx \;+\; \int g(x)\, dx$$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση μεταβλητής

$$\int g(u)\, du \underbrace{=}_{u=u(x)} \int g\left(u(x)\right) u'(x)\, dx$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) \;-\; \int g(x)\, f'(x)\, dx$$

Βασικές ιδιότητες ολοκληρωμάτων-αποδείξεις

$$\int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\int \alpha f(x)\, dx\right)}{dx} &= \alpha f(x)\\ &\Updownarrow\\ \frac{d\left(\alpha \int f(x)\, dx\right)}{dx} &= \alpha\frac{d\left(\int f(x)\, dx\right)}{dx} = \alpha f(x)\end{aligned}$$

□

$$\int \{f(x) + g(x)\}\ dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

Απόδειξη.

$$\frac{d\left\{\int (f(x)+g(x))\, dx\right\}}{dx} = f(x) + g(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d\left\{\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx\right\}}{dx} =$$

$$= \frac{d\left(\int f(x)\, dx\right)}{dx} + \frac{d\left(\int g(x)\, dx\right)}{dx} = f(x) + g(x)$$

□

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση μεταβλητής

$$\int g(u)\,du \underbrace{=}_{u=u(x)} \int g\left(u(x)\right) u'(x)\,dx =$$

$$= \int g\left(u(x)\right) \frac{du(x)}{dx}\,dx =$$

$$= \int g\left(u(x)\right)\, du(x)$$

πχ

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x} =$$

$$\underbrace{=}_{u=\cos x} -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c =$$

$$= \ln \tfrac{1}{|\cos x|} + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+a^2\right)}{\sqrt{x^2+a^2}} =$$

$$\underbrace{=}_{u=x^2+a^2} \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + c =$$

$$= \sqrt{x^2+a^2} + c$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int d(fg) = \int fdg + \int gdf$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx}$$

πχ

$$\begin{aligned}\int x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx &= -\int x\,d\left(\mathrm{e}^{-x}\right) = \\ &= -x\,\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\,dx = -x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= x\ln x - \int x\,d(\ln x) = \\ &= x\ln x - \int \frac{x}{x}\,dx = x\ln x - x\end{aligned}$$

Ολοκληρώματα με αντικατάσταση μεταβλητής

$$\boxed{\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int f(u)\, du}$$

$$\int f(\alpha x + \beta)\, dx \underbrace{=}_{u=\alpha x+\beta} \frac{1}{\alpha} \int f(u)\, du$$

$$\int f\left(\mathrm{e}^{x}\right)\, dx \underbrace{=}_{u=\mathrm{e}^{x}} \int \frac{f(u)}{u}\, du$$

$$\int \frac{f\left(\ln\, x\right)}{x}\, dx \underbrace{=}_{u=\ln\, x} \int f(u)\, du$$
